Emanuel Klier

Gaussovo pentagramma mirificum v Lobačevského geometrii

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 62 (1933), No. 4-5, 164--170

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123898

Gaussovo pentagramma mirificum v Lobačevského geometrii.

Em. Klier.

(Došlo 29. října 1932.)

Ve sférické geometrii lze danému pravoúhlému trojúhelníku přiřaditi čtyři další pravoúhlé trojúhelníky, jež tvoří s původním uzavřený řetězec, jehož užití vede k známému Gaussovu pentagrammatu a Neperovu pravidlu.[1]) Poněvadž pak Lobačevského geometrii lze interpretovati jako geometrii na kouli o imaginárním poloměru, dá se očekávati i v hyperbolické geometrii podobný řetězec pravoúhlých trojúhelníků a příslušné pravidlo.

Lobačevský udává již způsob přiřazení takových pravoúhlých trojúhelníků a Engel[2]) prvý odvodil celý cyklus a příslušné pravidlo, jež Liebmann nazývá Neper-Engelovým.[3]) Liebmann odvozuje cyklus trojúhelníků užívaje čtyrúhelníku o třech pravých úhlech, kdežto autoři předešlí užívali prostorové hyperbolické geometrie.

V pojednání: Das Pentagramma mirificum und die nichteuklidischen Parallelen[4]) chtěje najíti společné východisko pro řetězec trojúhelníků v geometrii eliptické a hyperbolické vychází Liebmann z geometrie eliptické interpretované jako geometrie na kouli čili jako geometrie sférické. V ní lze přiřaditi pravoúhlému trojúhelníku jistý čtyrúhelník se třemi pravými úhly, který pak doplňuje na oktant kulový. Zavedením fundamentální kuželosečky Cayleyovy jeví se tento oktant jakožto polární trojúhelník vzhledem k základní kuželosečce. Je-li kuželosečka reálnou, máme případ geometrie Lobačevského, a je-li jeden vrchol polárního trojúhelníku uvnitř kuželosečky, tedy v oblasti zobrazující reálné elementy, pak druhé dva vrcholy polárného trojúhelníku jsou mimo kuželosečku a tedy v části zobrazující imaginární prvky. Aby dostal Liebmann přidružený čtyrúhelník se všemi reálnými vrcholy, užívá poněkud umělého obratu. Na základě zmíněného zobrazení a metriky určuje pak početně všechny prvky přiřazeného čtyrúhelníku, z něhož lze odvoditi přiřazený trojúhelník k původnímu a opakováním sestrojiti řetězec pravoúhlých trojúhelníků obdobný

---

[1]) Viz na př. Dr. Gerhard Hessenberg: Ebene u. sphärische Trigonometrie. (Sammlung Göschen.) Str. 115.

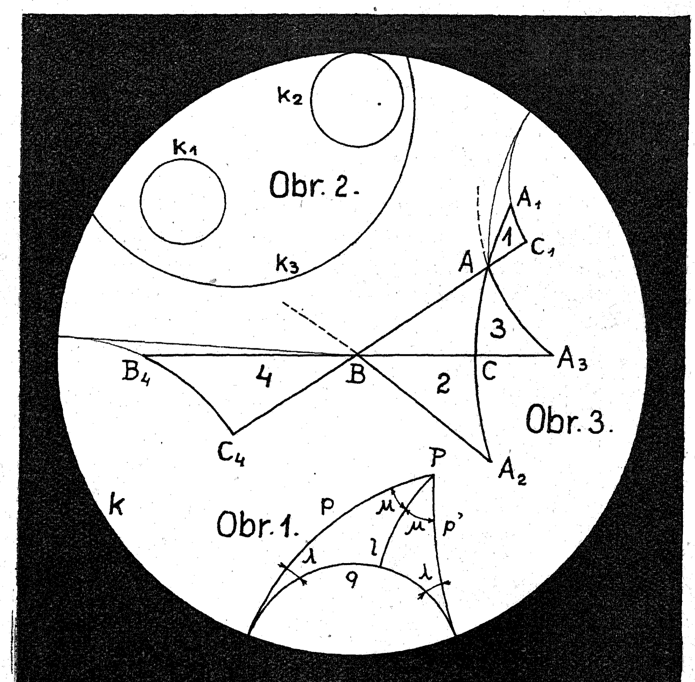
[2]) Engel - Lobatschefskij: Zwei geometrische Abhandlungen. Str. 346.

[3]) Liebmann: Nichteuklidische Geometrie.

[4]) Sitzungsberichte der mathem.-physik. Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1912. Str. 273 a násl.

jako Gaussův. Pojednání končí užitím pentagrammatu v geometrii eliptické k důkazu Studyovy věty, týkající se zobrazení přímek eliptického prostoru.

V následujícím podám vyvození řetězce pravoúhlých trojúhelníků bez přidružených čtyrúhelníků, s hlediska společného geometrii hyperbolické i sférické a pravidlo Neper-Engelovo v pozměněné formě. V této formě nenalezl jsem zmíněné pravidlo v literatuře; domnívám se však, že lépe odpovídá duchu Lobačevského geometrie než pravidlo Neper-Engelovo.



Ze vzorců sférické geometrie dostaneme příslušné vzorce geometrie Lobačevského tak, že goniometrické funkce stran nahradíme funkcemi hyperbolickými, funkce úhlů ponecháme. Tak zejména pro pravoúhlý trojúhelník o stranách l, m, n a úhlech λ, μ bude

$$\operatorname{Cos} n = \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} m = \operatorname{cotg} \lambda \operatorname{cotg} \mu. \tag{1}$$

$$\cos \lambda = \sin \mu \operatorname{Cos} l. \tag{2}$$

Je-li vésti rovnoběžku p k dané přímce q daným bodem P, jenž od přímky q má kolmou vzdálenost l, pak v příslušném trojúhelníku pravoúhlém (obr. 1) bude $\lambda = 0$, příslušný úhel μ nazývá se úhlem rovnoběžnosti a označuje se $\Pi(l)$ jakožto příslušný úsečce l, takže $\mu = \Pi(l)$ a podle (2) je

$$\sin \Pi(l) = \frac{1}{\operatorname{Cos} l}. \tag{3}$$

Z této rovnice plyne dále

$$\cos \Pi(l) = \operatorname{Tg} l \qquad \operatorname{cotg} \Pi(l) = \operatorname{Sin} l. \tag{3'}$$

Opačně pak označuje se úsečka l příslušná k úhlu rovnoběžnosti μ symbolem $\Delta\mu$, takže platí:

$$\mu = \Pi(l) = \Pi[\Delta(\mu)], \tag{4}$$

$$l = \Delta(\mu) = \Delta[\Pi(l)]. \tag{4'}$$

Symbolem Π zavádějí se úhly místo úseček a symbolem Δ úsečky místo úhlů, čímž dociluje se ve vzorcích jakési homogenity, a to buď v úhlech nebo v úsečkách.

Budiž dán pravoúhlý trojúhelník ABC o stranách a, b, c a úhlech α, β. Z něho odvodíme další pravoúhlý trojúhelník takto:

Pro k-tý trojúhelník označme jeho prvky indexem k, při čemž původní trojúhelník označme jako nultý. Pak místo jednotlivých prvků zaveďme veličiny x se dvěma indexy podle tohoto schematu:

$$x_k^\lambda = c_k,\ \Delta\beta_k,\ \Delta\left[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b_k)\right],\ \Delta\left[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a_k)\right],\ \Delta\alpha_k \tag{5}$$

pro $\lambda = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$

Výtvarný zákon pro řetězec trojúhelníků pak je dán vztahem

$$x_{k+1}^\lambda = x_k^{\lambda+3}, \tag{6}$$

při čemž položíme ještě podmínku periodicity v indexu λ a to:

$$x_k^{\lambda+5} = x_k^\lambda. \tag{7}$$

Z rovnic (6), (7) plyne však opětovným užíváním (6):

$$x_{k+1}^\lambda = x_k^{\lambda+3} = x_{k-1}^{\lambda+6} = x_{k-1}^{\lambda+1} = x_{k-2}^{\lambda+4} = x_{k-3}^{\lambda+7} = x_{k-3}^{\lambda+2} = \\ = x_{k-4}^{\lambda+5} = x_{k-4}^\lambda \tag{7'}$$

Na př. pro $k = 4$ je $x_5^\lambda = x_0^\lambda$. Pátým krokem se tedy prvky opakují.

V původním trojúhelníku prodlužme odvěsnu b a přeponu c přes vrchol A, který označme B_1. Na prodlouženou přeponu nanesme délku $B_1C_1 = a_1 = \Delta(\alpha_0 + \varepsilon_0)$ jakožto odvěsnu nového trojúhelníku. Při tom ε_0 je defekt původního trojúhelníku a je $\varepsilon_0 = \pi - (\alpha_0 + \beta_0 + \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\pi - \alpha_0 - \beta_0$. V bodě C_1 vztyčíme kolmici na a_1, jež protne prodlouženou odvěsnu b ve vrcholu A_1. V novém trojúhelníku je tedy $\beta_1 = \alpha_0$. Pokračujeme-li stejným způsobem dále, takže vždy

$$\beta_k = \alpha_{k-1}, \quad a_k = \Delta(\alpha_{k-1} + \varepsilon_{k-1}) = \Delta\left(\tfrac{1}{2}\pi - \beta_{k-1}\right) \tag{7''}$$

dostaneme čtyři různé trojúhelníky a pátý shodný s původním.[5]) Z rovnic (5), (6), (7) určíme ostatní prvky. Tak na př. položme $k = 0$, $\lambda = 3$, takže podle (6) a (7)

$$x_1^{\,3} = x_0^{\,6} = x_0^{\,1},$$

podle (5)

$$\Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b_1)] = c_0,$$

podle (4), (4')

$$\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b_1) = \Pi(c_0)$$

čili

$$\Pi(b_1) = \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(c_0)$$

a tudíž

$$b_1 = \Delta[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(c)].$$

Tak dostaneme cyklus trojúhelníků, jejichž prvky jsou:

$$\begin{array}{llllll}
0 & c & \beta & a & b & \alpha \\
1 & \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a)] & \alpha & \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \beta] & \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(c)] & \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b) \\
2 & \Delta\beta & \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b) & \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \alpha] & a & \Pi(c) \\
3 & \Delta\alpha & \Pi(c) & b & \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \beta] & \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a) \\
4 & \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b)] & \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a) & \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(c)] & \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \alpha] & \beta
\end{array} \tag{8}$$

Že tomu skutečně tak je, lze se přesvědčiti přímým výpočtem jednotlivých trojúhelníků.

Ve sférické geometrii místo (5) nastupuje schema

$$x_k^{\lambda} = c_k,\ \beta_k,\ \tfrac{1}{2}\pi - a_k,\ \tfrac{1}{2}\pi - b_k,\ \alpha_k \tag{5'}$$

pro $\lambda = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

a trojúhelníky konstruují se tak, že

$$\beta_k = \alpha_{k-1},\quad b_k = \alpha_{k-1} + \varepsilon_{k-1} = \tfrac{1}{2}\pi - \beta_{k-1}$$

(na rozdíl od hyperbolické, kde bylo $a_k = \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \beta_{k-1}]$), při čemž $\varepsilon_K = \tfrac{1}{2}\pi - \alpha_K - \beta_K$ značí úhlový exces. Trojúhelníky tvoří pak řetězec, který se v sebe uzavírá.[6]) Důsledkem tohoto řetězce je pak známé pravidlo Neperovo.

Podle schematu (8) je patrno, že přepona c nabývá hodnot, jež sloužily k určení veličin x_k^{λ} podle vztahů (5). Z rovnice (6) pro $\lambda = 1$ dostaneme

$$x^{1}_{k+1} = x_k^{4} \text{ čili } c_{k+1} = \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a_k)]. \tag{9}$$

Z téže rovnice pro $\lambda = 3$

$$x^{3}_{k+1} = x_k^{6} = x_k^{1} \text{ čili } \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b_{k+1})] = c_k. \tag{9'}$$

Z řady rovnic (7') vztah $x^{\lambda}_{k+1} = x^{\lambda+4}_{k-2}$ dává pro $\lambda = 1$ resp. 2

$$c_{k+1} = \Delta\alpha_{k-2},\quad \Delta\beta_{k+1} = c_{k-2}. \tag{9''}$$

[5]) Rovnice (7'') mohou sloužiti za východisko, neboť jsou specialisací rovnic (5), (6), (7), (7').

[6]) Dr. Gerhard Hessenberg: Ebene u. sphärische Geometrie. Str. 115.

Rovnice (9), (9'), (9'') lze spojiti ve tvar:

$$c_{k\pm 1} = \Delta\left[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi\binom{a_k}{b_k}\right], \quad c_{k\pm 3} = \Delta\binom{\alpha_k}{\beta_k}. \tag{10}$$

Napišme nyní hodnoty pro c do kruhu, pentagrammatu, v pořadí daném pěticípou hvězdicí takto:

$$\begin{array}{ccccc} & & c & & \\ & & 0 & & \\ \Delta\alpha \;\; 3 & & & & 2 \;\; \Delta\beta \\ & 1 & & 4 & \\ & \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a)] & & \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b)]. & \end{array}$$

Poněvadž pak podle (1), (3), (3') můžeme psáti rovnice:

$$\begin{aligned} \operatorname{Cos} c_k &= \operatorname{Cos} a_k \operatorname{Cos} b_k = \frac{1}{\sin \Pi(a_k) \sin \Pi(b_k)} = \\ &= \frac{1}{\cos\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a_k)] \cos\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b_k)]} = \qquad (11) \\ &= \operatorname{Cotg} \Delta[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a_k)] \operatorname{Cotg} \Delta[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b_k)], \end{aligned}$$

$$\operatorname{Cos} c_k = \operatorname{cotg} \alpha_k \operatorname{cotg} \beta_k = \operatorname{Sin} \Delta(\alpha_k) \operatorname{Sin} \Delta(\beta_k) \tag{11'}$$

čili podle (10)

$$\operatorname{Cos} c_k = \operatorname{Cotg} c_{k+1} \operatorname{Cotg} c_{k-1} = \operatorname{Sin} c_{k+3} \operatorname{Sin} c_{k-3}, \tag{12}$$

můžeme vysloviti pravidlo:

Cos kteréhokoliv prvku pentagrammatu rovná se součinu Cotg prvků protilehlých nebo součinu Sin prvků přilehlých.

Toto pravidlo je úplně analogické s Neperovým. Rozdíl je pouze v tom, že hyperbolické funkce nahrazují goniometrické a že Cotg a Sin vyměňují si role se sin a cotg.

Užitím relací (3), (3') lze (12) přepsat na tvar

$$\sin \Pi(c_k) = \cos \Pi(c_{k+1}) \cos \Pi(c_{k-1}) = \operatorname{tg} \Pi(c_{k+3}) \operatorname{tg} \Pi(c_{k-3}). \tag{13}$$

Užijeme-li tedy podle této rovnice symbolu Π na zmíněné pentagramma, dostaneme

$$\begin{array}{ccccc} & & \Pi\,(c) & & \\ & & 0 & & \\ \alpha \;\; 3 & & & & 2 \;\; \beta \\ & 1 & & 4 & \\ & \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a) & & \pi - \Pi\tfrac{1}{2}(b) & \end{array}$$

a pravidlo (13) přejde v Neper-Engelovo,[7]) pravící, že sin kteréhokoliv prvku rovná se součinu tg přilehlých nebo součinu cos proti-

[7]) Engel - Lobatschefskij: Zwei geometrische Abhandlungen.

lehlých prvků. Můžeme říci, že pravidlo Neper-Engelovo je pro pentagramma homogenní v úhlech, pravidlo (12) pro pentagramma homogenní v úsečkách.

Kreslíme-li cyklus trojúhelníků pro hyperbolickou rovinu, nedostaneme obrazec uzavřený jako v rovině sférické. Tam totiž odvěsny a_{k-1} a a_{k+1} stojí kolmo na prodloužené přeponě c_k a prodloužený protínají se ve vrcholu, který je společný trojúhelníku $k+2$-hému a $k+3$-tímu. V Lobačevského geometrii však, mají-li dvě přímky společnou kolmici, neprotínají se vůbec. V obr. 3 zvolil jsem tudíž seskupení podle společných úhlů a odvěsen. K zobrazení užil jsem známé stereografické projekce koule o poloměru imaginárním.[8]) Celá rovina zobrazí se dovnitř kruhu k, jehož obvod zobrazuje body nekonečně vzdálené. Přímky zobrazují se jako kružnice protínající kolmo základní kružnici. Kružnice zobrazují se jako kružnice a hned vidíme (obr. 2), že rozeznáváme kružnice obyčejné (k_1), kružnice s jedním bodem v nekonečnu (k_2) zvané mezné kružnice či horocykly a kružnice se dvěma body v nekonečnu zvané ekvidistanty (k_3). Snadno řeší se v tomto zobrazení úloha: Vésti daným bodem rovnoběžku k dané přímce (obr. 1).

V obr. 3 označeny jsou trojúhelníky shodně podle schematu (8). Pro konstrukci je výhodno sestrojiti ve vrcholech A, B původního trojúhelníku přímky svírající s c úhly $\frac{1}{2}\pi - \beta$, $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ a vésti k nim rovnoběžky kolmé k c, které vytnou na prodloužené přeponě c odvěsny délek $\Delta\,[\frac{1}{2}\pi - \beta]$, $\Delta\,[\frac{1}{2}\pi - \alpha]$ a na prodloužených odvěsnách vrcholy A_1, B_4 trojúhelníku 1, 4. Vrcholy A, B původního trojúhelníku vedeme přímky svírající úhel $\Pi(c)$ s odvěsnami a protínající druhé, prodloužené odvěsny ve vrcholech A_3, A_2 trojúhelníků 3, 2.

Přeneseme-li úhel β k vrcholu A, úhel α k vrcholu B k prodlouženým odvěsnám b, a, jak v obr. 3 je naznačeno čárkovaně, dostaneme obrazec, který přechodem k nekonečně velkému poloměru koule dává pruhy nad stranami a, b, c mezi kolmicemi k nim a prostírající se do nekonečna. Je to speciální případ obrazce podobného, jímž dokazuje se Pythagorova věta, který vyjde ve článku: „Jednoduchý důkaz věty cosinové a zobecnění některých pouček“ v „Rozhledech matematicko-přírodovědeckých“.

Uveďme ještě jednoduchý příklad.

Nechť jedná se o pravoúhlý trojúhelník, jehož jedna odvěsna je a a přilehlý úhel $\beta = \frac{1}{4}\pi$. Podle pentagrammatu je

$$\operatorname{Cos} \Delta(\beta) = \operatorname{Cotg} \Delta(\alpha) \operatorname{Cotg} \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a)],$$

[8]) Klein: Vorlesungen über die nichteuklidische Geometrie. Gotinky 1890/1892 (litograf.). — Hlavatý: Úvod do neeuklidovské geometrie (1926). — Zajímavá fysikální aplikace je ve článku: Prof. Dr. A. Dittrich: Rovnice Maxwellovy v prostoru Lobačevského. Časopis pro pěst. math. a fys. XL, 1910.

podle (3) a (3')

$$\frac{1}{\sin \beta} = \frac{1}{\cos \alpha \sin \Pi(a)}$$

a tedy

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2} \, . \sin \Pi(a)} = \frac{\operatorname{Cos} a}{\sqrt{2}}. \tag{14}$$

Plocha f čtyrúhelníku se třemi pravými úhly, jehož dvě strany proti ostrému úhlu 2α jsou a, je úměrna jeho defektu $\varepsilon_a = 2\pi - \frac{3}{2}\pi - 2\alpha = \frac{1}{2}\pi - 2\alpha$, takže podle (14) je

$$\sin \varepsilon_a = \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \operatorname{Cos}^2 a - 1. \tag{15}$$

Zavedeme-li poloměr koule R a označíme $f_k = R^2 \varepsilon_k$, bude (15) zníti:

$$\sin \frac{f_a}{R^2} = \operatorname{Cos}^2 \frac{a}{R} - 1 = \operatorname{Sin}^2 \frac{a}{R} \tag{15'}$$

čili

$$\operatorname{Cos} \frac{a}{R} = \sqrt{1 + \sin \frac{f_a}{R^2}} \tag{16}$$

a podobně pro úsečky b, c

$$\operatorname{Cos} \frac{b}{R} = \sqrt{1 + \sin \frac{f_b}{R^2}}, \tag{16'}$$

$$\cos \frac{c}{R} = \sqrt{1 + \sin \frac{f_c}{R^2}}. \tag{16''}$$

Považujeme-li a, b, c za strany pravoúhlého trojúhelníku, takže

$$\operatorname{Cos} \frac{c}{R} = \operatorname{Cos} \frac{a}{R} \operatorname{Cos} \frac{b}{R},$$

dostaneme z rovnic (16), (16'), (16'') po úpravě

$$\sin \frac{f_a}{R^2} + \sin \frac{f_b}{R^2} + \sin \frac{f_a}{R^2} \sin \frac{f_b}{R^2} = \sin \frac{f_c}{R^2}. \tag{17}$$

Pro nekonečně velké R dává (15') $f_a = a^2$ a podobně $f_b = b^2$, $f_c = c^2$, takže (17) přejde ve větu Pythagorovu

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

*

Pentagramma mirificum de Gauss dans la géométrie de Lobačevsky.

(Extrait de l'article précédent.)

Dans cet article on fait ressortir l'analogie complète entre le système de triangles rectangulaires, bien connu dans la géométrie sphérique sous le nom indiqué au titre et le même système dans la géométrie de Lobačevsky. L'auteur donne une règle pareille à celle de Neper-Engel.