Eduard Weyr

O homogenních souřadnicích a invariantech v theorii kuželoseček. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 1, 1--25

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123866`

O homogenních souřadnicích a invariantech v theorii kuželoseček.

Napsal

Eduard Weyr.

Byl to hlavně *Hesse*, jenž zavedl t. z. homogenní souřadnice, užívaje jich s úspěchem v theorii čar a ploch druhého a třetího stupně. Zkoumání projektivných vlastností za pomoci těchto souřadnic vedlo pak přirozeně k theorii invariantův, zahájenou pracemi *Cayleye* a *Sylvestera*, která obohatila jak algebru tak geometrii.

V následujících řádcích podáme úvod do vzpomenutých úvah, pokud se vztahují k theorii kuželoseček, přihlížejíce specialně k *Salmon-Fiedlerově* „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" a k „Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen" od téhož autora a překladatele. V příčině literatury budiž poukázáno k velice úplným literárním poznámkám obsaženým v těchto dvou dílech, mimo to pak ke *Clebsch-Lindemann-ovým* „Vorlesungen über Geometrie," v nichž v I. díle na str. 291. dle *Gordana* podán t. z. úplný system dvou ternarných kvadratických forem. V následující úvaze vyvinuty elementarnými prostředky úplně jich invarianty, kovarianty a kontravarianty; o t. z. smíšených konkomitantech učiněna jen stručná zmínka.

Algebraickou *formou* nazýváme racionalnou celistvou a homogenní funkci dvou nebo více proměnných; jsou-li dvě proměnné, sluje forma *binarnou*, jsou-li tři, *ternarnou*, atd. V této elementarné úvaze přihlédneme k třem proměnným, jež si vyložíme jakožto homogenní souřadnice bodu nebo přímky v rovině.

1. *Trimetrické souřadnice bodové.*

Dán-li poměr vzdáleností bodu ode dvou přímek, jest bod na jisté přímce, procházející společným bodem daných přímek;

dány-li poměry vzdáleností bodu od tří přímek, neprocházejících jedním bodem, jest bod stanoven jakožto společný bod tří přímek. Jsou-li totiž

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0$$

normalní rovnice daných tří přímek a r_1, r_2, r_3 čísla úměrná oněm třem vzdálenostem, pojímaným algebraicky známým způsobem, jest bod na přímkách

$$\frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} = 0, \quad \frac{A_2}{r_2} - \frac{A_3}{r_3} = 0, \quad \frac{A_3}{r_3} - \frac{A_1}{r_1} = 0,$$

patrně jedním bodem procházejících.

Dány-li obecněji tři čísla x_1, x_2, x_3, *jež se mají k sobě jako určité násobky* k_1A_1, k_2A_2, k_3A_3 *vzdáleností bodu od oněch tří pevných základních přímek, jest tím bod úplně stanoven*; neboť pak se ony vzdálenosti k sobě mají jako

$$\frac{x_1}{k_1} : \frac{x_2}{k_2} : \frac{x_3}{k_3}.$$

Čísla x_1, x_2, x_3 *slují trimetrické souřadnice bodu;* jsou tedy definovány rovnicemi

$$\varrho x_1 = k_1A_1, \quad \varrho x_2 = k_2A_2, \quad \varrho x_3 = k_3A_3,$$

v nichž ϱ značí hodnotu zcela libovolnou a kde v normalných výrazech

$$A_\nu = x\cos\alpha_\nu + y\sin\alpha_\nu - p_\nu, \quad (\nu = 1,\ 2,\ 3),$$

x, y jsou pravoúhlé souřadnice bodu x_1, x_2, x_3 čili x.

Bod ten, hově rovnicím

$$\frac{k_1A_1}{x_1} = \frac{k_2A_2}{x_2} = \frac{k_3A_3}{x_3},$$

jest v nekonečnu, jsou-li přímky

$$\lambda_1A_1 - \lambda_2A_2 = 0, \quad \lambda_1A_1 - \lambda_3A_3 = 0$$

rovnoběžné, při čemž klademe na okamžik λ_ν za $\frac{k_\nu}{x_\nu}$; rovnoběžnost vyžaduje, aby

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 \cos\alpha_1 - \lambda_2 \cos\alpha_2, & \lambda_1 \cos\alpha_1 - \lambda_3 \cos\alpha_3 \\ \lambda_1 \sin\alpha_1 - \lambda_2 \sin\alpha_2, & \lambda_1 \sin\alpha_1 - \lambda_3 \sin\alpha_3 \end{vmatrix} = 0$$

č., jakož rozkladem na čtyry determinanty snadno plyne,

$$\begin{vmatrix} \lambda_2\lambda_3, & \lambda_3\lambda_1, & \lambda_1\lambda_2 \\ \cos\alpha_1, & \cos\alpha_2, & \cos\alpha_3 \\ \sin\alpha_1, & \sin\alpha_2, & \sin\alpha_3 \end{vmatrix} = 0,$$

čili, násobíc součinem $x_1\ x_2\ x_3$ a dělíc $k_1\ k_2\ k_3$,

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{k_1}, & \frac{x_2}{k_2}, & \frac{x_3}{k_3} \\ \cos\alpha_1, & \cos\alpha_2, & \cos\alpha_3 \\ \sin\alpha_1, & \sin\alpha_2, & \sin\alpha_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Linearná tato relace mezi souřadnicemi charakterisuje body v nekonečnu (rovnice přímky nekonečně vzdálené).

2. Pro další úvahy jest nutno vyjádřiti naopak pravoúhlé souřadnice x, y souřadnicemi trimetrickými definovanými rovnicemi

$$x \cos\alpha_\nu + y \sin\alpha_\nu - p_\nu = \varrho \frac{x_\nu}{k_\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

což se ovšem stane řešením dle x, y, ϱ, kteréž podává

$$x = \frac{\left| p_\nu,\ \sin\alpha_\nu, \frac{x_\nu}{k_\nu} \right|}{\left| \cos\alpha_\nu, \sin\alpha_\nu, \frac{x_\nu}{k_\nu} \right|},$$

$$y = \frac{\left| \cos\alpha_\nu,\ p_\nu, \frac{x_\nu}{k_\nu} \right|}{\left| \cos\alpha_\nu, \sin\alpha_\nu, \frac{x_\nu}{k_\nu} \right|},$$

při čemž naznačeny determinanty stručnějším, však průhledným spůsobem. Jeví se tedy x a y jakožto podíly homogenních linearných funkcí souřadnic trimetrických o témž jmenovateli; a jest pozoruhodno, že lze každé dvě rovnice tvaru

$$x = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3}{C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3},$$

$$y = \frac{B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3}{C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3},$$

tímto spůsobem interpretovati, t. j., že lze pojímati x_1, x_2, x_3 jakožto hodnoty úměrné určitým násobkům vzdálenosti bodu x, y od tří pevných přímek; při tom ovšem nutno předpokládati, že determinant z koefficientů $\Sigma \pm (A_1B_2C_3)$ nemizí.

Předpokládejme na okamžik, že výrok jest správný; položíme-li pak $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, máme pro souřadnice x, y prvního vrcholu základného trojúhelníku hodnoty $\frac{A_1}{C_1}$, $\frac{B_1}{C_1}$. Zvolme tedy body $\left(\frac{A_1}{C_1}, \frac{B_1}{C_1}\right)$, $\left(\frac{A_2}{C_2}, \frac{B_2}{C_2}\right)$, $\left(\frac{A_3}{C_3}, \frac{B_3}{C_3}\right)$ za vrcholy základného trojúhelníku, což arci supponuje, že nejsou na přímce, t. j. že determinant $\Sigma \pm (A_1B_2C_3)$ nemizí. Označíme-li nyní literami X_1, X_2, X_3 tři hodnoty úměrné vzdálenostem bodu x, y od stran tohoto trojúhelníku, máme

$$x = \frac{\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \alpha_3X_3}{\gamma_1X_1 + \gamma_2X_2 + \gamma_3X_3},$$

$$y = \frac{\beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \beta_3X_3}{\gamma_1X_1 + \gamma_2X_2 + \gamma_3X_3},$$

a zároveň — přihlédneme-li k vrcholům — máme

$$\frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu} = \frac{A_\nu}{C_\nu}, \quad \frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu} = \frac{B_\nu}{C_\nu},$$

t. j.

$$\alpha_\nu : \beta_\nu : \gamma_\nu = A_\nu : B_\nu : C_\nu,$$

takže

$$\alpha_1 = \lambda A_1, \quad \beta_1 = \lambda B_1, \quad \gamma_1 = \lambda C_1,$$
$$\alpha_2 = \mu A_2, \quad \beta_2 = \mu B_2, \quad \gamma_2 = \mu C_2,$$
$$\alpha_3 = \nu A_3, \quad \beta_3 = \nu B_3, \quad \gamma_3 = \nu C_3.$$

Učiníme-li nyní

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda X_1 : \mu X_2 : \nu X_3,$$

přejdou poslední dvě formule po x, y na předposlední, a tvrzení jest dokázáno; zároveň nalezen základní trojúhelník, jakož i číselné faktory, vcházející do definice trimetrickýeh souřadnic.

3. *Trimetrické souřadnice přímkové.*

Rovnice přímky

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$$

přejde zavedením trimetrických souřadnic na

$$\mathrm{A}\,(\mathrm{A}_1 x_1 + \mathrm{A}_2 x_2 + \mathrm{A}_3 x_3) + \mathrm{B}\,(\mathrm{B}_1 x_1 + \mathrm{B}_2 x_2 + \mathrm{B}_3 x_3) \\ + \mathrm{C}\,(\mathrm{C}_1 x_1 + \mathrm{C}_2 x_2 + \mathrm{C}_3 x_3) = 0,$$

t. j. na homogenní linearnou rovnici

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0;$$

a naopak každá taková rovnice repraesentuje přímku, jelikož ji lze psáti

$$\xi_1 k_1 \mathrm{A}_1 + \xi_2 k_2 \mathrm{A}_2 + \xi_3 k_3 \mathrm{A}_3 = 0.$$

Hodnoty ξ_1, ξ_2, ξ_3, — na jichž poměrech jen sejde — *zoveme trimetrickými souřadnicemi přímky; mají ten geometrický význam, že jsou úměrny určitým násobkům vzdáleností této přímky od vrcholů základního trojúhelníku.*

Normalný tvar rovnice přímky ξ jest

$$\frac{\xi_1 k_1 \mathrm{A}_1 + \xi_2 k_2 \mathrm{A}_2 + \xi_3 k_3 \mathrm{A}_3}{\sqrt{(\xi_1 k_1 \cos\alpha_1 + \xi_2 k_2 \cos\alpha_2 + \xi_3 k_3 \cos\alpha_3)^2 + (\xi_1 k_1 \sin\alpha_1 + \xi_2 k_2 \sin\alpha_2 + \xi_3 k_3 \sin\alpha_3)^2}} = 0,$$

kde odmocnina vzata s náležitým znamením. Vzdálenost základního bodu

$$x_2 = 0,\ x_3 = 0,$$

t. j.

$$\mathrm{A}_2 = 0,\quad \mathrm{A}_3 = 0$$

od ní jest tedy

$$v_1 = \frac{\xi_1 k_1 h_1}{\mathrm{V}},$$

značí-li V onu odmocninu a h_1 vzdálenost onoho základního bodu od strany $\mathrm{A}_3 = 0$, t. j. první výšku základního trojúhelníku, ovšem algebraicky pojatou. Obdobně jsou

$$v_1 = \frac{\xi_2 k_2 h_2}{V}, \qquad v_3 = \frac{\xi_3 k_3 h_3}{V}$$

vzdálenosti základních vrcholů 0, x_2, 0, resp. 0, 0, x_3 od přímky ξ.

Tedy

$$v_1 : v_2 : v_3 = \xi_1 h_1 k_1 : \xi_2 h_2 k_2 : \xi_3 h_3 k_3,$$

a lze tudíž položiti

$$\xi_\nu h_\nu k_\nu = \sigma v_\nu,$$

kde σ jest libovolný faktor; tím

$$\xi_1 = \sigma \frac{v_1}{h_1 k_1}, \quad \xi_2 = \sigma \frac{v_2}{h_2 k_2}, \quad \xi_3 = \sigma \frac{v_3}{h_3 k_3},$$

a geometrický význam hodnot ξ nalezen.

Obyčejné přímkové souřadnice u, v — záporně vzaté reciproké hodnoty úseků, stanovených přímkou na pravoúhlých osách souřadných — souvisí s homogenními souřadnicemi ξ_1, ξ_2, ξ_3 analogicky jako souvisely pravoúhlé souřadnice x, y s homogenními x_1, x_2, x_3. Skutečně lze rovnici

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

psáti

$$\Sigma\, \xi_\nu k_\nu (x \cos \alpha_\nu + y \sin \alpha_\nu - p_\nu) = 0,$$

z čehož patrno, že souřadnice u, v této přímky jsou

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} u &= \frac{\xi_1 k_1 \cos \alpha_1 + \xi_2 k_2 \cos \alpha_2 + \xi_3 k_3 \cos \alpha_3}{-(\xi_1 k_1 p_1 + \xi_2 k_2 p_2 + \xi_3 k_3 p_3)}, \\ v &= \frac{\xi_1 k_1 \sin \alpha_1 + \xi_2 k_2 \sin \alpha_4 + \xi_3 k_3 \sin \alpha_3}{-(\xi_1 k_1 p_1 + \xi_2 k_2 p_2 + \xi_3 k_3 p_3)}, \end{aligned}$$

tedy opět podíly homogenních linearných funkcí souřadnic ξ, o témž jmenovateli. A zase platí, že lze každé dvě rovnice

$$u = \frac{A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3}{C_1 \xi_1 + C_2 \xi_2 + C_3 \xi_3},$$

$$v = \frac{B_1 \xi_1 + B_2 \xi_2 + B_3 \xi_3}{C_1 \xi_1 + C_2 \xi_2 + C_3 \xi_3},$$

tímto způsobem interpretovati, t. j. pojímati ξ_1, ξ_2, ξ_3 za trimetrické souřadnice přímky u, v, arci za supposice, že determinant $\Sigma \pm (A_1 B_2 C_3)$ nemizí.

Abychom to ukázali, připomeňme, že hodnotám $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ přísluší hodnoty $u = \frac{A_1}{C_1}$, $v = \frac{B_1}{C_1}$ a že tedy, je-li výrok správný, dlužno přímky $\left(\frac{A_1}{C_1}, \frac{B_1}{C_1}\right)$, $\left(\frac{A_2}{C_2}, \frac{B_2}{C_2}\right)$, $\left(\frac{A_3}{C_3}, \frac{B_3}{C_3}\right)$ bráti za strany základního trojúhelníku; to ovšem supponuje, že neprocházejí jedním bodem, t. j. že $\Sigma \pm (A_1 B_2 C_3) \gtrless o$.

Označíme-li pak Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3, tři hodnoty úměrné vzdálenostem vrcholů základního trojúhelníku od libovolné přímky u, v, tu především máme

$$h_1 k_1 = h_2 k_2 = h_3 k_3 = 1,$$

čímž se jeví stálé k_1, k_2, k_3 jakožto reciproké hodnoty výšek onoho trojúhelníku, a dále pro u, v rovnice (1), píšeme-li v nich Ξ na místo ξ, což přehledněji napišme ve tvaru

$$u = \frac{\alpha_1 \Xi_1 + \alpha_2 \Xi_2 + \alpha_3 \Xi_3}{\gamma_1 \Xi_1 + \gamma_2 \Xi_2 + \gamma_3 \Xi_3},$$

$$v = \frac{\beta_1 \Xi_1 + \beta_2 \Xi_2 + \beta_3 \Xi_3}{\gamma_1 \Xi_1 + \gamma_2 \Xi_2 + \gamma_3 \Xi_3}.$$

Souřadnice základních přímek podávají ihned úměry

$$\alpha_\nu : \beta_\nu \gamma_\nu = A_\nu : B_\nu : C_\nu,$$

takže definujeme-li nové souřadnice ξ proporcí

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \lambda \Xi_1 : \mu \Xi_2 : \nu \Xi_3,$$

kde λ, μ, ν mají týž význam jako v předešlém článku, přejdou poslední dvě rovnice pro u a v na rovnice předposlední, čímž výrok dokázán. Zároveň patrno, že nyní lze položiti

$$\lambda = \frac{1}{h_1 k_1}, \quad \mu = \frac{1}{h_2 k_2}, \quad \nu = \frac{1}{h_3 k_3},$$

čímž nalezeny stálé k_1, k_2, k_3, vcházející do definice trimetrických bodových souřadnic, jimž přísluší přímkové souřadnice ξ_1, ξ_2, ξ_3 právě definované.

4. *Řada bodová, svazek paprskový.*

Hoví-li trimetrické souřadnice bodu x a přímky ξ rovnic

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,$$

tu bod x je na přímce ξ a přímka ξ prochází bodem x: Pokládáme-li hodnoty ξ_1, ξ_2, ξ_3 za dané, hoví této rovnici souřadnice x všech bodů přímky ξ : jest to rovnice přímky ξ. Pokládáme-li však hodnoty x_1, x_2, x_3 za dané, hoví této rovnici souřadnice ξ všech přímek procházejících bodem x : jest to pak rovnice bodu x.

Dvěma body x' a x'' jest stanovena přímá řada bodová; ***$x' + \lambda x''$ jest libovolný bod této řady, a λ jest úměrno dělícímu poměru jeho, vzhledem k bodům x' a x'' stanovenému.*** Souřadnice všech tří bodů patrně hoví linearné rovnici

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_2 \\ x'_1, & x'_2, & x'_2 \\ x''_1, & x''_2, & x''_3 \end{vmatrix} = 0,$$

a jsou tudíž tyto tři body na přímce. Označíme-li jich pravoúhlé souřadnice (x', y'), (x'', y''), (x, y), máme relace tvaru

$$x' = \frac{A_1 x'_1 + A_2 x'_2 + A_3 x'_3}{C_1 x'_1 + C_2 x'_2 + C_3 x'_3},$$

$$x'' = \frac{A_1 x''_1 + A_2 x''_2 + A_3 x''_3}{C_1 x''_1 + C_2 x''_2 + C_3 x''_3},$$

$$x = \frac{\Sigma A_\nu (x'_\nu + \lambda x''_\nu)}{\Sigma C_\nu (x'_\nu + \lambda x''_\nu)} = \frac{\Sigma A_\nu x'_\nu + \lambda \Sigma A_\nu x''_\nu}{\Sigma C_\nu x'_\nu + \lambda \Sigma C_\nu x''_\nu}$$

a tedy, dělíme-li čítatel i jmenovatel součtem $\Sigma C_\nu x'_\nu$,

$$x = \frac{x' + x'' \dfrac{\lambda \Sigma C_\nu x''_\nu}{\Sigma C_\nu x'_\nu}}{1 + \dfrac{\lambda \Sigma C_\nu x''_\nu}{\Sigma C_\nu x'_\nu}},$$

z čehož patrno, že zmíněný dělící poměr jest

$$-\lambda \frac{C_1 x_1'' + C_2 x_2'' + C_3 y_3''}{C_1 x_1' + C_2 x_2' + C_3 x_3'}.$$

Jest tedy dvojpoměr bodů x', x'', $x' + \lambda x''$, $x' + \mu x''$ dán zlomkem $\frac{\lambda}{\mu}$; obecněji dvojpoměr bodů $x' + \lambda x''$, $x' + \mu x''$, $x' + \nu x''$, $x' + \varrho x''$ jest $\frac{\nu - \lambda}{\nu - \mu} : \frac{\varrho - \lambda}{\varrho - \mu}$.

Reciprokým způsobem lze říci, že přímky ξ', ξ'', $\xi' + \lambda\xi''$ procházejí jedním bodem, a že λ jest hodnota úměrná dělícímu poměru třetí přímky vzhledem k prvním dvěma, jakož přímo patrno z rovnice oné přímky

$$\Sigma (\xi_\nu' + \lambda \xi_\nu'') x_\nu = 0 \text{ t. j. } \Sigma \xi_\nu' x_\nu + \lambda \Sigma \xi_\nu'' x_\nu = 0;$$

dvojpoměr přímek $\xi' + \lambda\xi''$, $\xi' + \mu\xi''$, $\xi' + \nu\xi''$, $\xi' + \varrho\xi''$ jest opět dán dřívějším výrazem.

Řada bodů $x' + \lambda x''$ jest tedy s řadou $\bar{x}' + \mu \bar{x}''$, aneb též se svazkem paprsků $\xi' + \mu\xi''$ projektivná, jsou-li λ a μ sdružených elementů vázány obapolně linearnou relací

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0; \tag{2}$$

specialně jest řada bodů $x' + \lambda x''$ s řadou $\bar{x}' + \lambda \bar{x}''$ projektivná a sice jsou x' a $\bar{x}'$, x'' a $\bar{x}''$ sdružené elementy.

Chceme-li sdružené elementy vyjádřiti jich rovnicemi, na př. paprsky dvou projektivných svazkův, označme literami P, Q, R, S linearné homogenní funkce souřadnic x a pišme

$$P + \lambda Q = 0, \quad R + \mu S = 0$$

jakožto rovnice sdružených paprskův, arci za supposice relace (2); a rovnice ty jsou rovnicemi sdružených bodů dvou projektovaných řad, máme-li proměnné za souřadnice přímkové.

5. *Dvojí geometrický význam linearné transformace trimetrických souřadnic.*

Jsou-li x_1, x_2, x_3 trimetrické souřadnice bodu x, y, máme

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
x &= \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3}{C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3},\\
y &= \frac{B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3}{C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3}.
\end{aligned}
$$

Applikujeme-li na x_1, x_2, x_3 linearnou transformaci, t. j. zavedeme-li místo x_1, x_2, x_3 tři nové proměnné x'_1, x'_2, x'_3 rovnicemi

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2 + t_{13}x'_3,\\
x_2 &= t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2 + t_{23}x'_3,\\
x_3 &= t_{31}x'_1 + t_{32}x'_2 + t_{33}x'_3,
\end{aligned}
$$

nutno především předpokládati, že determinant z koeficientů t_{hk} čili modul substituce

$$
T = \begin{vmatrix} t_{11}, & t_{12}, & t_{13} \\ t_{21}, & t_{22}, & t_{23} \\ t_{31}, & t_{32}, & t_{33} \end{vmatrix}
$$

jest různý od nully, sice by proměnné x_1, x_2, x_3 nemohly nabýti libovolných hodnot. Násobíme-li totiž rovnice (4) resp. minory příslušnými elementům některého sloupce determinantu T, obdržíme jich sečtením při $T = 0$ na pravé straně nullu a tedy linearnou relaci mezi x_1, x_2, x_3; je-li však $T \gtrless 0$, přísluší libovolným třem hodnotám x_1, x_2, x_3 vždy určité tři hodnoty x'_1, x'_2, x'_3 a naopak.

Substitucí (4) přejdou rovnice (3) na rovnice tvaru

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{A'_1x'_1 + A'_2x'_2 + A'_3x'_3}{C'_1x'_1 + C'_2x'_2 + C'_3x'_3},\\
y &= \frac{B'_1x'_1 + B'_2x'_2 + B'_3x'_3}{C'_1x'_1 + C'_2x'_2 + C'_3x'_3},
\end{aligned}
$$

a patrně tu determinant

$$
\begin{vmatrix} A'_1, & A'_2, & A'_3 \\ B'_1, & B'_2, & B'_3 \\ C'_1, & C'_2, & C'_3 \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \\ C_1, & C_2, & C_3 \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} t_{11}, & t_{12}, & t_{13} \\ t_{21}, & t_{22}, & t_{23} \\ t_{31}, & t_{32}, & t_{33} \end{vmatrix}
$$

jest různý od nully. Lze tedy hodnoty x'_1, x'_2, x_3 pojímati jakožto trimetrické souřadnice téhož bodu x, y čili x_1, x_2, x_3, ovšem stanovené vzhledem k jiným základním přímkám a s jinými faktory k_1, k_2, k_3; z toho patrno, že *linearná substituce jest výrazem transformace souřadnic k jiným základním elementům.*

Totéž platí do slova o linearné transformaci souřadnic přímkových ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Koeficienty substituční jsou při těchto dvou transformacích v jednoduchém vztahu; přímka ξ má totiž rovnici

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,$$

t. j.

$$\begin{aligned} \xi_1 (t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2 + t_{13}x'_3) + \xi_2 (t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2 + t_{23}x'_3) \\ + \xi_3 (t_{31}x'_1 + t_{32}x'_2 + t_{33}x'_3) = 0, \end{aligned}$$

a máme tedy pro její nové souřadnice ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 rovnice

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= t_{11}\xi_1 + t_{21}\xi_2 + t_{31}\xi_3, \\ \xi'_2 &= t_{12}\xi_1 + t_{22}\xi_2 + t_{32}\xi_3, \\ \xi'_3 &= t_{13}\xi_1 + t_{23}\xi_2 + t_{33}\xi_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Substituci tu nazýváme vzhledem k substituci (4) *transponovanou*, a proměnné ξ touto substitucí transformované se zovou *kontragredientními* s proměnnými x.

Při transponované substituci se shodují řádky se sloupci původní substituce, vyjadřují-li se ovšem nové proměnné starými.

Druhý výklad linearné substituce (4) jest ten, že pojímáme x a x' za souřadnice sdružených bodů dvou rovnin, stanovené vzhledem k libovolně vytčeným základním trojúhelníkům. Roviny tak souvisící se zovou *kollinearnými*; dle předchozího článku jest patrno, že v nich přímé řadě a svazku přísluší opět přímá řada resp. svazek s oněmi projektivný, neboť přísluší-li rovnicemi (4) hodnotám x_ν hodnoty x'_ν, hodnotám $\overline{x}_\nu$ hodnoty $\overline{x}'_\nu$, tu týmiž rovnicemi přísluší hodnotám $x_\nu + \lambda\overline{x}_\nu$ hodnoty $x'_\nu + \lambda\overline{x}'_\nu$, a podobně pro rovnice (5). *Linearnou transformaci lze pojímati jakožto počtářský výraz kollineace dvou rovinných soustav.*

6. *Čáry druhého stupně a druhé třídy.*

Čára, jejíž rovnice v pravoúhlých souřadnicích má tvar

$$f(x, y) = 0,$$

kde f značí racionalnou celistvou funkci n-ho stupně proměnných x, y, sluje algebraickou čarou n-ho stupně, kdežto čára, jejíž tečny mají souřadnice u, v, hovící obdobné rovnici, sluje algebraickou čarou n-té třídy. Čáru prvnější protíná každá přímka obecně v n bodech, k čáře poslednější prochází libovolným bodem n tečen, jakož ihned vychází, řešíme-li rovnici čáry a rovnici přímky resp. bodu dle neznámých x, y resp. u, v.

Nahradíme-li x, y jich výrazy v homogenních souřadnicích x_1, x_2, x_3 (v. čl. 2.) a odstraníme-li jmenovatele, nabývá rovnice čáry n-ho stupně tvaru

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{6}$$

kde f značí racionalnou celistvou a homogenní funkci n-ho stupně proměnných x_1, x_2, x_3; a obdobně zní rovnice čáry n-té třídy v souřadnicích přímkových.

Je-li

$$\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 = 0$$

rovnice tečny čáry (6) v bodu x, musí jí býti vyhověno, nahradíme-li běžné souřadnice X souřadnicemi daného bodu x a bodu sousedního $x + dx$ na čáře, čímž máme pro koefficienty ξ_1, ξ_2, ξ_3 rovnice

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,$$

$$\xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 + \xi_3 dx_3 = 0.$$

Rovnicím těm hoví hodnoty $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$; stačí rovnici (6) differencovati a připomenouti si větu *Eulerovu* o homogenních funkcích

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = nf,$$

bychom se o tom přesvědčili.

Jest tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} X_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} X_3 = 0$$

rovnice tečny.

Obdobně by plynulo, že rovnice bodu, v němž se tečna ξ čáry

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$$

dotýká, jest

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \Xi_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \Xi_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_3} \Xi_3 = 0.$$

Čára prvního stupně jest přímka, a čára první třídy jest bod (pojmutý jako obálka všech přímek jím procházejících).

Čára druhého stupně má rovnici

$f = 0$, kde $f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma a_{ik} x_i x_k$, $(i, k = 1, 2, 3;\ a_{ik} = a_{ik})$

tedy vypíšeme-li

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{31} x_3 x_1 = 0.$$

Připomeňme ihned, že učiníme-li

$$f_\nu = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}, \text{ máme } f = \Sigma x_\nu f_\nu.$$

Nejjednodušší čára druhého stupně jest soustava dvou přímek; její rovnice jest

$$f = 0 \quad \text{při } f = AB,$$

značí-li A a B linearné funkce $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$ resp. $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$.

Položme si otázku, kterak lze poznati, že čára druhého stupně se skládá ze dvou přímek, či že degeneruje? V případě tom máme

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu} = a_\nu B + b_\nu A,$$

a hodnoty x_1, x_2, x_3, jež annullují linearné výrazy A a B, a z nichž alespoň jedna jest libovolná, annullují tudíž také f_1, f_2, f_3; mají tedy linearné homogenní rovnice

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ f_3 = 0$$

řešení, jež se neskládá ze samých 0, pročež musí vymizeti determinant z jich koefficientů, čili t. z. diskriminant formy f:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Naopak, platí-li tato rovnice, tu se f rozloží na dva linearné faktory. Při důkazu rozeznávejme dva případy.

a) Jeden minor diskriminantu alespoň nechť nevymizí, na př. některý minor, jehož elementy stojí v 1. a v 2. řádku; pak nutně též nevymizí minor, jehož elementy jsou v 1. a 2. řádku a v 1. a v 2. sloupci, t. j. $\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{33}}$ čili stručněji A_{33}. Jest totiž vzhledem k $\varDelta = 0$ třetí řádek složen z prvních dvou, a tedy také třetí sloupec z prvních dvou; kdyby $A_{33} = 0$, rovnal by se každý minor z 1. a z 2. řádku utvořený nulle, proti supposici. Nyní násobením třetího sloupce hodnotou x_3 a přičtením x_1-násobného prvního a x_2-násobného druhého sloupce obdržíme

$$0 = \varDelta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & f_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & f_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & f_3 \end{vmatrix},$$

a toutéž operací vzhledem k třetímu řádku

$$0 = \varDelta x_3^2 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & f_1 \\ a_{22}, & a_{22}, & f_2 \\ f_1, & f_2, & f \end{vmatrix},$$

z čehož řešením dle f

$$f = \frac{1}{A_{33}} (a_{22} f_1^2 - 2 a_{12} f_1 f_2 + a_{11} f_2^2).$$

Označíme-li tedy literami λ_1, λ_2 kořeny rovnice

$$a_{22}\lambda^2 - 2a_{12}\lambda + a_{11} = 0,$$

které vzhledem k $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \gtrless 0$ jsou různé, máme totožnost

$$f = \frac{a_{22}}{A_{33}}(f_1 - \lambda_1 f_2)(f_1 - \lambda_2 f_2),$$

a f skutečně rozloženo na dva linearné faktory.

b) Nechť vymizejí všecky minory diskriminantu, ale ovšem alespoň jeden minor nižší, t. j. jeden element a_{ik} nechť nevymizí, n. př. element z 1. řádku. Pak nutně $a_{11} \gtrless 0$; dle supposice jsou 2. i 3. řádek násobky prvního, a tedy i 2. a 3. sloupec násobky prvního a měla by tudiž rovnost $a_{11} = 0$ v zápětí 0, 0, 0 jakožto první řádek, proti supposici. Nyní

$$f_2 = \lambda f_1, \quad f_3 = \mu f_1,$$

$$f = x_1 f_1 + x_2 \lambda f_1 + x_3 \mu f_1 = (x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3) f$$

$$= (x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3) = \frac{f_1^2}{a_{11}};$$

jest tedy f úplným čtvercem linearné funkce, a čára se skládá ze dvou splývajících přímek.

Pokládáme-li v této úvaze x_1, x_2, x_3 za souřadnice přímkové, máme ten výsledek, že mizící diskriminant jest výrazem toho fakta, že čára druhé třídy $f = 0$ se skládá ze dvou různých neb splývajících čar první třídy, t. j. bodů.

7. *Nezvrhlá čára druhého stupně jest čarou druhé třídy a naopak*; označují se společným názvem kuželoseček.

Za souřadnice ξ_1, ξ_2, ξ_3 tečny v bodě x čáry $f = 0$ můžeme vzíti $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3}$ a máme tedy relace

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= \xi_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= \xi_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= \xi_3, \\ \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 &= 0, \end{aligned}$$

z nichž eliminací hodnot x_1, x_2, x_3 plyne rovnice kvadratická mezi souřadnicemi tečny ξ

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \xi_1, \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \xi_2, \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \xi_3, \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ čili } \Pi(\xi) = 0.$$

A naopak, platí-li tato rovnice, lze při supposici $\Delta \gtrless 0$ vždy vyhověti čtyřem homogenním rovnicím o neznámých x_1, x_2, x_3, ϱ:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - \varrho\xi_1 &= 0,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 - \varrho\xi_2 &= 0,\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 - \varrho\xi_3 &= 0,\\
\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - \varrho 0 &= 0,
\end{aligned}$$

a sice lze ϱ libovolně voliti, ježto čtvrtá rovnice jest linearně složena z prvních tří. To ale znamená, že jsou ξ souřadnice tečny čáry $f = 0$ v bodě x, a že tedy $\Pi(\xi) = 0$ jest rovnice této čáry v souřadnicích přímkových.

Zcela jinak se věc má při zvrhlé čáře

$$f = \mathrm{AB} = 0;$$

zde souřadnice tečny jsou $\frac{\partial f}{\partial x_\nu} = a_\nu \mathrm{B} + b_\nu \mathrm{A}$, a tedy, je-li dotyčný bod na přímce $\mathrm{A} = 0$, máme $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = a_1 : a_2 : a_3$ a je-li na přímce $\mathrm{B} = 0$, máme ovšem $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = b_1 : b_2 : b_3$, a jsou tedy souřadnice ξ vázány *dvěma* rovnicemi, totiž tou aneb onou proporcí; pro bod oběma přímkám společný nabývají souřadnice ξ neurčitého tvaru, majíce vlastně oboje hodnoty. Z toho vychází, že zvrhlou čáru druhého stupně nelze pokládati za čáru přímkovou, t. j. obálku přímek.

Úvahy reciproké, plynoucí z toho, interpretují-li se proměnné x jakožto souřadnice přímkové, a tedy ξ jakožto bodové, čtenář snadno sám si vyvodí.

8. *Theorie polův a polar.*

Dva body x' u x'' jsou vzhledem ke kuželosečce sdružené neb konjugované, jsou-li harmonickými vzhledem k průsečným bodům jich spojnice s kuželosečkou; je-li

$$f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma\, a_{hk} x_h x_k = 0$$

rovnice kuželosečky, vyjadřuje

$$\Sigma\, x'_\nu \frac{\partial f}{\partial x''_\nu} = 0 \quad \text{aneb} \quad \Sigma\, x''_\nu \frac{\partial f}{\partial x'_\nu} = 0$$

tuto sdruženost, při čemž značí n. př. $\frac{\partial f}{\partial x'_\nu}$ hodnotu $\frac{\partial f}{\partial x_\nu}$, vložíme-li do ní x'_1, x'_2, x'_3 za x_1, x_2, x_3.

Bod $x' + \lambda x''$ spojnice $\overline{x'x''}$ jest totiž na kuželosečce, platí-li

$$\Sigma a_{hk} (x'_h + \lambda x''_h)(x'_k + \lambda x''_k) = 0;$$

kořeny λ_1, λ_2 této kvadratické rovnice jsou úměrny dělícím poměrům průsečíkův,[1] a jsou tedy tyto vzhledem k x' a x'' harmonické při $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, t. j. tenkráte, kdy koefficient při λ v rovnici této vymizí, t. j. kdy

$$\Sigma a_{hk} (x'_h x''_k + x''_h x'_k) = 0,$$

čili vypsáno

$$2(a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3)x''_1 + 2(a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3)x''_2 \\ + 2(a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3)x''_3 = 0;$$

tím tvrzení dokázáno.

Vedeme-li daným bodem x' libovolné přímky a stanovíme-li na každé bod sdružený k bodu x', hoví tedy všecky tyto sdružené body rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial x'_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x'_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial x'_3} x_3 = 0,$$

jež jsouc linearná, ukazuje, že geometrické místo sdružených bodů jest přímka, t. j. *polara* bodu x', jenž slove jejím *polem*. Je-li pol x' na kuželosečce, jest jeho polára patrně tečna.

Rovnice poláry jest vzhledem k souřadnicím x a x' symetrická, z čehož ihned plyne, že, *prochází-li polara jednoho bodu druhým, též polára druhého prochází prvním.*

Při nezvrhlé kuželosečce lze každou přímku pokládati za polaru určitého bodu; lze totiž rovnici libovolné přímky

$$\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 = 0$$

stotožniti s rovnicí poláry bodu x':

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x'_1} X_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x'_2} X_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x'_3} X_3 = 0;$$

to vyžaduje, aby platily rovnice

$$a_{\nu 1}x'_1 + a_{\nu 2}x'_2 + a_{\nu 3}x'_3 = \xi_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3),$$

jichž řešením, které jest vzhledem k $\Delta \gtrless 0$ vždy určité, plynou souřadnice polu x'_1, x'_2, x'_3.

Vymizí-li ale diskriminant, je-li tedy f součinem dvou linearných faktorů AB, tu polára bodu x'

$$(b_1 A + a_1 A)\, x'_1 + (b_2 A + a_2 B)\, x'_2 + (b_3 A + a_3 B)\, x'_3 = 0$$

čili

$$B'A + A'B = 0$$

vždy prochází bodem $A = 0$, $B = 0$; polára tohoto bodu pak jest zcela neurčitá.

Naplní-li pol přímou řadu, naplní polára svazek s onou řadou projektivný; přísluší totiž polu $x' + \lambda x''$ polara o rovnici

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x'_\nu + \lambda x''_\nu) = 0,$$

t. j.

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_\nu} x'_\nu + \lambda\, \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_\nu} x''_\nu = 0.$$

9. *Reciproká funkce.*

Naznačme stručně reciproké úvahy. Dvě přímky ξ', ξ'' slují vzhledem ke kuželosečce sdruženými, oddělují-li harmonicky obě tečny, jež jich společným bodem procházejí. Je-li

$$\Pi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$$

rovnice kuželosečky v souřadnicích přímkových, jest

$$\Sigma\, \xi'_\nu \frac{\partial \Pi}{\partial \xi''_\nu} = 0 \quad \text{čili} \quad \Sigma\, \xi''_\nu \frac{\partial \Pi}{\partial \xi'_\nu} = 0$$

výrazem sdruženosti. Veškeré přímky ξ sdružené s danou přímkou ξ', hovíce linearné rovnici

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi'_1}\xi_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial \xi'_2}\xi_2 + \frac{\partial \Pi}{\partial \xi'_3}\xi_3 = 0, \tag{9}$$

procházejí jedním bodem *a ten jest polem přímky* ξ'. Souřadnice jeho jsou totiž $x'_\nu = \frac{\partial \Pi}{\partial \xi'_\nu}$ a jde pak jen o to ukázati, že hodnoty ξ'_ν jsou úměrny hodnotám $\frac{\partial f}{\partial x'_\nu}$. K tomu cíli zavedeme i jinak důležitý pojem *reciproké funkce* (u *Gausse* adjungovaná funkce).

Zavedeme-li do kvadratické formy

$$f = \Sigma\, a_{hk} x_h x_k\,, \qquad (h, k = 1, 2, 3;\ a_{hk} = a_{kh})$$

na místo proměnných x_1, x_2, x_3 tři nové proměnné ξ definované rovnicemi

$$(8) \qquad \xi_\nu = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_\nu},$$

snadno nahlédneme, že f přejde na novou formu kvadratickou f_r (ξ_1, ξ_2, ξ_3), a *tato sluje reciprokou funkcí dané funkce f.* Označíme-li totiž minor diskriminantu Δ příslušný elementu a_{hk} literou A_{hk}, máme řešením rovnic (8) dle x_ν

$$\Delta x_\nu = A_{1\nu}\xi_1 + A_{2\nu}\xi_2 + A_{3\nu}\xi_3\,,$$

a tedy

$$f = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3} x_3 = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$$
$$= \frac{1}{\Delta}\Sigma\xi_\nu\,(A_{1\nu}\xi_1 + A_{2\nu}\xi_2 + A_{3\nu}\xi_3) = \frac{1}{\Delta}\,\Sigma\, A_{hk}\xi_h\xi_k\,.$$

Máme tedy za platnosti rovnic (8)

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_r(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{\Delta}\,\Sigma\, A_{hk}\xi_h\xi_k.$$

V jiném tvaru lze reciprokou funkci f_r obdržeti eliminací hodnot x_1, x_2, x_3 z rovnic

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} - \xi_1 = 0, \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \xi_2 = 0, \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3} - \xi_3 = 0,$$

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 - f = 0;$$

tím nabýváme

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \xi_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \xi_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & f \end{vmatrix} = 0 ,$$

čili

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \xi_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{22}, & \xi_3 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & 0 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & 0 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & f \end{vmatrix} = 0,$$

t. j.

$$\Pi + \varDelta f = 0 ,$$

z čehož

(11) $$f = f_r = -\frac{1}{\varDelta} \Pi (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Porovnáme-li to s rovnicí (10),máme Π ve tvaru

$$\Pi (\xi_1, \xi_2, \xi_3), = - \Sigma \mathrm{A}_{hk} \xi_h \xi_k .$$

Reciproká funkce reciproké funkce jest původní funkce, odkud i název její. Pokládáme-li totiž v rovnicích

$$f = f_r = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 za neodvislé proměnné a x_1, x_2, x_3 za jich funkce, máme derivováním

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_1} = x_1 + \xi_1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \xi_3 \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} ,$$

a jinak též

$$\frac{\partial f_r}{\partial \xi_1} = \frac{\partial f}{\partial \xi_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}$$
$$= 2\xi_1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + 2\xi_2 \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + 2\,\xi_3 \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} ,$$

čímž předchozí relaci můžeme psáti

$$\frac{\partial f_r}{\partial \xi_1} = x_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial f_r}{\partial \xi_1} ,$$

t. j.

$$x_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial f_r}{\partial \xi_1},\quad x_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial f_r}{\partial \xi_2},\quad x_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial f_r}{\partial \xi_3}.$$

Jelikož za těchto tří rovnic platí rovnost $f_r(\xi) = f(x)$, jest tvrzení dokázáno. Zároveň patrno, *že linearné rovnice*

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_\nu} = \xi_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

mají řešení

$$x_\nu = \frac{1}{2}\frac{\partial f_r}{\partial \xi_\nu},$$

čímž dokázán hořejší výrok o poláře, neboť $f_r = 0$ lze pokládati za rovnici dané kuželosečky $f = 0$ v souřadnicích přímkových, právě tak jako $\Pi = 0$.

Otáčí-li se polára kolem bodu, vytvořujíc svazek, naplňuje její pol přímou řadu se svazkem projektivnou; jest totiž rovnice polu přímky $\xi' + \lambda\xi''$ vzhledem k souměrnosti rovnice (9) v příčině liter ξ a ξ'

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1}(\xi_1' + \lambda\xi_1'') + \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_2}(\xi_2' + \lambda\xi_2'') + \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_3}(\xi_3' + \lambda\xi_3'') = 0$$

čili

$$\Sigma\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_\nu}\xi_\nu' + \lambda\,\Sigma\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_\nu}\xi_\nu'' = 0.$$

10. *Polárný trojúhelník* jest trojúhelník, jehož strany jsou polárami protějších vrcholův. Zvolivše jeden jeho vrchol A libovolně, nutno druhý B voliti na poláře a prvního a třetí C pak položiti do společného bodu přímky a s polárou b bodu B; a to také stačí, neboť polára c pak prochází body A a B a polára b body A a C. Reciprokým způsobem můžeme zvoliti jednu stranu a libovolně, vésti jejím polem A druhou stranu b a za třetí stranu c vzíti poláru průsečíku stran a, b.

Je-li některý polárný trojúhelník dané kuželosečky zvolen za základní trojúhelník, jest polára bodu x_1', 0, 0, t. j. přímka

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\,x_1' = 0$$

totožna s přímkou $x_1 = 0$, a tedy $a_{12} = a_{13} = 0$; obdobně vzhledem k oběma ostatním základním vrcholům ještě plyne $a_{23} = 0$, tak že rovnice čáry za učiněné supposice jest

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

t. j. obsahuje jen čtverce souřadnic. Jakožto přímkovou rovnici máme

$$\Pi(\xi) = -(a_{22}a_{33}\xi_1^2 + a_{33}a_{11}\xi_2^2 + a_{11}a_{12}\xi_3^2) = 0.$$

Připomeňme, že rovnice čáry procházející vrcholy základního trojúhelníku patrně má tvar

$$2\,a_{12}x_1x_2 + 2\,a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 0,$$

a rovnice kuželosečky vepsané do tohoto trojúhelníku:

$$2\alpha_{12}\xi_1\xi_2 + 2\alpha_{23}\xi_2\xi_3 + 2\alpha_{31}\xi_3\xi_1 = 0.$$

11. *Pojem invariantu, kovariantu, kontravariantu.* Zaveďme do kvadratické ternarné formy

$$f = \Sigma a_{hk}x_hx_k$$

nové proměnné x'_1, x'_2, x'_3 substitucí

(12) $$x_j = t_{j1}x'_1 + t_{j2}x'_2 + t_{j3}x'_3\,, \qquad (j = 1,\ 2,\ 3)$$

o modulu $\mathrm{T} = \Sigma \pm (t_{11}t_{22}t_{33})$ různém od nully; a mějme tak

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = f'(x'_1,\ x'_2,\ x'_3) = \Sigma\, a'_{hk}x'_hx'_k.$$

Vymizí-li diskriminant Δ formy f, tu se tato jeví jakožto součin dvou linearných faktorův, které vykonanou substitucí přejdou opět na linearné výrazy nových proměnných; jest tedy také f' součinem dvou linearných faktorů, t. j. také diskriminant této formy vymizí. Vymizí-li tedy Δ, vymizí též Δ', z čehož lze souditi, že vyjádříme-li a'_{hk} a tedy i Δ' pomocí hodnot a_{kh} a transformačních koefficientů, výraz pro Δ' bude obsahovati faktor Δ. Tomu skutečně tak jest, neboť platí relace

(13) $$\Delta' = \mathrm{T}^2\Delta.$$

Abychom to ukázali, vyjádříme nejprve nové koefficienty a'_{hk} pomocí původních a_{hk}. Koefficienty kvadratické formy jsou polovičné druhé derivace její; i odvoďme nejprve

$$\frac{\partial f}{\partial x'_h} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x'_h} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x'_h} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x'_h}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} t_{1h} + \frac{\partial f}{\partial x_2} t_{2h} + \frac{\partial f}{\partial x_3} t_{3h},$$

a dále

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'_h \partial x'_k} = t_{1h}(2\, a_{11}\, t_{1k} + 2\, a_{12} t_{2k} 2\, a_{13} t_{3k}) + t_{2h}\,(2\, a_{21} t_{1k}$$
$$+ 2 a_{22} t_{2k} + 2\, a_{23} t_{3k}) + t_{3h}\,(2\, a_{31} t_{1k} + 2\, a_{32} t_{2k} + 2\, a_{33} t_{3k}),$$

t. j. dělivše 2

$$a'_{hk} = t_{1h}\tau_{1k} + t_{2h}\tau_{2k} + t_{3k}\tau_{3k},$$

značíme-li polovičně tři závorky literami τ_{1k}, τ_{2k}, τ_{3k}.

Vynásobením determinantů máme, kombinujíce sloupce se sloupci na řádky,

$$\begin{vmatrix} t_{11}, & t_{12}, & t_{13} \\ t_{21}, & t_{22}, & t_{23} \\ t_{31}, & t_{32}, & t_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tau_{11}, & \tau_{12}, & \tau_{13} \\ \tau_{21}, & \tau_{22}, & \tau_{23} \\ \tau_{31}, & \tau_{32}, & \tau_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}, & a'_{12}, & a'_{13} \\ a'_{21}, & a'_{22}, & a'_{23} \\ a'_{31}, & a'_{32}, & a'_{33} \end{vmatrix}$$

čili, rozloživše druhý determinant na součin dvou,

$$\mathrm{TT}\, \Sigma \pm (a_{11} a_{22} a_{33}) = \Sigma \pm (a'_{11} a'_{22} a'_{33}),$$

jak bylo dokázati.

Celistvé racionalné funkce koefficientů daných forem, jež — jako právě uvažovaný diskriminant — mají tu vlastnost, že byvše utvořeny z koefficientů transformovaných forem se reprodukují násobené jistou mocností modulu transformace, zoveme *invarianty* daných forem nebo též *simultanními invarianty* v případě více forem. Vymizení takového invariantu patrně charakterisuje vlastnost nezávislou na soustavě souřadné, anebo nezrušitelnou kollinearnou transformací, neboť vymizí-li invariant I, vymizí též hodnota I' utvořená z koefficientů transformovaných forem, jelikož

$$\mathrm{I}' = \mathrm{T}^{\alpha}\mathrm{I}.$$

Obdobně se definuje *kovariant* jakožto celistvá racionalná funkce koefficientů daných forem a proměnných, hovící rovnici

$$\mathrm{K}' = \mathrm{T}^{\alpha}\mathrm{K}$$

v níž značí K′ výraz K, utvořený však s proměnnými linearnou transformací zavedenými a s koefficienty transformovaných forem. Čára $K = 0$ má patrně k daným čarám opět vztah na soustavě souřadné nezávislý, anebo kollineací nezrušitelný. Příklad vytkneme při soustavě dvou kuželoseček.

Kontravariantem se zove celistvá racionalná funkce L proměnných ξ a koefficientů, jež hoví obdobné rovnici

$$L' = T^{\alpha} L,$$

při níž však proměnné ξ', vcházející do L′, souvisí s proměnnými ξ substitucí transponovanou. Jakožto příklad uveďme výraz

$$\Pi = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \xi_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \xi_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix},$$

jenž jest kontravariantem kvadratické formy $f = \Sigma a_{hk} x_h x_k$. Majíce totiž na paměti, že transponovaná substituce jest

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= t_{11}\xi_1 + t_{21}\xi_2 + t_{31}\xi_3, \\ \xi'_2 &= t_{12}\xi_1 + t_{22}\xi_3 + t_{32}\xi_3, \\ \xi'_3 &= t_{13}\xi_1 + t_{23}\xi_2 + t_{33}\xi_3, \end{aligned}$$

nalezneme, kombinováním řádků se sloupci na řádky,

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \xi_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \xi_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t_{11}, & t_{12}, & t_{13}, & 0 \\ t_{21}, & t_{22}, & t_{23}, & 0 \\ t_{31}, & t_{32}, & t_{33}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_{11}, & \tau_{12}, & \tau_{12}, & \xi_1 \\ \tau_{21}, & \tau_{22}, & \tau_{23}, & \xi_2 \\ \tau_{31}, & \tau_{32}, & \tau_{33}, & \xi_3 \\ \xi'_1, & \xi'_2, & \xi'_3, & 0 \end{vmatrix},$$

a dále kombinováním sloupců se sloupci na řádky

$$\begin{vmatrix} t_{11}, & t_{12}, & t_{13}, & 0 \\ t_{21}, & t_{22}, & t_{23}, & 0 \\ t_{31}, & t_{32}, & t_{33}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tau_{11}, & \tau_{12}, & \tau_{12}, & \xi_1 \\ \tau_{21}, & \tau_{22}, & \tau_{23}, & \xi_2 \\ \tau_{31}, & \tau_{32}, & \tau_{33}, & \xi_3 \\ \xi'_1, & \xi'_2, & \xi'_1, & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}, & a'_{12}, & a'_{13}, & \xi'_1 \\ a'_{21}, & a'_{22}, & a'_{23}, & \xi'_2 \\ a'_{32}, & a'_{32}, & a'_{33}, & \xi'_3 \\ \xi'_1, & \xi'_2, & \xi'_3, & 0 \end{vmatrix},$$

t. j. vzhledem ku předchozí rovnici

$$T \Pi T = \Pi',$$

čímž tvrzení dokázáno.

Konečně lze uvažovati invariantivné funkce, do nichž vcházejí oboje proměnné x i ξ; takové slují dle *Sylvestera smíšenými konkomitanty*; nejjednoduší takový útvar jest $x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3$, jenž linearnou transformací se vůbec nemění.

Jest patrno, že každá mocnost diskriminantu jest též invariantem, a lze snadno nahlédnouti, že forma f jiných invariantův nemá. Neboť je-li I invariantem a platí-li

$$I'^1 = T^\alpha I,$$

tu

$$\frac{I'}{\varDelta^\alpha} = \frac{(T^\alpha I)^2}{(T^2\varDelta)^\alpha} = \frac{I^2}{\varDelta^\alpha};$$

zůstává tedy podíl $I^2 : \varDelta^\alpha$ při linearné transformaci úplně neproměnným, jinak řečeno on jest *absolutním invariantem.* Takový však u kvadratické ternarné formy může býti jen absolutní stálou; neboť příhodnou linearnou transformací lze toho dosíci, aby nové koefficienty a'_{hk} nabyly hodnot libovolně daných — ovšem neannullujících $\varDelta'$ — a zůstává tedy podíl $I^2 : \varDelta^\alpha$ týž, nechť jsou koefficienty a_{hk} jakékoli, t. j. on jest stálým. Z toho ale

$$I = c\varDelta^{\frac{\alpha}{2}},$$

jakož jsme tvrdili; α ovšem jest sudé.

(Dokončení.)

Poznámky arithmetické.

Sdílí

M. Lerch,

docent vysoké školy technické v Praze.

Buď $f(x, y)$ kladná a spojitá funkce *souměrná* dvou kladných proměnných x, y, která roste, když jedna proměnná roste a druhá se nemění; je-li z kladné, znamenejme řešení rovnice

$$f(x, y) = z$$

takto:

$$x = F(y; z) \quad \text{aneb} \quad y = F(x; z).$$

Symbolem $E(z)$ neb $[z]$ znamenejme největší kladné celistvé číslo, které nepřevyšuje hodnotu z, takže