Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Zahradník

O skupinách bodů dotyčných na listu Descartesově

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 5, 282--286

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123854

O skupinách bodů dotyčných na listu Descartesově.

Napsal

Dr. K. Zahradník,
professor na universitě v Záhřebu.

J. Liouville našel následující zajímavou geometrickou větu: *) *Body dotyčné rovnoběžných tečen algebraické křivky mají bod středních vzdáleností nezávislý na směru tečen.*

V následujícím přihlížeti budeme k Descartes-ově lístu, i dokážeme, že u této křivky bod středních vzdáleností dotyčných bodů styku tečen sestrojených z kteréhokoliv bodu jest na poloze tohoto bodu zcela nezávislý.

Rovnice listu Descartes-ova **) jsou

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{3\,au}{1+u^3} \\ y &= \frac{3\,au^2}{1+u^3}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Rovnice tečny v bodě u je

$$u\,(u^3-2)\,x+(1-2u^3)\,y+3au^2=0. \qquad (2)$$

Jsou-li x, y souřadnice pevného bodu P v rovině listu, obdržíme z relace (2) parametry dotyčných bodů tečen z bodu P na list položených, co kořeny rovnice (2), totiž:

$$xu^4-2yu^3+2au^2-2xu+y=0. \qquad (3)$$

Lze tudíž z bodu P čtyry tečny vésti na list Descartes-ův; je-li M bod středních vzdáleností bodů dotyčných, α, β jeho souřadnice, je vzhledem ku (3):

$$\alpha=\frac{3a}{4}\sum_{h=1}^{4}\frac{u_h}{1+u_h^3}=0,$$

*) Memoire sur quelques propositions générales de Géométrie et sur la théorie de l'élimination dans les équations algebriques. Liouville „Journal de Mathématiques". VI. pg. 345.

**) Viz mé pojednání: „Zur Theorie der Curven dritter Ordnung und vierter Classe". Zprávy o zasedání kr. uč. společnosti. Praha 1873.

$$\beta = \frac{3a}{4} \sum_{h=1}^{4} \frac{u_h^2}{1 + u_h^3} = 0,$$

t. j. dvojný bod Descartes-ova listu jest společný bod středních vzdáleností bodů dotyčných pro libovolnou polohu bodu P.

2. Označíme střed tetivy $\overline{u_h u_k}$ s u_{hk}, je dvojný bod O průsekem *) spojnice $\overline{u_{12} u_{34}}$ se spojnicí $\overline{u_{14} u_{23}}$. Této vlastnosti můžeme upotřebiti ku sestrojení bodu dotyčného u_4, známe-li body styku u_1, u_2, u_3; učiňmež

$$\overline{u_{12}O} = Om$$
$$\overline{u_{23}O} = On,$$

průsek $\overline{u_3 m} \cdot \overline{u_1 n}$ je hledaný bod u_4.

3. Je-li $u_3 \equiv u_{34} \equiv t$, je i $P \equiv t$. Dle čl. 2. je dvojný bod O střed tetivy $\overline{u_{12} u_{34}}$; nyní máme $u_{34} = t\,(x, y)$, tím jsou souřadnice bodu u_{12}

$$-x, \quad -y,$$

t. j. bod t je společným tangencialným bodem bodů u_1, u_2.

Resultat tento najdeme i přímo. Parametry dotyčných bodů tečen jdoucích bodem P (xy) obdržíme co kořeny rovnice (3). Je-li P bodem listu, t jeho parametr, platí

$$u\,(u^3 - 2)\,t + (1 - 2u^3)\,t^2 + u^2\,(1 + t^3) = 0.$$

Zkrátíme-li činitelem $(u - t)^2$, jenž nám káže, že dvě tečny z bodu P se sjednocují s tečnou téhož bodu, obdržíme

$$u^2 t = -1. \tag{4}$$

Kořeny u_1, u_2 této rovnice jsou parametry bodů dotyčných tečen vedených z bodu $P \equiv t$ na list Descartesův (nepočítaje v to tangentu v bodě t, již jsme dělením s $(u - t)^2$ vyloučili; tyto kořeny vyhovují relacím:

$$u_1 + u_2 = 0, \qquad u_1 u_2 = \frac{1}{t}. \tag{5}$$

---

*) Vychází bezprostředně z předcházející věty.

Značí-li ξ', η' souřadnice bodu u_{12}, je vzhledem ku rovnicím (3)

$$\xi' = \frac{3a}{2}\sum_{h=1}^{2}\frac{u_h}{1+u_h^3} = -\frac{3at}{1+t^3}$$

$$\eta' = \frac{3a}{2}\sum_{h=1}^{2}\frac{u_h^2}{1+u_h^3} = -\frac{3at^2}{1+t^3}$$

jako dříve.

Opíše-li bod P daný list, opíše u_{13} list symetricky s daným listem vzhledem k dvojnému bodu O.

4. Vyjádříme-li u pomocí t v rovnici (3), obdržíme

$$(4t^3+1)\,x^2+10t^2xy+(t^4+4t)\,y^2-6atx-6at^2y+9a^2t^2=0. \quad (6)$$

Je-li bod P(xy) dán, obdržíme z této rovnice řešením dle t parametry tangencialných bodů k dotyčným bodům tečen vycházejících z bodu P; naopak, vytkneme-li si bod t jako bod tangencialní, leží všechny body P, jejichž spojnice s t, tudíž $\overline{Pt}$ se listu dotýká v určitém bodě u, na kuželosečce (6). Ta kuželosečka rozpadá se ve dvě přímky, neb diskriminant rovnice kuželosečky identicky se rovná nulle, i to za každou hodnotu t.

Ty dvě přímky jsou tečny tu_1, tu_2, z bodu t na list vedené.

Dle Liouvillea je pro každý úběžný bod P součet úseček dotyčných bodů tečen, jež bychom z bodu P_∞ na algebraickou křivku vedli, nezávislý na směru tečen.*) U listu Descartesova platí pro každý bod P:

$$\sum_1^4 x_h = 0, \qquad \sum_1^4 y_h = 0. \qquad (7)$$

Jsou-li ξ_h, η_h souřadnice středu křivosti S_h bodu $u_h\,(x_h, y_h)$, ϱ_h poloměr křivosti $\overline{u_h S_h}$ bodu u_h, a je-li τ_h úhel, jejž tečna téhož bodu činí s positivným směrem osy X, máme:

*) Viz: Serret — Höhere Algebra (překlad Wertheimův). 1868, díl I., pag. 498; neb Liouville l. c.

$$x = \xi - \varrho \sin \tau$$
$$y = \eta + \varrho \cos \tau,$$

tudíž je vzhledem k rovnicím (7)

$$\sum_1^4 \xi_h = \sum_1^4 \varrho_h \sin \tau_h$$

$$\sum_1^4 \eta_h = -\sum_1^4 \varrho_h \cos \tau_h.$$

Je-li nyní $S_h^{(k)}$ střed křivosti na $(k+1)^{\text{té}}$ evolutě dané křivky příslušný k bodu u_h, (α_k, β_k) střed středních vzdáleností bodů $S_h^{(k-1)}$, $h = 1, 3, 3, 4$, platí:

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}\sum_1^4 \varrho_h \sin \tau_h$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{4}\sum_1^4 \varrho_h \cos \tau_h.$$

Je-li bod P úběžný, je $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \tau$, tudíž

$$\alpha_1 = \frac{\sin \tau}{4}\sum \varrho$$

$$\beta_1 = -\frac{\cos \tau}{4}\sum \varrho.$$

Jest však

$$\sum dx = \sum ds \cos \tau = \cos \tau \sum ds = 0,$$

tím též

$$\sum \varrho = 0,$$

tudíž

$$\alpha_1 = 0, \qquad \beta_1 = 0.$$

Podobně bychom našli

$$\alpha_{k+1} = 0 \qquad \beta_{k+1} = 0,$$

t. j. *bodem středních vzdáleností bodů na kterékoli evolutě Des-*

*cartesova listu, příslušných dotyčným bodům rovnoběžných tečen daného listu, je dvojný bod tohoto listu.**)

Poznámka o jisté ploše mimosměrek čtvrtého stupně.

Napsal

Dr. Ant. Sucharda,
professor v Praze.

1. V rovině E dána ellipsa E, $\overline{ab}$ jest její průměr libovolný, $\overline{cd}$ průměr jemu sdružený, s jest středem ellipsy. V rovině E′ s rovinou E stejnosměrné jest ellipsa E', $a'b'$ její průměr libovolný, $c'd'$ průměr jemu sdružený, s' její střed. Body aa' bb' cc' dd' ss' určeny jsou mimosměrky A B C D S.

Přímkami A B a rovinou E jako útvary řídícími určen jest hyperbolický paraboloid ¹H, k jehož površkám náleží přímky ab $a'b'$. Půlící body úseků površek mezi přímkami A B obsažených vyplňují přímku hyperbolickému paraboloidu náležitou. Poněvadž k těmto bodům náleží středy s s' ellips E E', jest touto přímkou jejich spojnice S. Přímky C D určují s rovinou E jako útvary řídicí hyperbolický paraboloid ²H, jemuž přímky cd $c'd'$ náleží jako površky druhé soustavy. Také zde půlící body příslušných úseků všech površek s rovinou E stejnosměrných vytvořují přímku, površku to druhé soustavy; poněvadž dvěma půlícími body i zde jsou středy s s', jest touto přímkou zase přímka S těmi body určená. I jest patrno, že rovinami osnovy E protínají se přímky A B C D pokaždé ve čtyřech bodech, z nichž první dva určují jeden, druhé dva druhý z úseků, jež v bodě s vzájemně se protínají a půlí. Lze tedy míti každé takové čtyři body za konce dvou sdružených průměrů jediné ellipsy. Takto nabudeme nekonečně mnoha ellips v rovinách osnovy E, jejichž středů geometrickým místem jest přímka S. Geo-

*) Viz: K. Zahradník: Vlastitost skupina sticišta na Descartesovu listu. Rad jugosl. akademije. Knjiga CIV. pg. 115.