v A_1, ale tím již všechny ostatní jsou určeny. Z různoběžnosti příslušných přímek plyne totiž, že

$$
\begin{aligned}
p_1^{A} p_1^{B'} &\parallel p_1^{A'} p_1^{B} = a_1 b_1 \\
p_1^{B} p_1^{C'} &\parallel p_1^{B'} p_1^{C} \parallel b_1 c_1 \\
p_1^{C} p_1^{A'} &\parallel p_1^{C'} p_1^{A} \parallel c_1 a_1 .
\end{aligned}
$$

Obrazec takto vzniklý vyhovuje svrchu vysloveným znakům hyperboloidické čtveřiny ABCD, i A′B′C′D′. Vytkneme-li ku př. trojinu BCD, a vedeme-li stopníky p_1^{B}, p_1^{C}, $p_1^{D} \equiv d_1$ paprsky rovnoběžné ku spojnicím $a_1 b_1$, $a_1 c_1$, $a_1 d_1$, protínají se tyto tři paprsky v jediném průsečíku $p_1^{A'}$; obdobně jest tomu při trojinách ostatních. Tím jeví se stvrzenou známá věta:

Výšky libovolného čtyrstěnu tvoří hyperboloidickou čtveřinu. Přímkami druhé soustavy, které na témž hyperboloidu jdou skrz vrcholy čtyrstěnu, jsou průsečnice výškových rovin ve trojhranech čtyrstěnu náležejících. (*Salmon* — *Fiedler*, Analytische Geometrie des Raumes, II. Aufl., I. Th. p. 142).

O stanovení elliptických drah těles nebeských.

Podává

dr. V. Láska,

docent české vysoké školy technické v Praze.

Jsou-li

x, y, z	souřadnice	heliocentrické,
ξ, η, ζ	„	geocentrické,
X, Y, Z	„	slunce,

bude, jak známo,

$$x = \xi - \mathrm{X}, \quad y = \eta - \mathrm{Y}, \quad z = \zeta - \mathrm{Z}.$$

Dejme tomu, že známe tři body heliocentrické a k nim příslušné geocentrické, a to

$$
\begin{array}{lll}
x_1\, y_1\, z_2\,, & x_2\, y_2\, z_2\,, & x_3\, y_3\, z_3 \\
\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1\,, & \xi_2\, \eta_2\, \zeta_2\,, & \xi_3\, \eta_3\, \zeta_3\,,
\end{array}
$$

pak jest v platnosti pro prvnější vztah:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

t. j. ony tři body leží v téže rovině.

Položíme-li symbolicky

$$\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} = (mn')$$

a rozložíme-li výše uvedený determinant dle prvkův jednotlivých sloupcův, obdržíme

$$\begin{aligned} x_1[y_2z_3] - x_2[y_1z_3] + x_3[y_1z_2] &= 0, \\ y_1[x_2z_3] - y_2[x_1z_3] + y_3[x_1z_2] &= 0, \\ z_1[x_2y_3] - z_2[x_1y_3] + z_3[x_1y_2] &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Z analytické geometrie známo, že platí rovnice

$$[y_2z_3] = (r_2r_3)\cos[yz],$$

kdež (r_2r_3) znamená plochu průvodiči r_2r_3 určenou.

Podobně lze i ostatní subdeterminanty vyjádřiti

$$\begin{aligned} [y_1z_3] &= (r_1r_3)\cos[yz] \\ [y_1z_2] &= (r_1r_2)\cos[yz]. \end{aligned}$$

Cosinusy úhlů jsou stejné, poněvadž leží r_1, r_2, r_3 v téže rovině.

Zavedeme-li tyto relace do rovnic (2) a zkrátíme-li cosinusy, obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{(r_2r_3)}{(r_1r_3)}x_1 + \frac{(r_1r_2)}{(r_1r_3)}x_3 &= x_2, \\ \frac{(r_2r_3)}{(r_1r_3)}y_1 + \frac{(r_1r_2)}{(r_1r_3)}y_3 &= y_2, \\ \frac{(r_2r_3)}{(r_1r_3)}z_1 + \frac{(r_1r_2)}{(r_1r_3)}z_3 &= z_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Zaveďme nyní polární souřadnice

$$x = r\cos l\cos b,\quad \xi = \varrho\cos\lambda\cos\beta,$$
$$y = r\sin l\cos b,\quad \eta = \varrho\sin\lambda\cos\beta,$$
$$z = r\sin b,\quad \zeta = \varrho\sin\beta,$$

$$X = R\cos L\cos B,$$
$$Y = R\sin L\cos B,$$
$$Z = R\sin B$$

a srovnejme výsledky dle geocentrických vzdáleností ϱ, pak obdržíme

$$\left\{\frac{(r_2r_3)}{(r_1r_3)}\cos\lambda_1\cos\beta_1\right\}\varrho_1 + \left\{\frac{(r_1r_2)}{(r_1r_3)}\cos\lambda_3\cos\beta_3\right\}\varrho_3 - \{\cos\lambda_2\cos\beta_2\}\varrho_2$$
$$= \frac{(r_2r_3)}{(r_1r_3)}R_1\cos L_1\cos B_1 + \frac{(r_1r_2)}{(r_1r_3)}R_3\cos L_3\cos B_3 - R_2\cos L_2\cos B_2$$
$$\left\{\frac{(r_2r_3)}{(r_1r_3)}\sin\lambda_1\cos\beta_1\right\}\varrho_1 + \left\{\frac{(r_1r_2)}{(r_1r_3)}\sin\lambda_3\cos\beta_3\right\}\varrho_3 - \{\sin\lambda_2\cos\beta_2\}\varrho_2$$
$$= \frac{(r_2r_3)}{(r_1r_3)}R_1\sin L_1\cos B_1 + \frac{(r_1r_2)}{(r_1r_3)}R_3\sin L_3\cos B_3 - R_2\sin L_2\cos B_2$$
$$\left\{\frac{(r_2r_3)}{(r_1r_3)}\sin\beta_1\right\}\varrho_1 + \left\{\frac{(r_1r_2)}{(r_1r_3)}\sin\beta_3\right\}\varrho_3 - \sin\beta_2\varrho_2 = \frac{(r_2r_3)}{(r_1r_3)}R_1\sin B_1$$
$$= \frac{(r_1r_2)}{(r_1r_3)}R_3\sin B_3 - R_2\sin B_2,$$

kteréžto rovnice psáti budeme

$$\begin{aligned} A_1\varrho_1 + B_1\varrho_2 + C_1\varrho_3 &= D_1,\\ A_2\varrho_1 + B_2\varrho_2 + C_2\varrho_3 &= D_2,\\ A_3\varrho_1 + B_3\varrho_2 + C_3\varrho_3 &= D_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Z těchto rovnic lze vypočítati ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3. Položme

$$\begin{aligned} K = {} & \sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3\sin(\lambda_3-\lambda_2)\\ & - \cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3\sin(\lambda_3-\lambda_1)\\ & + \cos\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3\sin(\lambda_2-\lambda_1), \end{aligned}$$

dále symbolicky

$$(L) = \sin\beta_2\cos\beta_3\sin(\lambda_3-L) - \sin\beta_3\cos\beta_2\sin(\lambda_2-L),$$
$$(L)' = \sin\beta_1\cos\beta_3\sin(\lambda_3-L) - \sin\beta_3\cos\beta_1\sin(\lambda_1-L),$$
$$(L)'' = \sin\beta_1\cos\beta_2\sin(\lambda_2-L) - \cos\beta_1\sin\beta_2\sin(\lambda_1-L)$$

a konečně

$$\begin{array}{lll} A' = R_1(L_1) & B' = -R_2(L_2) & C' = R_3(L_3), \\ A'' = R_1(L_1)' & B'' = -R_2(L_2)' & C' = R_3(L_3)', \\ A''' = R_1(L_1)'' & B'' = -R_3(L_2)'' & C'' = R_3(L_3)'', \end{array}$$

při čemž jsme zároveň pro zjednodušení výpočtu osy souřadnic volili tak, že

$$\begin{aligned} X &= R \cos L, \\ Y &= R \sin L, \\ Z &= 0. \end{aligned}$$

Řešení rovnic (4) dle $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ podává

$$\begin{aligned} K\varrho_1 &= A' + B' \frac{(r_1 r_3)}{(r_2 r_3)} + C' \frac{(r_1 r_2)}{(r_2 r_3)}, \\ K\varrho_2 &= A'' \frac{(r_2 r_3)}{(r_1 r_3)} + B'' + C'' \frac{(r_1 r_2)}{(r_1 r_3)}, \\ K\varrho_3 &= A''' \frac{(r_2 r_3)}{(r_1 r_2)} + B''' \frac{(r_1 r_3)}{(r_1 r_2)} + C'''. \end{aligned} \tag{5}$$

Zdvojmocněním a sečtením souřadnic polárních obdržíme pak tyto rovnice

$$\begin{aligned} r_1^2 &= R_1^2 - 2R_1\varrho_1 \cos\beta_1 \cos(L_1 - \lambda_1) + \varrho_1^2, \\ r_2^2 &= R_2^2 - 2R_2\varrho_2 \cos\beta_2 \cos(L_2 - \lambda_2) + \varrho_2^2, \\ r_3^2 &= R_3^2 - 2R_3\varrho_3 \cos\beta_3 \cos(L_3 - \lambda_3) + \varrho_3^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Jde nyní o to, abychom si zjednali poměry oněch trojúhelníků $(r_1 r_2)$, $(r_1 r_3)$, $(r_2 r_3)$.

Dejme tomu, že bychom měli dráhu *kruhovou* a že úhel, který oběžnice během pozorování proběhla, jest *velmi malý*. Značíme-li jej písmenem v a příslušným indexem, bude

$$(r_1 r_2) = \frac{1}{2} r^2 \sin v_{12}.$$

Dle třetího zákona Keplerova jest ale střední rychlost

$$\mu = \frac{k}{r^{3/2}}$$

a tudiž

$$v_{12} = \frac{k}{r^{3/_2}}(t_2 - t_1);$$

je-li v_{12} malé, jak svrchu předpokládáno, pak bude

$$\sin v_{12} = v_{12} - \frac{1}{6} v_{12}^3 + \ldots$$

tedy

$$\frac{(r_1 r_2)}{(r_1 r_3)} = \frac{v_{12}}{v_{13}} \frac{1 - \frac{1}{6} v_{12}^2 + \ldots}{1 - \frac{1}{6} v_{13}^2 + \ldots}$$

aneb

$$\frac{(r_1 r_2)}{(r_1 r_3)} = \frac{v_{12}}{v_{13}} \left\{1 - \frac{1}{6}(v_{12}^2 - v_{13}^2) + \ldots\right\},$$

čili

$$\frac{(r_1 r_2)}{(r_1 r_3)} = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} \left\{1 - \frac{1}{6} \frac{k^2}{r_2^3} \left[(t_2 - t_1)^2 - (t_3 - t_1)^2\right] + \ldots\right\} \quad (7)$$

Vložením poslední rovnice do druhé ze soustavy (5) získáme snadno rovnici tvaru

$$\varrho_2 = \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{r_2^3}, \quad (8)$$

kteráž ve spojení s výše odvozenou rovnicí

$$r_2^2 = \mathrm{R}_2^2 - 2\mathrm{R}_2 \varrho_2 \cos \beta_2 \cos(\mathrm{L}_2 - \lambda_2) + \varrho_2^2 \quad (9)$$

dovoluje vypočtení hodnot r_2 a ϱ_2.

Vyloučíme-li z obou rovnic ϱ_2, obdržíme

$$r_2^8 = \mathrm{M} r_2^6 + \mathrm{N} r_2^3 + \mathrm{P}, \quad (10)$$

z které vypočteme r_2.

Gauss podal řešení jiné.

Označme v trojúhelníku Slunce, Těleso, Země, úhel u tělesa písmenem z a úhel u Země písmenou ψ, pak máme

$$\varrho_2 = \frac{\mathrm{R}_2 \sin(\psi_2 + z_2)}{\sin z_2}, \quad (11)$$

$$r_2 = \frac{R_2 \sin \psi_2}{\sin z_2} . \tag{12}$$

Rovnice (8) přejde v tvar

$$R_2 \sin \psi_2 \cos z_2 + (R_2 \cos \psi_2 - A) \sin z_2 = \frac{B}{R_2^3 \sin^3 \psi_2} \sin^4 z_2 .$$

Položíme-li dále

$$q \sin Q = R_2 \sin \psi_2 ,$$

$$q \cos Q = R_2 \cos \psi_2 - A ,$$

$$S = \frac{B}{q R_2^3 \sin^3 \psi_2} ,$$

bude

$$S \sin^4 z = \sin (z + Q) . \tag{13}$$

Co se týče poměrů

$$\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) \text{ a } \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_3}\right) ,$$

tu dostačí položiti v rovnicích (5)

$$\frac{(r_1 r_3)}{(r_2 r_1)} = \frac{\Theta_2}{\Theta_3} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1} ,$$

$$\frac{(r_1 r_2)}{(r_3 r_2)} = \frac{\Theta_3}{\Theta_1} = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2} .$$

Malá veličina K dělením odpadne, čímž obdržíme dosti přibližné hodnoty.

Pomocí *Gibbsových relací* obdržíme přesnějších hodnot $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$. Položíme-li

$$\mu_1 = \frac{1}{12} \{\Theta_1 \Theta_3 + \Theta_2 (\Theta_3 - \Theta_1)\},$$

$$\mu_2 = \frac{1}{12} \{\Theta_1 \Theta_3 + \Theta_2^2\},$$

$$\mu_3 = \frac{1}{12} \{\Theta_1 \Theta_3 - \Theta_2 (\Theta_3 - \Theta_1)\} ,$$

pak bude dosti přesně

$$\left.\begin{aligned}\frac{(r_3 r_2)}{(r_3 r_1)} &= \frac{\Theta_1}{\Theta_2}\,\frac{1+\frac{\mu_1}{r_1^3}}{1-\frac{\mu_2}{r_2^3}}\,,\\ \frac{(r_2 r_1)}{(r_3 r_1)} &= \frac{\Theta_3}{\Theta_2}\,\frac{1+\frac{\mu_3}{r_3^3}}{1-\frac{\mu_2}{r_2^3}}\,.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

O grafickém řešení rovnic.

Podává

dr. V. Láska v Praze.

Buďtež dány rovnice

$$a_1 x + b_1 y = c_1,$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2\,.$$

Násobme je jednotkami

$$i_1 = +1 \qquad i_2 = \sqrt{-1}$$

a sečtěme; pak bude

$$\mathrm{A} = a_1 i_1 + a_2 i_2\,,$$
$$\mathrm{B} = b_1 i_1 + b_2 i_2\,,$$
$$\gamma = c_1 i_1 + c_2 i_2$$

a dále

$$\mathrm{A}x = \alpha\,,$$
$$\mathrm{B}y = \beta\,,$$

při čemž jest zároveň

$$\alpha + \beta = \gamma\,.$$

Jsou však α, β, γ stejně jako A a B v geometrickém znázornění přímky, pro jichž sečítání platí princip uzavřených polygonův.