Jan Koloušek

Řešení číselných rovnic vyšších prokladem arithmetických řad rozdílových. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 5, 298--312

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123846`

$$
\begin{aligned}
a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 &= (a_1 + a_2 + a_3)\,\varepsilon_a = \mathrm{A}\varepsilon_a\,,\\
b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3 &= (b_1 + b_2 + b_3)\,\varepsilon_b = \mathrm{B}\varepsilon_b\,,\\
c_1\varepsilon_1 + c_2c_2 + c_3\varepsilon_3 &= (c_1 + c_2 + c_3)\,\varepsilon_c = \mathrm{C}\varepsilon_c\,,\\
d_1\varepsilon_1 + d_2\varepsilon_2 + d_3\varepsilon_3 &= (d_1 + d_2 + d_3)\,\varepsilon_d = \mathrm{D}\varepsilon_d\,;
\end{aligned}
$$

pak platí rovnice

$$\varepsilon_d = x\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}\,.\,\varepsilon_a + y\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}\,.\,\varepsilon_b + z\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}\,\varepsilon_c. \tag{3}$$

Grafické řešení ale dává

$$\varepsilon_d = \frac{n}{m+n+p}\,\varepsilon_a + \frac{m}{m+n+p}\,\varepsilon_b + \frac{p}{m+n+p}\,\varepsilon_c\,, \tag{4}$$

při čemž

$$
\begin{aligned}
\overline{\varepsilon_a\varepsilon_{ab}} : \overline{\varepsilon_{ab}\varepsilon_b} &= n : m\,,\\
\overline{\varepsilon_{ab}\varepsilon_d} : \overline{\varepsilon_d\,\varepsilon_c} &= p : m + n.
\end{aligned}
$$

Z těchto rovnic snadno vypočteme poměry

$$\frac{m}{m+n+p}\,,\qquad \frac{n}{m+n+p}\,,\qquad \frac{p}{m+n+p}\,,$$

načež jest

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{A}}\cdot\frac{n}{m+n+p}\,,\\
y &= \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{B}}\cdot\frac{m}{m+n+p}\,,\\
z &= \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}\cdot\frac{p}{m+n+p}.
\end{aligned}
$$

Řešení číselných rovnic vyšších prokladem arithmetických řad rozdílových.

Podává

Jan Koloušek,

professor československé obchodní akademie v Praze.

(Dokončení.)

Pomocí prokladu arithmetických řad však řešení této rovnice jest nepoměrně rychlejší a zároveň postup jeho *souměrnější a jas-*

nější. Doklad toho podá se snadno, když skutečně vedle hořejšího řešení uvedeme, jak se najde totéž procento prokladem řady.

Rovnici (I) můžeme psáti:

$$D = a\left(\frac{100}{p} - \frac{100}{pu^n}\right)$$

a místo výrazu

$$\frac{100}{p} - \frac{100}{p \,.\, u^n}$$

zavedeme dle „Národohospodářské arithmetiky" (tam to tak označeno po vzoru H. Charlon-ova spisu: „Théorie mathématique des opérations financières") označení $f_n(p)$, takže

$$D = a\left(\frac{100}{p} - \frac{100}{pu^n}\right) = af_n(p);$$

tedy

$$f_n(p) = \frac{D}{a},$$

či dle daného příkladu

$$f_{35}(p) = \frac{1{,}000.000}{55.000} = 18{\cdot}181818$$

(béřeme pouze šest desetinných míst).

Pro hodnoty $f_n(p)$ jsou pak sestaveny tabulky, jdou od $\frac{1}{8}\%$, $\frac{2}{8}\%$ atd. vždy o $\frac{1}{8}\%$ výše (viz „Národohospodářskou arithmetiku" tab. IV. str. 161—220).

V tabulkách těch najdeme:

$$f_{35}(4\tfrac{1}{8}) = 18{\cdot}351946,$$
$$f_{35}(4\tfrac{1}{4}) = 18{\cdot}047288;$$

tedy patrno, že v našem příkladě

$$f_{35}(p) = 18{\cdot}181818$$

leží mezi těmito hodnotami, či že

$$4\tfrac{1}{4} > p > 4\tfrac{1}{8}.$$

Zároveň řadu hodnot $f_n(p)$ lze považovati za arithmetickou řadu rozdílovou vyššího stupně. Volme si k tomu cíli hodnoty za sebou jdoucí z této řady:

$$\begin{aligned} a_1 &= f_{35}(4\tfrac{1}{8}) = 18{\cdot}351946, \\ a_2 &= f_{35}(4\tfrac{1}{4}) = 18{\cdot}047288, \\ a_3 &= f_{35}(4\tfrac{3}{8}) = 17{\cdot}750390, \\ a_4 &= f_{35}(4\tfrac{1}{2}) = 17{\cdot}461012 \end{aligned}$$

a utvořme difference prvé, druhé a třetí

$$\begin{aligned} \varDelta a_1 &= a_2 - a_1 = -0{\cdot}304658, \\ \varDelta a_2 &= a_3 - a_2 = -0{\cdot}296898, \\ \varDelta a_3 &= a_4 - a_3 = -0{\cdot}289378, \\ \varDelta^2 a_1 &= \varDelta a_2 - \varDelta a_1 = 0{\cdot}007760, \\ \varDelta^2 a_2 &= \varDelta a_3 - \varDelta a_2 = 0{\cdot}007520, \\ \varDelta^3 a_1 &= \varDelta^2 a_2 - \varDelta^2 a_1 = -0{\cdot}000240. \end{aligned}$$

Difference se stále zmenšují a můžeme tedy řadu a_1, a_2, a_3, a_4 považovati za řadu třetího stupně a klásti pak interpolovaný člen

$$a_{1+x} = f_{35}(p) = 18{\cdot}181818.$$

Dle známé poučky o arithmetických řadách platí rovnice:

$$a_{1+x} = a_1 + x\varDelta a_1 + \frac{x(x-1)}{2}\varDelta^2 a_1 + \frac{x(x-2)(x-3)}{2.3}\varDelta^3 a_1 + \ldots \qquad \text{(II)}$$

V rovnici druhé vynechejme pro prvé přiblížení $\varDelta^2 a_1$ a $\varDelta^3 a_1$, i dostaneme první přibližnou hodnotu x_1:

$$\begin{gathered} a_{1+x} = a_1 + x_1 \varDelta a_1, \\ 18{\cdot}181818 = 18{\cdot}351946 + x_1 . -0.304658, \\ x_1 = \frac{a_{1+x} - a_1}{\varDelta a_1} = \frac{-0{\cdot}170128}{-0{\cdot}304658} = 0{\cdot}56. \end{gathered}$$

Pro druhé přiblížení klaďme již do rovnice (II) výsledek přiblížení prvého:

$$a_{1+x} = a_1 + x_2 \varDelta a_1 + x_2 \frac{0{\cdot}56 - 1}{2}\varDelta^2 a_1 + x_2 . \frac{0{\cdot}56-1}{2} . \frac{0{\cdot}56-2}{3}\varDelta^3 a_1$$

při čem x_2 označujeme druhou přibližnou hodnotu. Dle toho jest:

$$18{\cdot}181818 = 18{\cdot}351946 - x_2\, 0{\cdot}304658 - x_2\, 0{\cdot}22 \,.\, 0{\cdot}007760$$
$$- x_2\, 0{\cdot}22 \,.\, 0{\cdot}48 \,.\, 0{\cdot}000240$$

či

$$x_2 = \frac{-0{\cdot}170128}{-0{\cdot}306390} = 0{\cdot}55526\,,$$

kteréžto přiblížení již postačuje.

Ukazovatel v řadě $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ roste, jak z hořejšího patrno, vždy o 1, když procento vzroste o $\frac{1}{8}$. Je-li tedy dle předešlého výpočtu ukazovatel v a_{1+x} větší nežli 1 o 0·55526, jest procento v $f_{35}(p)$ větší o $\frac{1}{8}$ této hodnoty nežli procento v

$$a_1 = f_{35}(4\tfrac{1}{8})\,.$$

Jest tedy

$$p = 4\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\,.\,0{\cdot}55526 = 4{\cdot}194408,$$

co se od předešlého výpočtu dle regule falsi liší o 2 na šestém desetinném místě; i tento rozdíl se ještě opraví, kdybychom hledali třetí přiblížení x_3 na základě druhého x_2 z rovnice (II):

$$a_{1+x} = a_1 + x_3 \Delta a_1 + x_3 \frac{x_2 - 1}{2} \Delta^2 a_1$$
$$+ x_3 \,.\, \frac{x_2 - 1}{2} \,.\, \frac{x_2 - 2}{3} \Delta^3 a_1,$$

z čeho

$$x_3 = 0{\cdot}555232$$

a tedy

$$p = 4\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} x_3 = 4{\cdot}194404.$$

Tato hodnota jest úplně správná na 6 desetinných míst a zároveň z ní vidíme, že při řešení dle regule falsi následkem oprav braných z logarithmů sedmimístných nemohli jsme se uvarovati chyby (arci nepatrné) na 6-tém místě, která tímto řešením na základě prokladu řad zúplna odpadá, jak bychom se zcela bezpečně přesvědčili, kdybychom vzali na pomoc difference čtvrté ($\Delta^4 a_1$) a hledali pak čtvrté přiblížení.

Počítání hodnoty p prokladem jde mnohem rychleji, zavedeme-li místo řady $f_n(p)$ řadu z komplementů logarithmických $10 - \log f_n(p)$, či jak krátce míníme psáti řadu $ct \log f_n(p)$

Je totiž v našem příkladě

$$\begin{aligned} a_1 &= ct \log f_{35}(4\tfrac{1}{8}) = 8\cdot7363176 \\ a_2 &= ct \log f_{35}(4\tfrac{1}{4}) = 8\cdot7435880 \\ a_3 &= ct \log f_{35}(4\tfrac{3}{8}) = 8\cdot7507921 \\ a_4 &= ct \log f_{35}(4\tfrac{1}{2}) = 8\cdot7579306. \end{aligned}$$

(Řady komplementů těchto uvedeny rovně na cit. místě „Národohospodářské Arithmetiky") a tedy bude

$$\begin{aligned} \Delta a_1 &= a_2 - a_1 = 0\cdot0072704 \\ \Delta a_2 &= a_3 - a_2 = 0\cdot0072041 \\ \Delta a_3 &= a_4 - a_3 = 0\cdot0071385 \\ \Delta^2 a_1 &= \Delta a_2 - \Delta a_1 = -0\cdot0000663 \\ \Delta^2 a_2 &= \Delta a_3 - \Delta a_2 = -0\cdot0000656 \\ \Delta^3 a_1 &= \Delta^2 a_2 - \Delta^2 a_1 = 0\cdot0000007. \end{aligned}$$

Dále je

$$ct \log f_{35}(p) = 10 - \log 18\cdot181818 = 8\cdot7403626$$

a položíme-li opět

$$a_{1+x} = ct \log f_{35}(p),$$

bude pro prvé přiblížení x_1

$$\begin{aligned} a_{1+x} &= a_1 + x_1 \Delta a_1 \\ x_1 &= \frac{0\cdot0040450}{0\cdot0072704} = 0\cdot556 \end{aligned}$$

a pro druhé přiblížení x_2

$$\begin{aligned} a_{1+x} = a_1 + x_2 \Delta a_1 &+ x_2 \, . \, \frac{0\cdot556 - 1}{2} \Delta^2 a_1 \\ &+ x_2 \frac{0\cdot556 - 1}{2} \, . \, \frac{0\cdot0556 - 2}{3} \Delta^3 a_1, \end{aligned}$$

z čeho

$$x_2 = 0\cdot55523,$$

co úplně postačuje a zároveň je viděti, že na toto přiblížení difference $\Delta^3 a_1$ nemá skoro žádného vlivu a že lze bez újmy považovati řadu těchto komplementů za řadu arithmetickou druhého stupně.

Arci při tomto řešení prokladem bylo předpokládáno, že jest dána pro určitou rovnici n-tého stupně:

$$\varphi_n(x) = 0$$

řada hodnot $\varphi_n(x_1)$, $\varphi_n(x_1 + d)$, $\varphi_n(x_1 + 2d)$, $\varphi_n(x_1 + 3d), \ldots$ dosti těsná, aby se dala proložiti a že platí zároveň tento vztah:

$$x_1 < x < x_1 + d$$

či jinými slovy, že funkce $\varphi_n(x_1)$ má opačné znaménko nežli funkce $\varphi_n(x_1 + d)$.

Takovouto řadu si však vždy můžeme dosti snadno zjednati. Ukáže se to na kterémkoli příkladě číselné rovnice:

Budiž dána kuʼ př. tato rovnice šestého stupně:

$$\varphi(x) = x^6 - x^3 + x - 2 = 0.$$

Patrně je pro jediný positivní kořen této rovnice platna relace

$$\varphi(1) = -1 \text{ a}$$
$$\varphi(2) = 56$$

a tedy positivní kořen rovnice dán již vztahem

$$1 < x < 2$$

Dále dostaneme:

$$\varphi(1{\cdot}1) = -0{\cdot}459439$$
$$\varphi(1{\cdot}2) = +0{\cdot}357984$$
$$\varphi(1{\cdot}3) = +1{\cdot}929809.$$

Řada tato má druhou a další difference ještě příliš veliké a proto ji nemůžeme ani přibližně považovati za řadu druhého nebo třetího stupně, i z té příčiny se tu musíme prozatím uspokojiti pouze prvým přiblížením:

Klademe-li

$$a_1 = \varphi(1{\cdot}1),$$
$$a_2 = \varphi(1{\cdot}2),$$

bude

$$\varphi(x) = a_{1+y} = a_1 + y_1 \Delta a_1 .$$

Poněvadž pak

$$\varphi(x) = 0,$$

jest
$$y_1 = -\frac{a_1}{\Delta a_1} = -\frac{a_1}{a_2 - a_1} = 0\cdot5\,,$$

(více desetinných míst hledati by prozatím bylo zbytečno).

Je tedy pro prvé přiblížení kořen:

$$x_1 = 1\cdot15,$$

[$y_1 = 0\cdot5$ a poněvadž ukazovatelé rostou ve funkci $\varphi(x)$ vždy o 1, když x vzrůstá o 0·1, nutno zvětšiti x o 0·05].

Utvoříme pak další řadu:

$$\begin{aligned} a_1 &= \varphi(1\cdot15) = -0\cdot0578142\,, \\ a_2 &= \varphi(1\cdot16) = +0\cdot0355003\,, \\ a_3 &= \varphi(1\cdot17) = +0\cdot1335512\,, \\ a_4 &= \varphi(1\cdot18) = +0\cdot2365222\,. \end{aligned}$$

Z toho jsou difference:

$$\begin{aligned} \Delta a_1 &= 0\cdot0933145, \\ \Delta a_2 &= 0\cdot0980509, \\ \Delta a_3 &= 0\cdot1029710, \\ \Delta^2 a_1 &= 0\cdot0047364, \\ \Delta^2 a_2 &= 0\cdot0049201, \\ \Delta^3 a_1 &= 0\cdot0001837, \end{aligned}$$

Pro prvé přiblížení y_1 poněvadž

$$a_{1+y} = \varphi(x) = 0, \text{ bude}$$
$$0 = a_{1+y} = a_1 + y_1 \Delta a_1$$
$$y_1 = -\frac{a_1}{\Delta a_1} = 0\cdot62.$$

Pro druhé přiblížení y_2

$$a_{1+y} = a_1 + y_2 \Delta a_1 + y_2 \,.\, \frac{0\cdot62 - 1}{2} \Delta^2 a_1 + y_2 \frac{0\cdot62 - 1}{2} \,.\, \frac{0\cdot62 - 2}{3} \Delta^3 a_1,$$

z čeho

$$y_2 = 0\cdot626$$

a tedy pro třetí přiblížení y_3

$$a_{1+y} = a_1 + y\Delta a_1 + y_3 \frac{0{\cdot}626 - 1}{2} \Delta^2 a_1$$
$$+ y_3 \frac{0{\cdot}626 - 1}{2} \cdot \frac{0{\cdot}626 - 2}{3} \Delta^3 a_1$$

či
$$y_3 = 0{\cdot}0578142 : 0{\cdot}924445 = 0{\cdot}6254.$$

A poněvadž v řadě a_1, a_2, a_3, .. roste ukazovatel y o 1 když kořen rovnice vzroste o 0·01, bude patrně podle toho pro kořen rovnice

$$\varphi(x) = 0$$
$$x = 1{\cdot}156254$$

správné úplně na šest desetinných míst, jelikož je

$$\varphi(1{\cdot}156254) = -0{\cdot}000000404$$

odchylno od nully teprve na sedmém desetinném místě.

Použijeme-li na základě tohoto přiblížení zase nové řady:

$$a_1 = \varphi(1{\cdot}156254) = -0{\cdot}000000403709$$
$$a_2 = \varphi(1{\cdot}156255) = 0{\cdot}000008985424$$
$$a_3 = \varphi(1{\cdot}156256) = 0{\cdot}000018374612$$
$$\Delta a_1 = 0{\cdot}000009389133$$
$$\Delta a_2 = 0{\cdot}000009389188$$
$$\Delta^2 a_1 = 0{\cdot}000000000055,$$

kterouž řadu lze už považovati zcela rozhodně za řadu druhého stupně ano i za řadu stupně prvého.

Pro první přiblížení bude

$$0 = a_{1+y} = a_1 + y_1 \Delta a_1$$
$$y_1 = -\frac{a_1}{\Delta a_1} = \frac{403709}{9389188} = 0{\cdot}042997.$$

Pro druhé přiblížení je

$$a_{1+y} = a_1 + y_2 \Delta a_1 + y_2 \cdot \frac{0{\cdot}042977 - 1}{2} \Delta^2 a_1,$$

z čeho
$$y_2 = 403709 : 9389162 = 0{\cdot}0429974.$$

Jak viděti, stačilo již zcela dobře prvé přiblížení. — Dle toho je kořen rovnice

$$\varphi(x) = x^6 - x^3 + x - 2 = 0$$
$$x = 1{\cdot}1562540429974,$$

který je nejméně na dvanácte desetinných míst bezpečně správný.

Z příkladu toho viděti, jak velice přesně lze touto methodou rovnice algebraické vůbec řešiti a jak lze libovolný kořen uzavříti v takové meze, že jej udáme pak zcela přesně na kolikkoli desetinných míst. Kdybychom totiž vyšli od posledního řešení na dvanácte míst a utvořili řadu další, dostali bychom postupně přiblížení na libovolný počet míst zcela přesné. Pro praktické potřeby nebude arci třeba počítati tolik míst, jako tomu v uvedeném příkladě.

Jako tyto jednodušší rovnice algebraické dají se takto pěkně řešiti, tak možno ještě s lepším zdarem řešiti rovnice algebraické velmi složité ano i rovnice exponenciálné a logarithmické, pokud jsou jen funkcemi spojitými v blízkosti hledaných kořenů. Aby se pravdivost tohoto tvrzení ověřila, uvedeme k tomu cíli složitější nějaký příklad z počtu splátkového (annuitního).

Dlužník, který si od svých věřitelů vypůjčil obnos D, rozdělil tento obnos na n dluhopisů, takže nominální summa jednoho dluhopisu je

$$b = \frac{D}{n}.$$

Dluhopisy tyto buďte úrokovány určitým procentem p za lhůtu a splácejí se stále stejnými annuitami za m lhůt. Dle toho bude tedy pro annuitu a známá a dříve již uvedená rovnice:

$$D = \frac{100\,a}{p} - \frac{100\,a}{pu^m} = af_m(p),$$

kam jsme zavedli označení již dříve užité

$$f_m(p) = \frac{100}{p} - \frac{100}{pu^m}.$$

Poněvadž pro jednotlivé dluhopisy platí

$$D = b \, . \, n,$$

plyne z toho pro annuitu

$$a = \frac{b \, . \, n}{f_m(p)}.$$

Dejme tomu, že dlužník takto si ustanovil annuitu na splácení dluhopisů, ale že části úroků ($p\%$) použije k tomu, aby každý ke splacení určený dluhopis nebyl splacen pouze nominálním obnosem b, nýbrž summou vyšší ku př. $b+c$. Jsou to tak zvané půjčky premiové, kde c zove se premií). K tomu cíli musí arci dluhopisy úrokovati o něco nižším procentem p_1, aby každý dluhopis mohl dostati při vylosování premii. Jedná se pak v příkladě tomto najíti veličinu (premii) c, když ostatní potřebné hodnoty k tomu jsou dány.

Tímto způsobem se původní dluh $b \cdot n$ úrokovaný p procenty za lhůtu přetvořil na dluh $(b+c)n$ úrokovaný p_1 procenty za lhůtu, při čem

$$p_1 < p.$$

Toto procento p_1 se však také vyměřuje sazbou z původního obnosu b jednotlivého dluhopisu a nikoli sazbou z obnosu premiovaného $b+c$; máme-li je tedy převésti na procento p_2 z obnosu $b+c$, který se opravdu jednotlivým věřitelům splatí, nutno klásti:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{b+c}{b}$$

$$\text{či } p_2 = \frac{bp_1}{b+c}.$$

Dle toho bude annuita na dluh takto splácený dána opět rovnicí

$$a = \frac{(b+c)\,n}{f_m(p_2)} = \frac{b+c}{f_m\left(\dfrac{bp_1}{b+c}\right)}.$$

Annuita a však je už nahoře dána a tedy plyne z toho, rovnice pro veličinu c:

$$\frac{bn}{f_m(p)} = \frac{(b+c)\,n}{f_m\left(\dfrac{bp_1}{b+c}\right)},$$

kterou upravíme takto:

$$\frac{1}{f_m(p)} - \frac{1+\dfrac{c}{b}}{f_m\left(\dfrac{bp_1}{b+c}\right)} = 0. \qquad \text{(A)}$$

Z této rovnice lze neznámé c vypočísti, když ostatní veličiny b, p, p_1, m jsou dány, dá se tedy vypočísti, jakou premii může každý dluhopis dostati, když kupony z každého se o nějakou část zmenší.

Rovnice (A) je dosti složitá, ale prokladem řad dá se řešiti dosti snadno, jak uvidíme. Užijeme v té příčině logarithmických komplementů.

Jest totiž patrně z rovnice (A)

$$f_m\left(\frac{bp_1}{b+c}\right) = \left(1+\frac{c}{b}\right) f_m(p),$$

a logarithmováním dostaneme, zavedeme-li komplementy (na 10):

$$ct \log f_m\left(\frac{bp_1}{b+c}\right) - ct \log f_m(p) + \log\left(1+\frac{c}{b}\right) = 0, \text{ (B)}$$

Pro řešení volíme tento číselný příklad: Dlužník (na př. stát) uzavřel půjčku 100 mill. zl., kterou rozdělil v dluhopisy po 500 zl. (tedy celkem vydáno 200.000 kusů). Půjčku tu chce dlužník úrokovati $2\frac{1}{4}\,\%$ půlletně a splatiti ve stejných půlletních annuitách za 50 let. Slosovací plán však se upraví tak, že obligace dostanou pouze půlletní kupony 2%-ní (či 10 zl. z jednoho dluhopisu za půl roku) a co z annuity takto přebude že se rozdělí na stejné premie mezi všecky vylosované dluhopisy; budou se tedy všecky tažené dluhopisy vypláceti stále stejným vyšším obnosem, nežli je suma nominální. Jaké budou tyto premie?

Dle označení v rovnici (B) je

$$b = 500,\ m = 100,\ p_1 = 2,\ p = 2\tfrac{1}{4}$$

a premie je c.

Rovnice (B) zní pak:

$$ct \log f_{100}\left(\frac{500\,.\,2}{500+c}\right) - ct \log f_{100}(2\tfrac{1}{4}) + \log\left(1+\frac{c}{500}\right) = 0,$$

či $$ct \log f_{100}\left(\frac{1000}{500+c}\right) - ct \log f_{100}(2\tfrac{1}{4}) + \log\left(1+\frac{c}{500}\right) = 0.$$

Položíme-li pak

$$\varphi(c) = ct \log f_{100}\left(\frac{1000}{500+c}\right) - ct \log f_{100}(2\tfrac{1}{4}) + \log\left(1+\frac{c}{500}\right)$$

a dosadíme-li po některých pokusech:

$$\frac{1000}{500+c_1} = 1\tfrac{1}{2}, \qquad \frac{1000}{500+c_2} = 1\tfrac{5}{8},$$

$$\frac{1000}{500+c_3}=1\tfrac{3}{4}\,,\qquad \frac{1000}{500+c_4}=1\tfrac{7}{8}\,,$$
$$\frac{1000}{500+c_5}=2\,,$$

a vyhledáme-li z tabulek pro hodnoty $f_m(p)$:

$$\begin{aligned}
ct\log f_{100}(1\tfrac{1}{2}) &= 8{\cdot}2871424\\
ct\log f_{100}(1\tfrac{5}{8}) &= 8{\cdot}3074923\\
ct\log f_{100}(1\tfrac{3}{4}) &= 8{\cdot}3273342\\
ct\log f_{100}(1\tfrac{7}{8}) &= 8{\cdot}3466798\\
ct\log f_{100}(2) &= 8{\cdot}3655393\\
ct\log f_{100}(2\tfrac{1}{4}) &= 8{\cdot}4018473,
\end{aligned}$$

dostaneme řadu:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \varphi(c_1) = +\,0{\cdot}0102338\\
a_2 &= \varphi(c_2) = -\,0{\cdot}0041784\\
a_3 &= \varphi(c_3) = -\,0{\cdot}0165211\\
a_4 &= \varphi(c_4) = -\,0{\cdot}0271388\\
a_5 &= \varphi(c_5) = -\,0{\cdot}0363080
\end{aligned}$$

[na př. $\varphi(c_1) = ct\log f_{100}(1\tfrac{1}{2}) - ct\log f_{100}(2\tfrac{1}{4}) + \log(1+\tfrac{1}{3})$ atd.].

Z toho se odvodí:

$$\Delta a_1 = -\,0{\cdot}0144122,\qquad \Delta a_2 = -\,0{\cdot}0123427$$
$$\Delta a_3 = -\,0{\cdot}0106177,\qquad \Delta a_4 = -\,0{\cdot}0091692,$$
$$\Delta^2 a_1 = 0{\cdot}0020695$$
$$\Delta^2 a_2 = 0{\cdot}0017250$$
$$\Delta^2 a_3 = 0{\cdot}0014485$$
$$\Delta^3 a_1 = -\,0{\cdot}0003445,\qquad \Delta^3 a_2 = -\,0{\cdot}0002765$$
$$\Delta^4 a_1 = 0{\cdot}0000680.$$

Kořen této rovnice (B) leží pak patrně mezi c_1 a c_2, jelikož při přechodu od c_1 k c_2 mění funkce $\varphi(c)$ své znaménko z positivného v negativní.

Pro řešení klademe pak prvé přiblížení x_1

$$\varphi(c) = a_{1+x} = a_1 + x_1\Delta a_1$$

a poněvadž má býti

$$\varphi(c) = 0$$

bude

$$x_1 = -\frac{a_1}{\Delta a_1} = \frac{0{\cdot}0102338}{0{\cdot}0144122} = 0{\cdot}7.$$

Pro druhé přiblížení x_2 je

$$a_{1+x} = a_1 + x_2 \Delta a_1 + x_2 \frac{0{\cdot}7 - 1}{2} \Delta^2 a_1$$
$$+ x_2 \cdot \frac{0{\cdot}7 - 1}{2} \cdot \frac{0{\cdot}7 - 2}{3} \Delta^3 a_1$$

a tedy

$$x_2 = 0{\cdot}694.$$

Pro třetí přiblížení x_3

$$a_{1+x} = a_1 + x_3 \Delta a_1 + x_3 \frac{0{\cdot}694 - 1}{2} \Delta^2 a_1$$
$$+ x_3 \frac{0{\cdot}694 - 1}{2} \cdot \frac{0{\cdot}694 - 2}{3} \Delta^3 a_1$$
$$+ x_3 \cdot \frac{0{\cdot}694 - 1}{2} \cdot \frac{0{\cdot}694 - 2}{3} \cdot \frac{0{\cdot}694 - 3}{4} \Delta^4 a_1 ,$$

a tedy

$$x_3 = 0{\cdot}69360$$

přesně skoro na 5 desetinných míst (v pátém může býti arci neveliká chyba).

Poněvadž v řadě funkcí $\varphi(c)$ rostou hodnoty

$$\frac{1000}{500 + c}$$

o $\frac{1}{8}$, když ukazovatel veličiny a vzrůstá o 1, bude patrně, jako v podobných předešlých případech:

$$\frac{1000}{500 + c} = 1\frac{1}{2} + \frac{x_3}{8} = 1{\cdot}586700,$$

z čeho plyne:

$$c = 130{\cdot}24$$

úplně přesně na dvě desetinná místa.

Když tedy dlužník úrokuje půjčku procentem $2\frac{1}{4}$ půlletně a splácí ji stejnými annuitami semestrálními, ale obligacím vyplácí půlletně pouze $2^0/_0$-ní kupon, bude moci každou obligaci nominálního obnosu 500 zl. splatit při jejím slosování obnosem 630·24 zl. $= 500 + 130{\cdot}24$.

Tvrzeno nahoře, že tímto způsobem lze řešiti i jakékoli jiné rovnice exponencialní a transcendentní, pokud jsou v blízkosti kořene hledaného funkcemi spojitými. Některé z těchto rovnic dají se tak řešiti velmi rychle.

Tak na př. rovnice

$$xe^x = 1.$$

Logarithmováním dostaneme

$$\log x + x \log e = 0.$$

Zavedeme-li

$$\varphi(x) = \log x + x \log e,$$

najdeme (po některém pokusu):

$$\varphi(0\cdot5) = -0\cdot0838828$$
$$\varphi(0\cdot6) = 0\cdot0387280,$$

z čeho patrně je kořen rovnice k

$$0\cdot5 < k < 0\cdot6$$

a sice dle regule falsi

$$(k - 0\cdot5) : (0\cdot6 - 0\cdot5) = [\varphi(k) - \varphi(0\cdot5)] : [\varphi(0\cdot6) - \varphi(0\cdot5)],$$

tedy

$$k - 0\cdot5 = \frac{0\cdot1 \,.\, 0\cdot0838828}{0\cdot1226108} = 0\cdot07.$$

Sestavíme pak řadu:

$$a_1 = \varphi(0\cdot56) = -0\cdot0086071$$
$$a_2 = \varphi(0\cdot57) = 0\cdot0034227$$
$$a_3 = \varphi(0\cdot58) = 0\cdot0153188$$
$$a_4 = \varphi(0\cdot59) = 0\cdot0270857$$
$$\Delta a_1 = 0\cdot0120298, \qquad \Delta a_2 = 0\cdot0118961,$$
$$\Delta a_3 = 0\cdot0117669$$
$$\Delta^2 a_1 = -0\cdot0001337, \qquad \Delta^2 a_2 = -0\cdot0001292$$
$$\Delta^3 a_1 = 0\cdot0000045,$$

z čeho pro prvé přiblížení x_1

$$a_{1+x} = a_1 + x_1 \Delta a_1$$

$$x_1 = -\frac{a_1}{\Delta a_1} = \frac{0\cdot0086071}{0\cdot0120298} = 0\cdot715,$$

a pro druhé přiblížení x_2

$$a_{1+x} = a_1 + x_2 \Delta a_1 + x_2 \frac{0\cdot715 - 1}{2} \Delta^2 a_1$$
$$+ x_2 \,.\, \frac{0\cdot715 - 1}{2} \,.\, \frac{0\cdot715 - 2}{3} \Delta^3 a_1,$$

$$x_2 = 0\cdot71433,$$

z čeho kořen rovnice

$$k = 0{\cdot}5671433,$$

přesně zcela i v posledním místě, jak se dosazením do rovnice přesvědčíme.

Z ukázek uvedených je patrná již methoda, jak třeba různé rovnice řešiti prokladem řad a bylo by zbytečno další příklady proto hromaditi. —

Věstník literární.

Arithmetika pro I. a II. třídu škol gymnasijních. Sepsal prof. *Frant. Tůma.* Vydání čtvrté.

Arithmetika pro III. a IV. třídu škol gymnasijních. Sepsal prof. *Frant. Tůma.* Vydání druhé.

Dočká-li se v nynější době, kde spisovatelé učebnic ve svých nových spisech vždy vhodnějšími způsoby vyučovacím účelům vyhovovati se snaží, starší učebnice opětného vydání, jest to vždy znamením zdravého jádra celku, byť by i v jednotlivostech jevila se potřeba některé podřízenější nápravy.

To platí vší měrou o nových vydáních výše jmenované arithmetiky od prof. Fr. Tůmy. Pan spisovatel podržel, jak ze srovnání těchto vydání s předešlými jest zřejmo, celkové spracování algebraické nauky pro příslušné třídy gymnasia netknuté a změnil pouze některé stati hlavně co do pořádku, aby požadavku novějších vys. nařízení ze dne 24. května 1892 bylo vyhověno. Při tom snažil se všechny menší dříve činěné výtky napraviti a učivo některými jasnějšími výrazy učiniti srozumitelnější.

Ku zaokrouhlení a doplnění učiva přidány některé dodatky a příklady; tak mimo jiné § 52. str. 116—119. Přidané pravidlo pro sečítání algebraických veličin § 2. č. 5. str. 4., při němž bychom i doplněk větou, že „součet jest vždy stejnojmenný se sčitanci“ rádi četli, mělo obdobně býti uvedeno i při odečítání; jestiť pro začátečníky v algebře velmi důležité. Jestliže mnoholetá zkušenost mnohé učitele mathematiky místy nabádá ku malým odchylkám v didaktickém postupu, není toto osobní přesvědčení celé soustavě nikterak na ujmu, a doporučuje se přes to nové toto vydání arithmetiky jak vnitřní, tak i zevnější svou pečlivou úpravou ku vytknutému účelu samoděk. *Dr. Jos. Vaňaus.*