Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Zdeněk Koutský
Zobecněné Fresnelovy integraly

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 3, D257--D261

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123885

ČLÁNKY A REFERÁTY

ZOBECNĚNÉ FRESNELOVY INTEGRÁLY.

ZDENĚK KOUTSKÝ, Praha.

Zobecněnými Fresnelovými integrály nazývám integrály typu $\int_0^\alpha \cos x^{2k}\,dx, \int_0^\infty \sin x^{2k}\,dx$. Je zřejmé, že pro $k = 1$ dostanu Fresnelův integrál. Je několik způsobů výpočtu těchto speciálních integrálů, ale pro $k > \frac{1}{2}$ a $k \neq 1$ zbývají methody pouze dvě. Jedna z nich je převedení těchto integrálů substitucí $x^{2k} = y$ na typ $\int_\infty^\infty \frac{\cos y}{y^m}\,dy, \int_\infty^\infty \frac{\sin y}{y^m}\,dy$, kde $m = \frac{2k-1}{2k}$, jejichž výpočet záměnou integračního pořadu najdeme ve všech učebnicích integrálního počtu s výsledkem

$$\int_0^\infty \frac{\cos y}{y^{\frac{2k-1}{2k}}}\,dy = \frac{\pi}{4k\Gamma\left(\frac{2k-1}{2k}\right)\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{2k-1}{2k}\right)};$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y^{\frac{2k-1}{2k}}}\,dy = \frac{\pi}{4k\Gamma\left(\frac{2k-1}{2k}\right)\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{2k-1}{2k}\right)}.$$

Tato cesta zdá se mi obtížnější a delší (je nutno dokázati oprávněnost záměny integračního pořadu, použíti jisté vlastnosti Γ-funkce a ještě další substituce a to pro oba integrály zvlášť) než výpočet pomocí Cauchyovy věty integrální, jejž chci předvésti.

Budiž k reálné číslo, $k > \frac{1}{2}$. V Gaussově rovině zvolíme si následující integrační cestu: Z počátku O po reálné ose do bodu A (ve vzdálenosti R), odtud po kružnici opsané počátku poloměrem R do bodu B ($\sphericalangle AOB = \varphi = \frac{\pi}{4k}$) a po přímce zpět do O. V oblasti, ležící uvnitř integrační čáry, existuje holomorfní větev funkce $e^{-z^{2k}}$, která na reálné ose nabývá reálných hodnot a na uzávěru této oblasti je spojitá. Tedy je integrál po naznačené cestě roven nule.

Tedy

$$\int_0^R e^{-x^{2k}}\,dx + \int_{\overrightarrow{AB}} e^{-z^{2k}}\,dz + \int_{\overrightarrow{BO}} e^{-z^{2k}}\,dz = 0.$$

Z toho

$$\int_0^R e^{-x^{2k}}\,dx + \int_{\overrightarrow{AB}} e^{-z^{2k}}\,dz = \int_{\overleftarrow{BO}} e^{-z^{2k}}\,dz \tag{1}$$

Protože

$$\int_0^\infty e^{-x^{2k}}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x^{2k}}\,dx,$$

přejdeme v (1) k limitám:

$$\int_0^\infty e^{-x^{2k}}\,dx + \lim_{R\to\infty} \int_{\overrightarrow{AB}} e^{-z^{2k}}\,dz = \lim_{B\to\infty} \int_{\overleftarrow{BO}} e^{-z^{2k}}\,dz \tag{2}$$

Tvrdím:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\overrightarrow{AB}} e^{-z^{2k}}\,dz = 0.$$

Důkaz:

$$\int_{\overrightarrow{AB}} e^{-z^{2k}}\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^{2k}\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\cdot \frac{R}{2k}\left(-\sin\frac{\varphi}{2k} + i\cos\frac{\varphi}{2k}\right)d\varphi,$$

což plyne ze substituce:

$$z = R\left(\cos\frac{\varphi}{2k} + i\sin\frac{\varphi}{2k}\right)$$

$$dz = \frac{1}{2k}R\left(-\sin\frac{\varphi}{2k} + i\cos\frac{\varphi}{2k}\right)d\varphi.$$

Nyní odhadneme prostou hodnotu tohoto integrálu:

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cdots\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cdots\right| = \frac{R}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^{2k}\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{R}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^{2k}\sin\varphi}\,d\varphi \leq \frac{R}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}\varphi R^{2k}}\,d\varphi = \frac{\pi}{2kR^{2k-1}}\left(1 - e^{-R^{2k}}\right).$$

Tedy v limitě: $\lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{\pi}{2kR^{2k-1}}\left(1 - e^{-R^{2k}}\right) = 0$ pro $k > \frac{1}{2}$.

Dále potřebujeme znáti hodnotu integrálu $\int\limits_0^\infty e^{-x^{2k}} dx$. To je však velmi snadné, neboť substitucí $x^{2k} = y$ jej převedeme na Γ-funkci. $\left(dx = \dfrac{dy}{2kx^{2k-1}}\right)$.

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^{2k}}\, dx = \frac{1}{2k}\int\limits_0^\infty \frac{1}{y^{\frac{2k-1}{2k}}} e^{-y}\, dy = \frac{1}{2k}\int\limits_0^\infty y^{\frac{1}{2k}-1} e^{-y}\, dy.$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^{2k}}\, dx = \frac{1}{2k}\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right).$$

Vraťme se k relaci (2), která nyní vyhlíží takto:

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\overleftarrow{BO}} e^{-z^{2k}}\, dz = \frac{1}{2k}\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right).$$

Substitucí $z = \varrho\left(\cos\dfrac{\pi}{4k} + i\sin\dfrac{\pi}{4k}\right)$,

$$dz = \left(\cos\frac{\pi}{4k} + i\sin\frac{\pi}{4k}\right) d\varrho,$$

dostaneme:

$$\int\limits_0^\infty e^{-i\varrho^{2k}}\left(\cos\frac{\pi}{4k} + i\sin\frac{\pi}{4k}\right) d\varrho = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}{2k}$$

$$\int\limits_0^\infty (\cos\varrho^{2k} - i\sin\varrho^{2k})\, d\varrho = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}{2k}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4k} + i\sin\frac{\pi}{4k}} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}{2k}\left(\cos\frac{\pi}{4k} - i\sin\frac{\pi}{4k}\right).$$

Rozdělením na část reálnou a imaginární dospějeme ke konečnému výsledku:

$$\int_0^{\infty} \cos\varrho^{2k}\, d\varrho = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}{2k} \cos\frac{\pi}{4k}$$

$$\int_0^{\infty} \sin\varrho^{2k}\, d\varrho = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}{2k} \sin\frac{\pi}{4k}.$$

Tento výsledek je zdánlivě jiný než výsledek získaný prvou methodou. Čtenář si snadno sám odvodí identitu obou výsledků, použije-li známé vlastnosti Γ-funkce $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin\pi x}$ a elementárních vztahů mezi trigonometrickými funkcemi.

Tak jsme odvodili vzorce, platné pro každé reálné $k > \frac{1}{2}$. Bude nás ještě zajímat chování obou integrálů, když $k \to \infty$. Vyšetřme tedy limitu výrazů:

$$\int_0^{\infty} \cos\varrho^{2k}\, d\varrho \quad \text{a} \quad \int_0^{\infty} \sin\varrho^{2k}\, d\varrho,$$

když $k \to \infty$.

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{\infty} \cos\varrho^{2k}\, d\varrho = \lim_{k\to\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}{2k} \cos\frac{\pi}{4k}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}{2k} = 1, \quad \lim_{k\to\infty} \cos\frac{\pi}{4k} = 1$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{\infty} \cos\varrho^{2k}\, d\varrho = 1.$$

a podobným postupem pro sinus ($\lim\limits_{k\to\infty} \sin\dfrac{\pi}{4k} = 0$)

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{\infty} \sin\varrho^{2k}\, d\varrho = 0.$$

Z formulí, získaných pomocí zde popsané methody, plynou tyto vlastnosti zvláště zřetelně a jednoduše, kdežto ze vzorců získaných methodou prvou jmenovitě limitní výraz pro cosinus je složitější a nutno použíti L'Hospitalova pravidla.

Výsledky limitního přechodu nepřekvapují, uvědomí-li si čtenář vzhled funkcí za integračním znamením. Jejich grafické znázornění přenechávám rovněž čtenáři.

Intégrales de Fresnel généralisées. Nous convenons d'appeler intégrales de Fresnel généralisées les integrales du type $\int_0^\infty \cos x^{2k}\,dx$ et $\int_0^\infty \sin x^{2k}\,dx$; $(k > \frac{1}{2})$. On les calcules à l'aide du théorème de Cauchy sur les résidus et l'on trouve finalement:

$$\int_0^\infty \cos x^{2k}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}{2k}\cos\frac{\pi}{4k}$$

$$\int_0^\infty \sin x^{2k}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}{2k}\sin\frac{\pi}{4k}.$$

O JISTÉM VYJÁDŘENÍ PODMÍNEK, ABY OSM BODŮ KVARTIKY S TROJNÁSOBNÝM BODEM LEŽELO NA KUŽELOSEČCE.

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha.

Kvartika s obyčejným trojnásobným bodem v bodě $0_3(0, 0, 1)$ má rovnici

$$x_1x_2(x_1 - x_2)x_3 + u_4(x_1, x_2) = 0, \tag{1}$$

kde $u_4(x_1, x_2)$ je binární forma dimense 4 proměnných x_1, x_2 s nenulovými koeficienty u x_1^4 a x_2^4. Transformací

$$x_1 = x_1', \; x_2 = x_2', \; x_3 = \alpha_1x_1' + \alpha_2x_2' + \alpha_3x_3'$$

lze při vhodné volbě konstant α_1, α_2, α_3 uvésti (1) na tvar (místo x_1', x_2', x_3' píšeme zase x_1, x_2, x_3)

$$x_1x_2(x_1 - x_2)x_3 + Ax_1^4 + Bx_1^2x_2^2 + x_4^2 = 0, \; A \neq 0$$

čili

$$x_1x_2(x_1 - x_2)x_3 + (x_2^2 - \lambda x_1^2)(x_2^2 - \mu x_1^2) = 0, \tag{2}$$

kde λ, μ jsou konstanty splňující nerovnost

$$\lambda\mu \neq 0.$$

Položíme-li $x_2 = kx_1$, odvodíme z (2) snadno parametrické vyjádření uvažované kvartiky:

$$x_1 = k(k-1), \; x_2 = k^2(k-1), \; x_3 = (k^2 - \lambda)(k^2 - \mu). \tag{3}$$

Označme obvyklým způsobem základní symetrické funkce

$$s_1 = \Sigma k_1, \; s_2 = \Sigma k_1k_2, \ldots. \tag{4}$$

Dosadíme-li z (3) do rovnice přímky $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, dostaneme pro parametry k_1, k_2, k_3, k_4 jejích průsečíků s kvartikou vztahy (můžeme položit $a_3 = 1$)

$$s_1 = -a_2, \; s_2 = a_1 - a_2 - (\lambda + \mu), \; s_3 = a_1, \; s_4 = \lambda\mu,$$