Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Franz Müller

Grafické řešení některých úloh sférické astronomie. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 1, 49--64

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123862

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

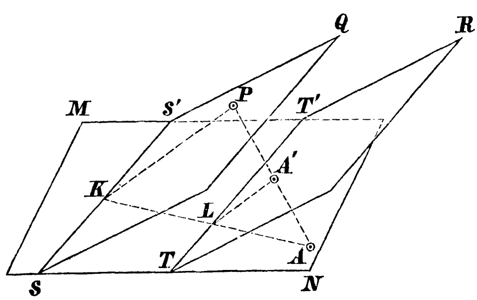
Grafické řešení některých úloh sférické astronomie.

Napsal

František Müller,

professor české vysoké školy technické v Praze.

1. *Úvod.* Podávám-li zde čtenáři grafické řešení některých úloh sferické astronomie, nečiním to z důvodu, jako bych obsahu předloženého článku přikládal nějakou důležitost pro astronomii vědeckou, nýbrž pouze z důvodu, že podobným řešením organická souvislost tvaru na kouli a v prostoru k jasnému pojmutí mnohem přístupnější se stane, nežli jest to možné počtem, který více méně začátečníku nepřehledným jest. Ostatně doufám, že se čtenář přesvědčí, že některé úlohy, hlavně ty, které se týkají určení času, i v praktickém ohledu nejsou bez ceny a zajímavosti.



Obr. 1.

Znalost sferických souřadnic, jak se v astronomii užívají, předpokládám, taktéž i nejnutnější část deskriptivní geometrie. Z theoretické geometrie chci pouze následující úvahy o konstrukci kuželoseček uvésti, o kterých soudím, že studujícím jsou méně známy.

2. Budiž $\overline{MN}$ (obr. 1.) *rovina základní*, v níž se nalézá soustava bodů A a P *(pol)* pevný bod v prostoru. Spojíme-li bod P s každým bodem A, obdržíme svazek paprsků $\overline{PA}$. Tvoří-li všecky body A křivku nepřetržitou *(křivku řídicí)*, obdržíme tímto způsobem plochu kuželovou. Položíme-li rovinu $\overline{TT'R}$, protíná nám tato každý paprsek $\overline{PA}$ v bodech A′, po případě plochu kuželovou v *kuželosečce.* Chceme-li body A′ sestrojiti, musí býti poloha roviny $\overline{TT'R}$ (*roviny sečné*) ku rovině základní MN a ku bodu P určena. Tuto polohu lze tímto způsobem určiti: Položíme-li bodem P rovinu $\overline{SS'Q}$ *(rovinu směrnou)* rovnoběžně s rovinou $\overline{TT'R}$, tu protíná tato rovinu $\overline{MN}$ v přímce $\overline{SS'}$, která bude rovnoběžnou s průsečnicí (*trati*) $\overline{TT'}$ roviny $\overline{TT'R}$ s rovinou $\overline{MN}$. Tyto dvě rovnoběžné přímky určují jako v nauce o centrálních projekcích *trať* a úběžnice nějaké roviny polohu této. Vzhledem na obsah našeho pojednání bude ale název přímky $\overline{SS'}$ *přímka směrná* místo úběžnice přiměřenější.*)

Z toho následuje bezprostředně:

Roviny rovnoběžné mají společnou přímku směrnou.

Pro konstrukci průseku A′, odpovídajícího bodu A, položíme paprskem $\overline{PA}$ libovolnou rovinu, která protíná rovinu základní $\overline{MN}$ v přímce $\overline{KLA}$, přímku směrnou a trať v bodech K a L. Spojíme-li teď bod P s K, a vedeme-li bodem L přímku $\overline{LA'}$ rovnoběžně s $\overline{KP}$, obdržíme v paprsku $\overline{PA}$ hledaný bod A′. Rovina $\overline{PKA}$ protíná totiž obě rovnoběžné roviny $\overline{TT'R}$ a $\overline{SS'Q}$ v rovnoběžných přímkách $\overline{KP}$ a $\overline{LA'}$.

Chceme-li obdržeti číselný výraz pro polohu bodu A′, tu máme z podobných trojúhelníků $\triangle\, AA'L \sim \triangle\, APK$

$$\overline{AA'} : \overline{AP} : \overline{A'P} = \overline{AL} : \overline{AK} : \overline{LK}.$$

Budiž kolmá vzdálenost t bodu A od trati $\overline{TT'}$ a od přímky směrné s, bude také

*) De La Hire nazývá průsečnici nějaké roviny sečné s rovinou $\overline{MN}$, tedy trať *„formatrix“* této roviny, případně příslušné kuželosečky. Podobně nazývá přímku směrnou: *„direktrix“*.

$$\overline{AL} : \overline{AK} : \overline{LK} = t : s : (s - t) \qquad (1)$$

a tedy

$$\overline{AA'} : \overline{AP} : \overline{A'P} = t : s : (s - t), \qquad (1')$$

z čehož následuje

$$\overline{A'P} = \overline{AP}\frac{s-t}{s}. \qquad (2)$$

Různé polohy bodu A:

a) Bod A leží v trati, jest pak $t = 0$ a $\overline{A'P} = \overline{AP}$, body A s A′ splývají.

b) Bod A leží mezi tratí a přímkou směrnou, tu bude t míti hodnotu negativní, a bude

$$\overline{A'P} = \overline{AP}\frac{s+t}{s}.$$

c) Bod A leží v přímce směrné. Jest pak $s = 0$, a příslušný bod A′ bude ležeti ve vzdálenosti neobmezené.

d) Přímka směrná leží mezi bodem A a tratí, tu bude s negativní a t negativní, a vzorec (2) obdrží tvar

$$\overline{A'P} = \overline{AP}\frac{-s+t}{-s} = \overline{AP}\frac{s-t}{s}.$$

Jelikož jest $s < t$, tu bude A′P míti opačný směr proti směru $\overline{AP}$, bod P bude ležeti mezi A a A′.

e) Je-li konečně A ve vzdálenosti neomezené, jest poloha bodu A′ neurčitá, nalézá se pak bod A′ v průsečnici roviny bodem P rovnoběžně ku $\overline{MN}$ položené s rovinou sečnou.

3. *Zvláštní polohy roviny sečné $\overline{TT'R}$.* Dejme tomu, že bod P svou polohu nemění, naproti tomu ale rovina sečná $\overline{TT'R}$ svůj sklon k rovině $\overline{MN}$ otáčením okolo $\overline{TT'}$ mění, tu bude také rovina $\overline{SS'Q}$ svůj sklon měniti, a přímka směrná $\overline{SS'}$ se bude tím více od trati $\overline{TT'}$ vzdalovati, čím menší jest sklon příslušné roviny sečné k rovině základní.

Je-li konečně úhel sklonu roviny sečné k rovině základní 0, tu splynou obě dohromady, a přímka směrná se bude nalézati ve vzdálenosti neomezeně velké, nebo $s = \infty$. Ku posouzení, je-li v tomto případě nutno rozeznávati jednotlivé polohy roviny sečné, dle polohy trati $\overline{TT'}$, užijeme vzorce (2), z kterého pro uvedený případ následuje: $\overline{A'P} = \overline{AP}$, nebo body A' a A splynou dohromady. Z toho následuje, že poloha bodu A' je neodvislá od polohy a směru trati $\overline{TT'}$, a jelikož každá v rovině se nalezající přímka za rovnoběžnou považována býti může ku přímce ležící ve vzdálenosti neomezené této roviny, tu můžeme také tvrditi, je-li trať ve vzdálenosti omezené a přímka směrná ve vzdálenosti neomezené, že v tomto případě se stotožňuje rovina sečná s rovinou základní.

Poznámka 1. Oproti uvedenému případu, kde rovina sečná s rovinou základní se stotožňuje, seznáme také případy, kde sice rovina sečná s rovinou základní se sloučí, aniž jest dovoleno je stotožňovati.

Poznámka 2. Prochází-li rovina sečná při tomto otáčení bodem P, tu splyne přímka směrná s tratí, a P bude odpovídati všem bodům A. Tento případ nemá žádné praktické důležitosti.

4. *Rovnoběžné posunování roviny sečné.* Dejme tomu, že zůstane úhel sklonu roviny sečné k rovině základní stálým, rovina sečná se ale rovnoběžně k původní poloze pohybuje, tu přímka směrná zůstane stálou, trať však svou polohu měniti bude. Zde možno rozeznávati případy:

a) Budiž $t = \pm \infty$, t. j. trať leží ve vzdálenosti neobmezené, tu jest také $\overline{A'P} = \pm \infty$. Tento případ nemá pro praxi žádné důležitosti.

b) Při takovém rovnoběžném posunování, pokud sklon roviny sečné se nerovná nulle, pokud tedy přímka směrná se nalézá ve vzdálenosti omezené, vyskytnou se různé zvláštní případy, závislé na vzájemné poloze bodu A, A', trati a přímky směrné, není zde ale nic jiného připomenouti, nežli o čem jsme již v odstavci 2. jednali.

Je-li rovina sečná s rovinou základní rovnoběžná, tu leží jak přímka směrná, tak i trať ve vzdálenosti neomezené a bude tedy pro každý bod A roviny základní $t = \pm \infty$, $s = \pm \infty$. Vzorec (2) obdrží pak tvar

$$\overline{A'P} = \overline{AP} \left(1 - \frac{t}{s}\right)$$

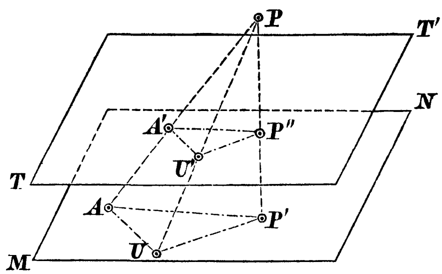
a zůstane zde poměr $\frac{t}{s}$ neurčitým. Pro bližší určení polohy roviny směrné k rovině sečné jest zde nutno, aby poměr $\frac{t}{s}$ byl dán, tedy $\frac{t}{s} = \frac{p}{q}$, kde p a q číselné hodnoty znamenají. Bude pak:

$$\overline{A'P} = \overline{AP}\,\frac{q-p}{q}. \qquad (2')$$

Je-li na př. — obr. 2. — $\overline{MN}$ rovina základní, $\overline{TT'}$ rovina sečná, P střed paprsku $\overline{AP}$, a A libovolný bod roviny základní, tu platí

$$\overline{AA'} : \overline{AP} = t : s,$$

t. j. bodem P myslíme si s rovinou sečnou $\overline{TT'}$ rovnoběžně položenou rovinu směrnou; t a s jsou kolmé vzdálenosti bodu A



Obr. 2.

od obou přímek, ležících ve vzdálenosti neomezené: od trati a od přímky směrné. Uvedenou proporci možno také psáti:

$$(\overline{AP} - \overline{A'P}) : AP = t : s$$

nebo:

$$\overline{A'P} = \overline{AP}\,\frac{s-t}{s}$$

viz vzorec (2).

Budiž U určitý bod roviny základní a U' jemu odpovídající průsek paprsku $\overline{UP}$ s rovinou sečnou, tu bude bodem U' poloha roviny sečné určitě dána.

Bodem U a příslušným bodem U′ jest totiž neurčitý poměr $\frac{s-t}{s}$ určen, a jest:

$$\frac{\overline{U'P}}{\overline{UP}} = \frac{s-t}{s},$$

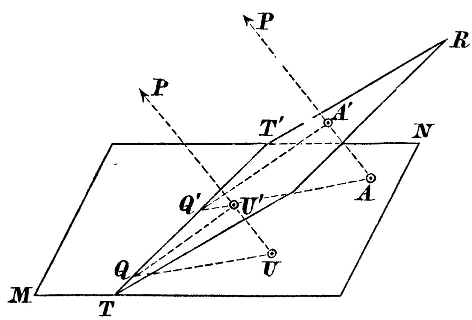
jest tedy

$$\frac{\overline{A'P}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{U'P}}{\overline{UP}}. \tag{3}$$

Libovolnému bodu A odpovídající bod A′ obdržíme tedy, vedeme-li bodem U′ přímku rovnoběžnou k $\overline{UA}$ v průseku této přímky s paprskem $\overline{AP}$. Za takový výpomocný bod se nejlépe hodí bod P′, totiž projekce orthogonální bodu P na rovinu základní.

Bodu P odpovídá na rovině sečné bod P″.

5. *Zvláštní polohy bodu P.* Je-li bod P ve vzdálenosti neomezené, tu budou všecky paprsky $\overline{AP}$ mezi sebou rovnoběžné.



Obr. 3.

Rovina sečná $\overline{TT'R}$ — obr. 3. — protíná rovinu základní v trati $\overline{TT'}$. K určení polohy bodu A′, odpovídajícího bodu A, platí teď relace:

$$\overline{AA'} : \overline{AP} = t : s,$$

nebo

$$\overline{AA'} : t = \overline{AP} : s. \tag{4}$$

V tomto vzorci jest ale jak $\overline{AP}$ tak i s neomezeně velké, a tedy poměr $\overline{AP} : s$ neurčitý.

Konstantní poměr číselný $\overline{AP} : s$, určující vzájemnou polohu roviny sečné k rovině základní a k směru paprsku $\overline{AP}$ se nejlépe určí, je-li dán v rovině základní bod U a v rovině sečné jemu odpovídající bod U'. Chceme-li pak určiti libovolnému bodu A odpovídající bod A', tu položíme jak paprskem $\overline{AP}$ tak i paprskem $\overline{UP}$ libovolné mezi sebou rovnoběžné roviny $\overline{UQU'}$ a $\overline{AQ'A'}$. Tyto protínají rovinu základní v přímkách rovnoběžných $\overline{AQ'}$ a $\overline{UQ}$ a rovinu sečnou také v přímkách rovnoběžných $\overline{QU'}$ a $\overline{Q'A'}$, z čehož možno sestrojiti bod A', je-li dán bod A nebo opačně. Přímky $\overline{UA}$ a $\overline{U'A'}$ budou se protínati s tratí v společném bodu, čehož také pro konstrukci použíti možno.

Zde se mohou vyskytnouti tyto specielní případy:

a) *Paprsky $\overline{AP}$ jsou s rovinou sečnou rovnoběžné.* Bude pak: $\overline{AA'} = t\dfrac{\overline{AP}}{s}$ viz vzorec (4). Konstanta $\dfrac{\overline{AP}}{s} = \dfrac{\overline{UP}}{s'}$ bude pak vždy neomezeně velká, ježto $\overline{AP}$ a $\overline{UP}$ jsou neomezeně velké, a s a s' (kolmé vzdálenosti bodu A a U od přímky směrné) libovolnou hodnotu míti mohou. Jest totiž libovolné množství rovin možných, které jsou rovnoběžné jak s rovinou sečnou tak i s paprsky $\overline{AP}$.

Jest tedy vždy $\overline{AA'} = \pm \infty$, až na ten případ, je-li $t = 0$, bude pak $\overline{AA'}$ libovolné, t. j. paprsek $\overline{AP}$ leží v rovině sečné (v trati).

b) *Rovina sečná jest k rovině základní rovnoběžná.* Zde bude vždy $t = \pm \infty$. Konstanta K jest ale:

$$K = \frac{\overline{AP}}{s} = \frac{\overline{UP}}{s'}$$

(viz obr. 3.).

Zde jsou opět s a s' kolmé vzdálenosti bodův A a U od přímky směrné, nalézající se ve vzdálenosti neomezené. Tento poměr možno nahraditi poměrem:

$$K = \frac{\overline{AA'}}{\overline{AQ'}} = \frac{\overline{UU'}}{\overline{UQ}} = \frac{\sin \measuredangle UQU'}{\sin \measuredangle UU'Q},$$

ježto jest ale v našem případě $\sin \measuredangle UQU' = 0$, jest také $K = 0$, a $\overline{AA'} = K . \overline{AQ'}$ neurčitá, ale konstantní veličina. Ku bližšímu určení polohy roviny sečné jest tudíž nutno buď udati konstantní vzdálenost bodu A' od bodu A nebo kolmou vzdálenost p roviny sečné od roviny základní. Mezi oběma platí relace $p = \overline{AA'} \sin \alpha$, kde α jest úhel sklonu paprsku $\overline{AP}$ k rovině sečné a základní.

Jiný speciální případ pro polohu bodu P obdržíme, předpokládáme-li, že bod P leží v rovině základní, pak bude přímka směrná procházeti bodem P. Polohu bodu A' obdržíme ze vzorce $\overline{A'P} = \overline{AP} \frac{s - t}{s}$, ale bod A' leží — jelikož celý paprsek $\overline{AP}$ se nalézá v rovině základní — také v rovině základní, a to v trati roviny sečné.

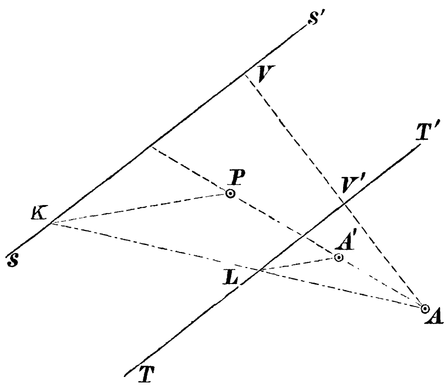
Je-li pak také rovina sečná rovnoběžnou s rovinou základní, bude vždy $t = \pm \infty$.

O s to tvrditi nelze, ježto každá libovolná přímka bodem P procházející a v rovině základní ležící považována býti může za směrnou přímku. Bude tedy $\overline{A'P} = \pm \infty$, t. j. všecky paprsky $\overline{AP}$ jsou rovnoběžné s rovinou sečnou.

Je-li rovina sečná nakloněna k rovině základní, bod P ale ve vzdálenosti neobmezeně velké a při tom v rovině základní ležící, tu budou všecky paprsky $\overline{AP}$ mezi sebou rovnoběžné. Zde jest s neobmezeně velké, a polohu bodu A' obdržíme zase ze vzoru $\overline{AA'} = t \frac{\overline{AP}}{s}$, kde znamená $\frac{\overline{AP}}{s} = K = \frac{1}{\sin\alpha}$, je-li α úhel sklonu paprsku $\overline{AP}$ k trati roviny sečné. Bude pak $t = AA' \sin \alpha$.

Jest zřejmo, že následkem toho paprsek $\overline{AP}$ se nalézá v rovině základní, tedy také A' v rovině základní nalézati se bude, a to v trati roviny sečné. Je-li ale rovina sečná rovnoběžná s rovinou základní, tu bude vždy $t = \pm \infty$ a jest tedy vždy $\overline{AA'} = \pm \infty$, t. j. všecky paprsky $\overline{AP}$ jsou rovnoběžné s rovinou sečnou. Splyne-li ale také rovina sečná s rovinou základní dohromady, tu obdržíme onen případ, kdy rovina základní, rovina sečná a bod P leží v jedné rovině, v rovině nákresné.

6. Rovina sečná, směrná a bod P splývají (rovina výkresu). Uvažujeme-li soustavu bodů A v rovině základní a soustavu bodu A′ v rovině sečné za dvě soustavy projektivní, takže každému bodu A v rovině základní odpovídá vždy v rovině sečné jeden, a sice pouze jeden bod A′, zůstanou tyto soustavy projektivní také pak, otočíme-li rovinu sečnou okolo trati a rovinu směrnou okolo přímky směrné, až obě splynou s rovinou základní (rovinou nákresní) dohromady. Trať a přímka směrná svou polohu nezměnily, a konstrukce bodu A′, který odpovídá danému bodu A, se provede zcela tak jako v odstavci 2. — obr. 1. — bylo uvedeno. Budiž na př. — obr. 4. — $\overline{TT'}$ trať a $\overline{SS'}$ přímka směrná, P (pol) střed projektivní soustavy, A daný



Obr. 4.

bod, tu vedeme bodem A libovolnou přímku $\overline{AK}$, K, průsek této přímky s přímkou směrnou spojíme s bodem P a bodem L (průsekem přímky $\overline{AK}$ s tratí) vedeme ku $\overline{KP}$ přímku rovnoběžnou $\overline{LA'}$ a obdržíme tímto způsobem bodu A odpovídající bod A′. Jest patrno, že týmž způsobem najdeme také bod A, je-li dán bod A′.

Také zde jsme jaksi položili paprskem $\overline{AP}$ rovinu výpomocnou, o které předpokládáme, že padne taktéž s rovinou základní dohromady, a roviny směrnou a sečnou v přímkách $\overline{KP}$ a $\overline{LA'}$ protíná.

Je-li kolmá vzdálenost $\overline{AV'} = t$ a $\overline{AV} = s$, tu bude také zde

$$\overline{AA'} : \overline{AP} : \overline{A'P} = t : s : (s - t)$$

nebo

$$\overline{A'P} = \overline{AP} \frac{s - t}{s}. \tag{2}$$

Specielní polohy přímky směrné:

a) Budiž $s = \pm \infty$, t. j. přímka směrná se nalézá ve vzdálenosti neomezené, tu bude vždy $\overline{AP} = \overline{A'P}$, t. j. oba body A a A′ splynou v jediný. Jest tudíž soustava bodů A se soustavou bodu A′ identickou, nebo rovina základní jest identická s rovinou sečnou. Trať může míti v tomto případě polohu libovolnou, ale vždy ve vzdálenosti omezené (srovnej odstavec 3.). Je-li také $t = \pm \infty$, je koeficient $\frac{s - t}{t}$ neurčitý, a určíme zase vzájemnou polohu obou projektivních soustav A a A′, jako v odstavci 4., je-li dán bod U a v paprsku $\overline{UP}$ odpovídající bod U′. Je-li na př. dán bod A, a hledáme-li příslušný bod A′, tu spojíme bod A s U a P, a vedeme bodem U′ přímku $\overline{U'A'}$ rovnoběžnou s $\overline{UA}$. Tato protíná paprsek $\overline{AP}$ v hledaném bodu A′.

b) Splyne-li trať s přímkou směrnou, jest $s = t$ a $\overline{A'P} = 0$, t. j. bod P odpovídá co projektivní bod všem bodům A.

c) Padne-li přímka směrná mezi trať a bod A, tu bude $s < t$, a jest tedy $\overline{A'P} = \overline{AP} \frac{s - t}{s}$ negativní, t. j. bod P leží mezi bodem A a A′.

d) Bod A padne mezi trať a přímku směrnou; tu jest, béřeme-li s positivní, t negativní, a vzorec (2) obdrží tvar:

$$A'P = \overline{AP} \frac{s + t}{s}.$$

e) Přímka směrná prochází bodem P. Spojíme-li v tomto případě P s A, a je-li průsek této přímky s tratí A′, tu platí:

$$\overline{A'P} : \overline{AP} = (s - t) : s,$$

jest tedy A′ hledaný bod. V uvedeném případě leží tedy v trati všecky body A′.

Specielní polohy trati:

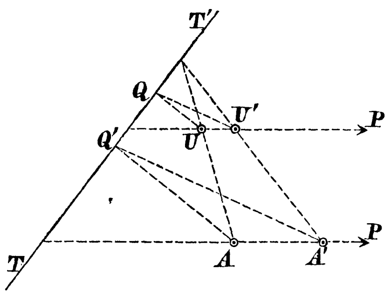
a) Trať prochází bodem A, tu jest $t = 0$ a $\overline{AP} = \overline{A'P}$, a nebo: pro body ležící v trati splyne vždy bod A′ s bodem A.

b) Trať jest ve vzdálenosti neomezené, tu jest $t = \pm\infty$, a tedy také $\overline{A'P} = \pm\infty$, t. j. všecky body A′ se nalézají ve vzdálenosti neomezené. To platí arciť jen potud, pokud přímka směrná jest ve vzdálenosti omezené.

Specielní poloha bodu P. Je-li bod P ve vzdálenosti neomezené, tu určíme polohu bodu A′ z rovnice:

$$\overline{AA'} = \overline{AP}\cdot\frac{t}{s} = t\,\frac{\overline{AP}}{s}.$$

Také zde jest: $\overline{AP} = \pm\infty$, je-li tedy přímka směrná ve vzdálenosti omezené, bude vždy $\overline{AA'} = \pm\infty$. Je-li ale

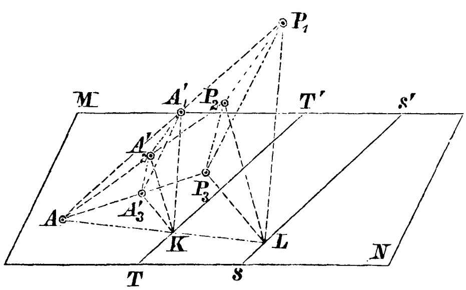


Obr. 5

přímka směrná ve vzdálenosti neomezené, tu jest $s = \pm\infty$ a $\frac{\overline{AP}}{s}$ značí nějakou hodnotu číselnou.

Také lze zde nejsnáze číselnou hodnotu $\frac{\overline{AP}}{s}$ geometricky ustanoviti, určíme-li nějaký bod U a v příslušném paprsku jemu odpovídající bod U′. Budiž na př. — obr. 5. — v paprsku $\overline{UP}$ danému bodu U odpovídající bod U′, a hledáme-li ku bodu A příslušný bod A′, tu vedeme bodem A a bodem U dvě rovnoběžné přímky $\overline{AQ'}$ a $\overline{UQ}$, které nám trať v bodech Q′ a Q protínají. Spojíme-li Q s U′ a vedeme-li bodem Q′ s $\overline{QU'}$ rovnoběžnou přímku $\overline{Q'A'}$, obdržíme v průseku s paprskem $\overline{PA}$ hledaný bod A′. Přímky $\overline{UA}$ a $\overline{U'A'}$ se budou v trati v témž bodu T′ protínati. Je-li ale také trať ve vzdálenosti neomezené, tu bude obecně $\overline{AA'} = \pm \infty$. Má-li se pak bod A′ nalézati ve vzdálenosti omezené, tu jest to pouze tehdy možno, je-li $K = 0$, ve kterém případě $\overline{AA'}$ bude konstantní. (Srovnej odstavec 5. b.)

7. *Úvahy o poloze několika bodů A, B, C,... a jim odpovídajících bodů A′, B′, C′,....*



Obr. 6.

Budiž $\overline{MN}$ — obr. 6. — rovina základní, $\overline{SS'}$ přímka směrná a $\overline{TT'}$ trať roviny sečné, P_1 střed paprsků a A daný bod v rovině základní.

Budiž $\overline{AL}$ kolmice bodem A na trať a přímku sečnou vedená, a tedy $\overline{AK} = t$, $\overline{AL} = s$, a $\overline{KL} = s - t$. Budiž dále $\overline{KA'_1} \,||\, \overline{LP_1}$, tu obdržíme A'_1 bod odpovídající bodu A pro danou polohu bodu P_1.

Poloha bodu A_1' jest dána poměrem:

$$\overline{AA'_1} : \overline{AP_1} : \overline{A'_1P_1} = t : s : (s - t).$$

Pohybuje-li se bod P_1 v libovolné dráze, bude se také otáčeti rovina směrná, a bude toto otáčení roviny směrné závislé na podmínce, aby přímka směrná svou polohu neměnila. Nemá-li konečně také trať svou polohu měniti, a má-li býti základnímu pravidlu vyhověno, t. j. má-li býti rovina sečná s rovinou směrnou rovnoběžná, bude se také rovina sečná okolo trati $\overline{TT'}$ přiměřeně otáčeti. Takovým pohybem přijde bod P_1

nejprve do polohy P_2 a splyne konečně v bodu P_3 s rovinou základní dohromady.

Bodu A odpovídající body A'_2 atd. až A'_3 obdržíme buď konstruktivně uvedeným způsobem nebo z úměry

$$\overline{AA'_2} : \overline{AP_2} : \overline{A'_2P_2} = t : s : (s - t)$$

atd. až konečně

$$\overline{AA'_3} : \overline{AP_3} : \overline{A'_3P_3} = t : s : (s - t),$$

z čehož následuje

$$\overline{AA'_1} : \overline{AP_1} : \overline{A'_1P_1} = \overline{AA'_2} : \overline{AP_2} : \overline{A'_2P_2}$$

atd. až konečně $= \overline{AA'_3} : \overline{AP_3} : \overline{A'_3P_3}$.

Z toho jde:

Jestli jakoukoliv dráhu bod P vykoná a vyhovuje-li při tom podmínce, že přímka směrná a trať svou polohu nemění (že tedy pravidla otáčení roviny směrné a sečné pohybem bodu P ustanovena jsou), bude se současně pohybovati bod A' rovnoběžně s bodem P a dráha jeho bude podobná dráze bodu P.

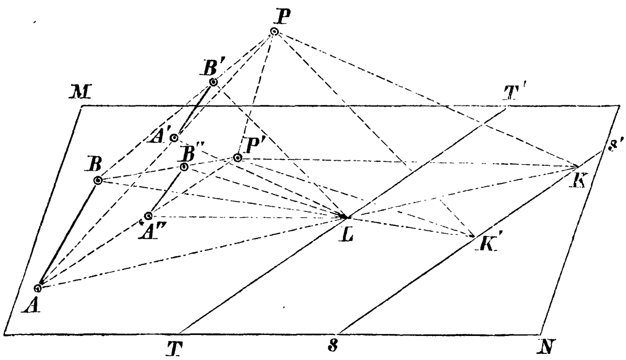
Spojíme-li dvě polohy bodu P, na př. P_1 s P_2, a podobně A'_1 s A'_2, dvě příslušné polohy bodu A', tu budou také roviny $\overline{P_1P_2L}$ a $\overline{A'_1A'_2K}$ rovnoběžné.

K určení bodu ležícího v rovině základní A'_3, spojíme A s bodem P_3, který se taktéž v rovině základní nalézá, a P_3 s L, kterýžto bod L v libovolné přímce $\overline{AL}$ ležeti může. Přímka $\overline{AL}$ protíná trať v bodu K a vedeme-li bodem K přímku $\overline{KA'_3}$ rovnoběžnou s $\overline{LP_3}$, obdržíme v průseku s paprskem $\overline{AP_3}$ hledaný bod A'_3.

Z uvedených úvah následuje ještě:

Ježto $\overline{A'_1A'_3} \parallel \overline{P_1P_3}$, tu bude také, je-li $\overline{P_1P_3}$ přímka kolmá nebo šikmá k rovině základní, přímka $\overline{A'_1A'_3}$ kolmá nebo šikmá k rovině základní. Projekci orthogonální nebo šikmou A'_3 bodu A'_1 na rovině základní obdržíme tedy bezprostředně v rovině základní (nákresné) z orthogonální nebo šikmé projekci P_3 bodu P_1 touž konstrukcí jako jsme obdrželi bod A'_1 na paprsku $\overline{AP_1}$.

Jsou-li tedy v rovině základní dané body A, B, C atd., tvořící jakýkoliv tvar, polygonální nebo křivku, budou pak tvořiti také odpovídající body A', B', C' atd. tvar polygonální nebo kuželosečku, a obdržíme pak orthogonální nebo šikmou projekci tvaru prostorového A', B', C' atd. na rovině základní (rovina nákresná), určíme-li orthogonální nebo šikmou projekci bodu P na rovině základní a sestrojíme-li pomocí nezměněné trati a přímky směrné dle pravidel v odstavci 6. uvedených odpovídající průseky.



Obr. 7.

8. Budiž $\overline{MN}$ — obr. 7. — rovina základní, $\overline{TT'}$ trať a $\overline{SS'}$ přímka směrná, dále pak P střed paprsku a $\overline{AB}$ v rovině základní ležící přímka, spojující oba body A a B. Chceme-li určiti pro polohu bodu P přímce $\overline{AB}$ odpovídající přímku $\overline{A'B'}$, vedeme libovolným bodem L trati dvě přímky $\overline{AL}$ a $\overline{BL}$, které přímku směrnou v bodech K a K' protínají. Body K a K' spojíme s bodem P. Budiž přímka $\overline{LA'}$ rovnoběžná s $\overline{KP}$ a přímka $\overline{LB'}$ rovnoběžná s $\overline{K'B}$, tu obdržíme v paprscích $\overline{AP}$ a $\overline{BP}$ oba body A' a B' a tedy také hledanou přímku $\overline{A'B'}$. Jest zřejmo, že přímkám pomocným $\overline{AK}$ a $\overline{BK'}$ společný bod L se může také nalézati v přímce směrné, nebo může míti polohu libovolnou, nebo mohou také pomocné přímky $\overline{AK}$ a $\overline{BK'}$ býti rovnoběžné. Přeneseme-li bod P do roviny základní, na př. do bodu P', pak týmž způsobem pro polohu středu P' sestrojíme přímce $\overline{AB}$ odpovídající přímku $\overline{A''B''}$, která pak leží v ro-

vině základní. Přímky $\overline{A'A''}$, $\overline{B'B''}$, $\overline{PP'}$ jsou rovnoběžné a jsou body $\overline{A''}$, $\overline{B''}$, $\overline{P'}$ šikmé (parallelní) projekce bodu A', B', P v prostoru; pro případ, je-li PP' kolmo na rovině základní, jsou to projekce orthogonální.

Ale předpokládáme-li, že jest $\overline{P'K} = \overline{PK}$ a $\overline{P'K'} = \overline{PK'}$, tu budou trojúhelníky $\triangle$ $\overline{PKK'}$ a $\triangle$ $\overline{P'KK'}$ shodné, t. j.

$$\triangle \overline{PKK'} \cong \triangle \overline{P'KK'}$$

$$\text{a} \quad \sphericalangle KPK' = \sphericalangle KP'K',$$

$$\sphericalangle K'KP = \sphericalangle K'KP'$$

atd., z čehož vyplývá:

1. Spojíme-li bod P a P' s libovolným v přímce směrné ležícím bodem U, tu bude vždy $\overline{P'U} = \overline{PU}$.

2. Bod P' odloučíme v tomto případě od P tím způsobem, že bod P okolo přímky směrné jako osy rotační tak dlouho otáčíme, až padne do roviny základní.

3. Střed kruhu, ve kterém se bod P bude pohybovati, obdržíme, spustíme-li s bodu P na přímku směrnou kolmici; délka této kolmice jest poloměrem kruhu a rovina jeho jest kolmá ku přímce směrné.

4. Z předešlého následuje dále:

$$\overline{A'L} : \overline{PK} = t : s,$$

$$\overline{A''L} : \overline{P'K} = t : s,$$

$$\overline{B'L} : \overline{PK'} = t' : s',$$

$$\overline{B''L} : \overline{P'K'} = t' : s',$$

jsou-li t, t', s a s' vzdálenosti bodu A a B jednak od trati, jednak od přímky směrné.

V našem případě jest ale $\overline{PK} = \overline{P'K}$, $\overline{PK'} = \overline{P'K'}$, vůbec obecně $\overline{PU} = \overline{P'U}$ atd., jest také $\overline{A'L} = \overline{A''L}$, $\overline{B'L} = \overline{B''L}$.

Dále jest $\sphericalangle A'LB' = \sphericalangle KPK'$, $\sphericalangle A''LB'' = \sphericalangle KP'K'$,

a tedy také $\quad \sphericalangle A'LB' = \sphericalangle A''LB''$

a jest tedy $\quad \triangle A''B''L \cong \triangle A'B'L$,

konečně $\quad \overline{A''B''} = \overline{A'B'}$.

Ježto body A a B libovolnou vzájemnou polohu míti mohou, a předce vždy obě odpovídající přímky $\overline{A'B'}$ a $\overline{A''B''}$ stejnou délku míti budou, tu možno pro soustavu bodu v rovině základní ležící A, B, C atd. a pro soustavu v rovině sečné ležících odpovídajících bodů A', B', C' atd. a konečně pro soustavu po otáčení bodu P do roviny základní v rovině základní ležících bodů A'', B'', C'' atd. vysloviti větu:

Je-li dána v rovině základní soustava bodu A, B, C atd., a dáme-li rovině směrné i se středem P se otáčeti okolo přímky směrné, a současně se stejnou úhlovou rychlostí rovině sečné okolo trati: tu jsou pro každou polohu bodu P a přiměřenou polohu roviny sečné bodům A, B, C atd. odpovídající soustavy bodů A', B', C' atd., A'', B'', C'' atd. všecky mezi sebou shodny.

Zvláštní případ jest, kdy bod P padne do roviny základní, což nám podává možnost zobraziti přímo v rovině základní (nákresně) soustavu prostorovou dle skutečné velikosti (kongruentně).

(Pokračování.)

Sestrojení os ellipsy, jsou-li dány její průměry sdružené.

Pro žáky středních škol napsal

V. Jeřábek,

professor při c. k. vyšší škole realné v Brně.

Šinou-li se koncové body a, b úsečky ab stálé délky c po kolmých osách X, Y v počátku o se protínajících, jest známo, že kterýkoliv bod b_1 úsečky ab vytvoří ellipsu středu o, jejíž poloosy jsou

$$\text{na X, } oa' = oa'' = a = bb_1\text{; na Y, } ob' = ob'' = b = ab_1.$$

Tvoří-li a_1 s b_1 dvojinu bodů isotomických*) v přeponě ab

---

*) Dva body téže strany trojúhelníka, které jsou souměrně sdruženy dle středu této strany, slují body *isotomické*.