

Zdeněk Horák

Určení radiantu roje z pozorovaných stop meteorů

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. 3, 222--232

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123856>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1938

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## Určení radiantu roje z pozorovaných stop meteorů.

Zdeněk Horák, Praha.

Věnováno panu profesorovi dr. Františku Nušlovi k jeho sedmdesátinám dne 3. prosince 1937.

Při stanovení radiantu meteorického roje má podstatný význam otázka vah veličin, kterými je určena poloha zakreslených stop. Podle toho, jaké váhy přisoudíme těmto veličinám, docházíme metodou nejmenších čtverců k různým podmínkám pro radiant. Prof. Svoboda řešil tuto otázku experimentálně pomocí t. zv. umělého meteoru.<sup>1)</sup> Výsledek jeho pokusů je tento<sup>2)</sup>: Ze tří podmínek vyžadujících, aby byl nejmenší součet čtverců:

- (I) vzdáleností radiantu od stop,
  - (II) úhlů sevřených stopou a spojnicí jejího středu s radiantem,
  - (III) předešlých vzdáleností a úhlů,
- dává metoda II nejsprávnější hodnoty souřadnic radiantu.

V tomto článku řeším problém teoreticky za předpokladu, že souřadnice krajních bodů všech stop jsou určeny se stejnou přesností. Tím docházím k podmínce, která v případě stejně dlouhých stop přibližně odpovídá metodě II, kterou prof. Svoboda shledal nejvýhodnější. Za hořejšího předpokladu je možno provésti určení radiantu prostě užitím vyrovnávacího počtu, stanovíme-li jakkoliv přibližnou polohu radiantu. K tomu se dobře hodí grafická metoda, kterou uvádím v tomto článku. Spočívá v tom, že každé stopě přiřadí se podle zákona polarity určitý bod a tak se dostanou body ležící přibližně na přímce, které duálně odpovídá bod, jenž je hledaným radiantem. Metoda je zvláště jednoduchá, jestliže se k vyrovnání řady bodů užije přibližné metody, kterou jsem již

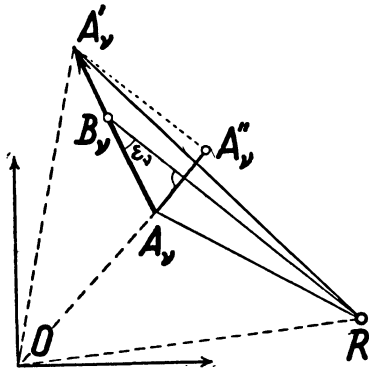
<sup>1)</sup> J. Svoboda: Versuche mit dem künstlichen Meteor, Vierteljahrsschr. d. Astron. Ges., 70, Lipsko 1935, str. 305—306.

<sup>2)</sup> J. Svoboda: Les essais expérimentaux du calcul d'un radiant du courant météorique des trajets observés, C. R. du Congrès int. d. Math. Oslo 1936, II, p. 237—238.

dříve teoreticky odvodil a prakticky vyzkoušel při měření závislosti tepelné vodivosti práškových hmot na teplotě.<sup>3)</sup> Uvedené grafické metody je možno užítí také přímo jako rychlé a pohodlné metody k určení přibližného radiantu roje. V případě řešeném početně ve 4. odst. tohoto článku dává ostatně tato metoda sama dostatečně přesný výsledek.

### 1. Základní podmínka.

Označíme-li  $\xi_v, \eta_v$  pravoúhlé souřadnice počátečního bodu  $A$ , a  $\xi'_v, \eta'_v$  souřadnice koncového bodu  $A'$ ,  $v$ -té stopy (obr. 1), platí



Obr. 1.

pro souřadnice  $m, n$  libovolného bodu stopy rovnice

$$n - \eta_v = \frac{\eta'_v - \eta_v}{\xi'_v - \xi_v} (m - \xi_v)$$

čili

$$(\eta'_v - \eta_v) m - (\xi'_v - \xi_v) n + \eta_v \xi'_v - \xi_v \eta'_v = 0. \quad (1)$$

Obecně tato rovnice bude splněna pravděpodobnějšími souřadnicemi  $X, Y$  radiantu  $R$  jen přibližně, t. j.

$$(\eta'_v - \eta_v) X - (\xi'_v - \xi_v) Y + \eta_v \xi'_v - \xi_v \eta'_v = v_v, \quad (2)$$

při čemž opravy  $v_v$  mají malé hodnoty. Abychom mohli užítí metody nejmenších čtverců, nutno určití váhy  $P_v$ , oprav  $v_v$ , pro které platí známý vzorec (srovn.<sup>4)</sup> str. 55)

$$\frac{1}{P_v} = \left( \frac{\partial v_v}{\partial \xi_v} \right)^2 \frac{1}{p_v} + \left( \frac{\partial v_v}{\partial \eta_v} \right)^2 \frac{1}{q_v} + \left( \frac{\partial v_v}{\partial \xi'_v} \right)^2 \frac{1}{p'_v} + \left( \frac{\partial v_v}{\partial \eta'_v} \right)^2 \frac{1}{q'_v}, \quad (3)$$

<sup>3)</sup> Z. Horák: Teplotní koeficienty tepelné vodivosti práškových hmot, Technický Obzor, XLV, Praha 1937, str. 68–71, 86–89. — Srovn. též Technický Obzor, XLIV, 1936, str. 200–204.

kde  $p_v, q_v; p'_v, q'_v$  jsou váhy souřadnic  $\xi_v, \eta_v; \xi'_v, \eta'_v$ . Předpokládám především, že všechny čtyři souřadnice krajních bodů téže stopy mají stejnou váhu, což podle (2) a (3) vede k výsledku

$$\frac{1}{P_v} = \frac{1}{p_v} [(Y - \eta'_v)^2 + (\xi'_v - X)^2 + (\eta_v - Y)^2 + (X - \xi_v)^2] = \frac{\delta_v^2 + \delta'_v^2}{p_v}, \quad (4)$$

značí-li  $\delta_v$  a  $\delta'_v$  vzdálenosti počátečního a koncového bodu stopy od radiantu. Kdybychom znali váhy  $p_v$ , vypočetli bychom z rov. (4)  $P_v$  a mohli bychom již napsati základní podmínku Gaussovy metody

$$\Sigma P_v v_v^2 = [Pvv] = \text{minimum}, \quad (5)$$

kteřá vede k rovnicím:

$$\frac{\partial [Pvv]}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial [Pvv]}{\partial Y} = 0 \quad (6)$$

určujícím pravděpodobnější souřadnice radiantu  $X, Y$ . Nejjednodušší předpoklad, který se mi zároveň zdá nejbezpečnějším a většinou aspoň přibližně splněným, je předpoklad, že souřadnice krajních bodů všech stop jsou odhadnuty stejně přesně. Bylo by možno sice pokládati krajní body stop pomalejších nebo jasnějších meteorů za přesněji určené, ale pochybuji, že by bylo lehké kvantitativně správně vystihnouti nějakým obecným pravidlem všechny případy. Je ovšem možno od případu k případu různými vahami  $p_v$  oceniti zvláště přesná i méně jistá pozorování, jako je tomu při každém měření. Pak platí obecný vzorec plynoucí z (4)

$$P_v = \frac{p_v}{\delta_v^2 + \delta'_v^2}, \quad (4')$$

v dalším budu však ve smyslu hořejšího předpokladu klásti všechna  $p_v = 1$ , t. j.

$$P_v = \frac{1}{\delta_v^2 + \delta'_v^2}, \quad (7)$$

čímž rovnice (5) přejde v podmínku

$$\sum_v \frac{v_v^2}{\delta_v^2 + \delta'_v^2} = \text{minimum}. \quad (8)$$

Abychom mohli tento výsledek porovnat s výsledky pokusů Svobodových, je nutno dáti této podmínce geometrický význam. Výrazy  $v_v$  je možno psáti podle (2) ve tvaru

$$v_v = \left| \begin{array}{cc} XY & \\ \xi'_v \eta'_v & \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} XY & \\ \xi_v \eta_v & \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} \xi_v \eta_v & \\ \xi'_v \eta'_v & \end{array} \right|,$$

z něhož je při pohledu na obr. 1 zřejmo, že

$$v_v = 2\Delta ORA'_v - 2\Delta ORA_v - 2\Delta OA_vA'_v = 2\Delta RA_vA'_v. \quad (9)$$

Oprava  $v_v$  je tedy rovna dvojnásobné ploše trojúhelníka tvořeného radiantem a krajními body  $v$ -té stopy. Tuto plochu nutno bráti kladně, leží-li radiant napravo od stopy, díváme-li se směrem pohybu meteoru. Je-li tedy  $B_v$  libovolný bod této stopy a  $\varepsilon_v$  úhel, který svírá se stopou jeho spojnice s radiantem, jest

$$v_v = \overline{AA'_v} \cdot \overline{RB_v} \cdot \sin \varepsilon_v. \quad (10)$$

Volme nyní body  $B_v$  tak, aby čtverce jejich vzdáleností od  $R$  byly nepřímo úměrné vahám  $P_v$ , tedy podle (7) aby

$$\overline{RB_v}^2 = k(\delta_v^2 + \delta'_v{}^2), \quad (11)$$

kde  $k$  je libovolná, ale pro všechny stopy stejná konstanta. Značí-li  $s_v$  délku stopy, lze psáti vzhledem k (10) a (11) rovnici (8) ve tvaru

$$k \sum s_v^2 \sin^2 \varepsilon_v = \text{minimum.}$$

Konstantou  $k$  lze ovšem dělit, čímž obdržíme podmínku

$$\sum (s_v \sin \varepsilon_v)^2 = \text{minimum,}$$

v níž  $k$  již nevystupuje a můžeme tedy bez újmy obecnosti voliti  $k = \frac{1}{2}$ . Pak je bod  $B_v$  určen tím, že jeho vzdálenost od radiantu je kvadratickým středem vzdáleností obou krajních bodů a budu jej stručně nazývati kvadratický střed stopy (ač jeho poloha je závislá na poloze radiantu). Součin  $s_v \sin \varepsilon_v$  je roven průmětu  $\overline{AA'_v}$  stopy do směru kolmého k přímce  $\overline{RB_v}$ , což vede k výsledku: Pravděnejpodobnější poloha radiantu je dána podmínkou, že součet čtverců stop, promítnutých kolmo k spojnicím jejich kvadratických středů s radiantem, je nejmenší.

Pro názornější představu o poloze kvadratického středu stopy odvodím jeho konstrukci. Položíme-li  $\delta'_v = \delta_v + \sigma_v$ , bude

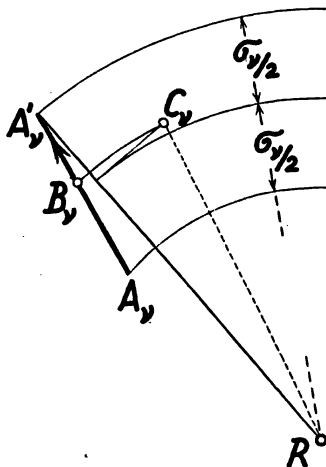
$$\overline{RB_v}^2 = \frac{\delta_v^2 + \delta'_v{}^2}{2} = \delta_v^2 + \delta_v \sigma_v + \frac{\sigma_v^2}{2} = \left(\delta_v + \frac{\sigma_v}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_v}{2}\right)^2,$$

odkud plyne tato konstrukce (obr. 2): Nanesme na kolmici, vztyčenou k spojnici  $RA'_v$ , ve vzdálenosti  $\sigma_v/2$  od  $A'_v$ , délku  $\sigma_v/2$  a koncovým bodem  $C_v$  opišme kolem  $R$  kružnici. Její průsečík se stopou je jejím kvadratickým středem  $B_v$ . Je patrné, že bod takto sestrojený leží vždy dále od  $R$  než geometrický střed stopy a odděluje krajní body v poměru, který je různý pro různé stopy. Bylo by tedy možno volbou konstanty  $k$  docílití obecně toho, aby bod  $B_v$  splynul se středem stopy, jen pro jediný meteor.

Většinou jsou však úhly  $\varepsilon$ , dosti malé, takže  $\sigma \doteq s$ . Není-li pak stopa příliš blízko radiantu, je kvadratický střed jen málo vzdálen od geometrického středu stopy a tím méně liší se navzájem poměry, v nichž kvadratické středy dělí jednotlivé stopy. Pro malé úhly můžeme nahraditi sinus úhlem, což vede k podmínce

$$\Sigma s,^2 \varepsilon,^2 = \text{minimum},$$

ve které podle předešlého můžeme s malou chybou měřiti úhly  $\varepsilon$ ,



Obr. 2.

od geometrického středu místo od středu kvadratického. Ve zvláštním případě, kdy všechny stopy jsou stejně dlouhé, máme tedy:

$$\Sigma \varepsilon,^2 = \text{minimum}.$$

Tato podmínka odpovídá právě metodě II, která podle Svobodových pokusů je nejvýhodnější ze tří jím uvažovaných metod. Ježto pokusy byly konány se stopami stejně dlouhými, vidíme, že Svobodova metoda II odpovídá přibližně podmínce zde odvozené. Z toho možno souditi, že můj předpoklad o stejně přesném určení koncových bodů všech stop byl při pokusech s umělým meteoritem aspoň přibližně splněn, ježto odchylky metodou II počítaných souřadnic radiantu od souřadnic skutečného radiantu jsou menší než jejich pravděpodobné chyby (Svoboda<sup>2</sup>).

## 2. Početní metoda vyrovnávací.

Pravděnejpodobnější souřadnice  $X, Y$  radiantu roje jsou určeny rovnicemi (8), do nichž je nutno dosaditi za  $v, z$  rovnic (2)

a za  $P_v$  hodnoty (7), po př. (4'). Číselný výpočet lze však provésti pohodlněji užitím vyrovnávacího počtu. Jedná se zde o vyrovnání pozorování zprostředkujících v případě, kdy určující rovnice jsou nerozvinuté a vzhledem k zprostředkujícím veličinám nelineární. Řešení obecného problému tohoto druhu je stručně naznačeno v Helmertově učebnici vyrovnávacího počtu<sup>4)</sup> a podrobně uvedeno v Čuříkové Počtu vyrovnávacím.<sup>5)</sup>

Určující rovnice zní podle (1)

$$(\eta'_v - \eta_v) X - (\xi'_v - \xi_v) Y + \eta_v \xi'_v - \xi_v \eta'_v = 0.$$

Buďte  $X_0, Y_0$  přibližné hodnoty, které se od nejvýhodnějších hodnot

$$X = X_0 + x, Y = Y_0 + y \quad (12)$$

liši o malé korekce  $x, y$ , jichž čtverce lze zanedbat. Označíme-li

$$(\eta'_v - \eta_v) X_0 - (\xi'_v - \xi_v) Y_0 + \eta_v \xi'_v - \xi_v \eta'_v = l_v, \quad (13)$$

$$\eta'_v - \eta_v = a_v, \quad \xi'_v - \xi_v = -b_v, \quad (14)$$

jsou rovnice oprav

$$v_v = a_v x + b_v y + l_v. \quad (15)$$

Opravy mají váhy absolutních členů  $l_v$ :

$$\frac{1}{P_{ov}} = \left(\frac{\partial l_v}{\partial \xi_v}\right)^2 \frac{1}{p_v} + \left(\frac{\partial l_v}{\partial \eta_v}\right)^2 \frac{1}{q_v} + \left(\frac{\partial l_v}{\partial \xi'_v}\right)^2 \frac{1}{p'_v} + \left(\frac{\partial l_v}{\partial \eta'_v}\right)^2 \frac{1}{q'_v}$$

a mají za dříve učiněného předpokladu  $p_v = q_v = p'_v = q'_v$  hodnoty

$$P_{ov} = \frac{P_v}{\delta_{ov}^2 + \delta'_{ov}{}^2} \text{ po př. } P_{ov} = \frac{1}{\delta_{ov}^2 + \delta'_{ov}{}^2} \quad (16)$$

značí-li  $\delta_{ov}, \delta'_{ov}$  vzdálenosti počátečního a koncového bodu stopy od přibližného radiantu  $R_0(X_0, Y_0)$ . Druhá rovnice (16) platí v případě, že pokládáme všechny váhy  $p_v$  za stejné a klademe je rovny jedné (srovn. (7)). Normální rovnice sestavíme podle známého předpisu:

$$\begin{aligned} [P_0aa] x + [P_0ab] y + [P_0al] &= 0, \\ [P_0ab] x + [P_0bb] y + [P_0bl] &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

a řešíme obvyklým způsobem, čímž získáme korekce  $x, y$ . Koeficienty vypočteme ze změřených souřadnic krajních bodů stop. Pohodlněji je však získáme graficky na podkladě jejich geometrického významu: Koeficienty  $a_v, b_v$  jsou prostě rozdíly souřadnic krajních bodů. Vyznačíme-li na mapě také bod  $R_0$ , sestrojíme

<sup>4)</sup> F. R. Helmert - H. Hohenner: Die Ausgleichsrechnung nach d. Meth. d. kleinsten Quadrate, B. G. Teubner, 3. vyd., 1924, str. 173.

<sup>5)</sup> Česká matice technická (č. sp. 173), Praha 1936, odst. 46. — V následujícím předržím se názvosloví i označení této knihy.

$\sqrt{\delta_{0r}^2 + \delta'_{0r}^2}$  jako přeponu pravouhlého trojúhelníka o odvěsnách  $\delta_{0r}$ ,  $\delta'_{0r}$  a  $l_v$ , jako součin délky stopy  $s$ , a kolmé vzdálenosti  $R_0$  od stopy. Součin je kladný, lež-li  $R_0$  napravo od stopy, uvažované jako vektor směru souhlasného s rychlostí meteoru.

Uvedený postup je správný, pokud  $X_0$ ,  $Y_0$  jsou dostatečně přesné, a čím přesnější jsou, tím snáze se provádí výpočet korekcí  $x$ ,  $y$ . Proto je výhodno užítí k určení souřadnic  $X_0$ ,  $Y_0$  nějaké přibližné metody na př. grafické metody, kterou uvádím v následujícím odstavci.

### 3. Metoda grafická.

Metoda pozorování meteorů je v podstatě metodou grafickou. I když určíme polohu radiantu výpočtem, máme co činiti s veličinami, které přímo nepozorujeme, nýbrž které odvozujeme graficky ze zakreslených stop. Při tom dopouštíme se nových chyb, ježto zakreslené stopy nevyklučují jistou libovůli v odhadu souřadnic krajních bodů. Proto hledal jsem vhodnou metodu grafickou — odpovídající grafickému charakteru metody pozorovací, která by dovolovala přímo na zakreslovací mapě sestrojiti radiant roje. Metodu založil jsem na geometrickém zákonu duality. Podle tohoto zákona, jak známo, zůstávají v rovině všechny geometrické věty v platnosti, zaměníme-li body a přímky. V našem případě jde o stanovení pravděnejpodobnějšiho průsečku přímek, které teoreticky mají procházeti jedním bodem. Duálně odpovídá této úloze problém najíti pravděnejpodobnějši polohu přímky, na niž teoreticky mají ležeti body oněm přímekám příslušné. Přiřadíme-li tedy nějakou duální transformaci každé stopě určitý bod, můžeme přímku, na které mají ležeti všechny tyto body, stanovití vyrovnáním lineární závislosti mezi souřadnicemi bodů. Duálně této přímce odpovídající bod je pak hledaným radiantem.

Výhodno je voliti za duální transformaci polaritu, jejíž základní kuželosečkou je kružnice. Narýsujeme tedy na mapě, ve které jsou zakresleny stopy meteorů, kružnici, jejíž střed neleží příliš blízko žádné ze stop, a sestrojíme známým způsobem pro každou stopu její pól vzhledem k narýsované kružnici.<sup>6)</sup> Tím dostaneme řadu bodů, které přibližně leží na přímce, jejíž pól vzhledem k dané kružnici je již hledaným radiantem roje. Nejvýhodnějši

<sup>6)</sup> Protíná-li (prodloužená) stopa kružnici, je jejím pólem průsečík tečen ke kružnici, sestrojených v průsečících stopy s kružnicí. Neprotíná-li stopa kružnici, sestrojíme průměr kolmý ke stopě a na něm bod, který tvoří s patou kolmice a koncovými body průměru harmonickou čtveřinu. Konstrukci čtvrtého bodu harmonického provedeme známým způsobem pomocí rovnoběžek vedených koncovými body průměru, jež protneme příčkou jdoucí průsečíkem průměru se stopou.



polohu této přímky najdeme nejspíše některou z grafických metod vyrovnávacích.<sup>7)</sup>

Tím by bylo grafické řešení problému provedeno, kdybychom znali váhy jednotlivých pólů stop. Obecně odpověď na tuto otázku není jednoduchá, neboť váhy pólů stop závisí také na volbě kružnice. Zavedením vah by tedy grafická metoda pozbyla na své jednoduchosti a tím také na své výhodnosti. Chceme-li, aby byla jednoduchá, musíme se spokojiti s menší přesností. Proto učiním předpoklad, že póly všech stop mají stejnou váhu, který vede k pohodlné grafické metodě, již lze užiti jako metody přibližné. Nezjišťujeme-li totiž váhy bodů, je zbytečno přesně je vyrovnávati a stačí k stanovení poláry radiantu některá metoda přibližná, čímž se konstrukce velmi zjednoduší.

Vhodná je zde na př. přibližná metoda vyrovnání lineární závislosti, kterou jsem odvodil v odst. 1. již citované práce<sup>3)</sup>, při čemž jsem ukázal, že lze ji upraviti na metodu grafickou (l. c., str. 70). Postup konstrukce je následující: Rozdělíme všechny body do dvou stejně početných<sup>8)</sup> skupin kolmicí k odhadnutému směru vyrovnané přímky a sestrojíme těžiště první i druhé skupiny bodů. Spojnice obou těžišť je přibližná poloha vyrovnané přímky. Konstrukci těžiště každé skupiny provádíme nejspíše postupně, sestrojíme nejprve těžiště dvojic bodů a pak těžiště těchto těžišť, která pak mají váhu dvojnásobnou atd. Konstrukce je téměř stejně jednoduchá i v případě bodů různé váhy.

#### 4. Příklad.

K objasnění uvedené metody provedu určení radiantu z deseti zakreslených stop umělého meteoru, pozorovaných prof. Svobodou na astronomické observatoři českého vysokého učení technického v Praze. Obraz 3 představuje mapu s pravoúhlou souřadnou soustavou přímek. Zakreslené stopy meteoru jsou označeny čísly 1 až 10, umístěnými u koncových bodů stop opatřených šípkami udávajícími směr letu. Na mapě byla provedena konstrukce přibližné polohy radiantu grafickou metodou popsanou v odst. 3. Body označené 1 až 10 jsou póly stop 1 až 10 vzhledem ke kružnici  $K$  opsané kolem středu  $S$ . Bod  $I$  je těžiště levé poloviny bodů, t. j. pólů: 2, 7, 9, 1, 10 a bod  $II$  je těžiště pravé poloviny, t. j.

<sup>7)</sup> Viz na př. <sup>5)</sup> odst. 57.

<sup>8)</sup> Je-li počet bodů lichý, vedeme kolmicí prostředním bodem a počítáme jej do obou skupin s poloviční vahou. Mají-li však body jedné skupiny větší odchylky než body skupiny druhé, připojíme lichý bod ke skupině první. Podobně je nutno (i v případě sudého počtu bodů) vzíti do jedné skupiny více bodů, jestliže vykazuje značně větší rozptyl než druhá a to tak, aby těžiště obou skupin byla určena přibližně se stejnou střední chybou.



vztahu (15). Dosazením součtů, uvedených v posledním řádku, do rovnic (17) obdržíme normální rovnice:

$$139,9x + 23,6y - 2,4 = 0,$$

$$23,6x + 274,9y - 13,4 = 0,$$

jichž řešením plynou korekce

$$x = 0,009^\circ, \quad y = 0,048^\circ. \quad (19)$$

### Schema výpočtu.

$v$	$a$	$b$	$l$	$P_0$	$P_0aa$	$P_0ab$	$P_0al$	$P_0bb$	$P_0bl$	$v$	$P_0vv$
1	+2,0	+3,5	-0,40	4,30	17,2	+30,1	-3,4	52,7	-6,0	-0,22	0,20
2	+3,8	-0,2	-0,57	1,84	26,6	-1,4	-4,0	0,1	+0,2	-0,55	0,57
3	-1,0	-4,2	+0,60	3,02	3,0	+12,7	-1,8	53,3	-7,6	+0,39	0,47
4	-2,0	+4,0	0,00	5,26	21,0	-42,1	0,0	84,2	0,0	+0,08	0,03
5	+1,9	+4,0	+0,15	2,94	10,6	+22,3	+0,8	47,0	+1,7	+0,26	0,20
6	+2,1	-4,2	+0,80	1,03	4,5	-9,1	+1,7	18,2	-3,5	+0,61	0,39
7	+3,7	+0,2	+0,74	3,02	41,3	+2,2	+8,3	0,1	+0,4	+0,78	1,85
8	+2,5	-3,5	-3,11	0,41	2,6	-3,6	-3,2	5,0	+4,5	-3,26	4,35
9	+3,3	+2,5	+0,26	1,09	11,9	+9,0	+1,0	6,8	+0,7	+0,41	0,19
10	-1,7	-3,7	+1,87	0,55	1,6	+3,5	-1,8	7,5	-3,8	+1,68	1,55
[ ]					139,9	+23,6	-2,4	274,9	-13,4		9,80

Střední chyba jedničky váhy

$$\mu = \sqrt{\frac{[P_0vv]}{10-2}} = \pm 1,1^\circ$$

a váhy korekcí

$$p_x = [P_0aa] - \frac{[P_0ab]^2}{[P_0bb]} = 138, \quad p_y = [P_0bb] - \frac{[P_0ab]^2}{[P_0aa]} = 271,$$

takže jejich střední chyby

$$m_x = \frac{\mu}{\sqrt{p_x}} = \pm 0,09^\circ, \quad m_y = \frac{\mu}{\sqrt{p_y}} = \pm 0,07^\circ.$$

Pravděpodobnější souřadnice radiantu jsou tedy podle (12), (18) a (19):

$$X = 11,32^\circ \pm 0,06^\circ, \quad Y = 4,78^\circ \pm 0,05^\circ. \quad (20)$$

K souřadnicím připojené pravděpodobné chyby jsou větší než korekce (19); vidíme tedy, že v tomto případě přibližná grafická metoda dává dostatečně přesný výsledek. Svobodova metoda II vede k výsledku [2] groupe 7]

$$X' = 11,37^\circ, \quad Y' = 4,78^\circ,$$

tedy v mezích přesnosti úplně shodnému s hodnotami (20), což odpovídá dříve zjištěnému vztahu obou metod.

Z předešlého příkladu je patrna užitečnost grafické metody. I když se nespokojíme s výsledkem, který poskytuje sama o sobě, usnadní značně sestavení a řešení normálních rovnic i určení chyb, ježto lze se omeziti na zcela malý počet míst.

\*

Sur la détermination du radiant d'un courant météorique observé.

(Résumé de l'article précédent.)

En appliquant la méthode des moindres carrés au problème du calcul du radiant d'un courant météorique, on obtient des résultats différents suivant les poids adoptés pour les trajets observés. M. Svoboda a étudié le problème au moyen d'expériences faites sur un météore artificiel<sup>1)</sup> et il a trouvé comme étant la plus exacte la méthode fondée sur la supposition que la somme des carrés des angles, dont il faut faire tourner les trajets dessinés autour de leurs centres pour les faire passer par le radiant, est minima.<sup>2)</sup>

Dans cet article, j'envisage la question de la détermination du radiant du point de vue théorique, en me plaçant dans l'hypothèse que les coordonnées des extrémités de tous les trajets, obtenus par l'observation, sont d'égale précision. Par là, je parviens à une condition qui, en cas de trajets d'égale longueur, se réduit à peu près à celle trouvée par M. Svoboda comme la plus exacte. Pour pouvoir y appliquer les méthodes de compensation connues, on a besoin de valeurs approchées des coordonnées du radiant. On les obtient, par exemple, en se servant de la méthode approximative graphique que j'ai imaginée dans ce but: On trace une circonférence convenablement choisie et l'on construit, pour chaque trajet météorique, son pôle relatif à la circonférence. Comme tous les trajets pointent — approximativement — vers le radiant du courant, leurs pôles sont alors sensiblement placés sur une droite à savoir la polaire du radiant. Il suffit donc de trouver d'une manière quelconque la position de cette droite et de construire son pôle, pour avoir le radiant cherché. On obtient facilement la position de la polaire par le procédé approximatif suivant: On divise les pôles des trajets en deux groupes égaux et l'on construit les centres de gravité de chacun d'eux. Ceci fait, la droite, qui joint ces deux centres, est la polaire du radiant approximatif. En terminant l'article, je montre par un exemple numérique que la méthode graphique, dont je viens de parler, donne elle-même, dans le cas présent, les coordonnées du radiant avec une précision très satisfaisante.