Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Zahradník

O symbolech analytické geometrie a jich upotřebení. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 2 (1873), No. 5, 266--276

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123831

O symbolech analytické geometrie a jich upotřebení.

(Píše *K. Zahradník.*)

(Pokračování.)

11. Častěji zmínili jsme se dříve o páru přímek, vyjadřujíce jej dvěma rovnicemi, totiž rovnicemi dvou přímek, z nichž se zmíněný pár skládal. Položíme si nyní za úkol vyjadřiti taký pár přímek rovnicí jedinou.

Jsou-li $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ rovnice dvou přímek, nutno jejich součin

$$P_1\, P_2 = 0 \tag{14}$$

považovati za rovnici páru přímek; neb souřadnice každého bodu, jenž na jedné neb na druhé přímce leží, vyhovují této rovnici a naopak, musí všechny body, jejichž souřadnice rovnici (14) vyhovují, buď na přímce $P_1 = 0$ neb $P_2 = 0$ ležeti.*) Rovnici páru přímek tedy obdržíme co součin rovnic přímek tohoto páru.

Dané-li rovnice dvou přímek ve tvaru

$$P_1 - \lambda P_2 = 0\,, \quad P_1 - \mu P_2 = 0\,,$$

bude rovnice tohoto páru přímek

$$P_1^2 - (\lambda + \mu)\, P_1\, P_2 + \lambda\mu\, P_2^2 = 0\,,$$

aneb obecně, položíme-li

$$\lambda + \mu = -\frac{B}{A}\,, \quad \lambda\mu = \frac{C}{A}\,,$$

$$A P_1^2 + B P_1 P_2 + C P_2^2 = 0 \tag{15}$$

Jiný pár přímek

$$P_1 - \lambda_1 P_2 = 0\,, \quad P_1 - \mu_1 P_2 = 0\,,$$

procházejících týmž bodem $(P_1\, P_2)$, bude dán rovnicí

$$A_1\, P_1^2 + B_1\, P_1\, P_2 + C_1\, P_2^2 = 0 \tag{16}$$

kde $\lambda_1 + \mu_1 = -\frac{B_1}{A_1}\,, \quad \lambda_1\mu_1 = \frac{C_1}{A_1}\,.$

Podmínka, by jeden pár přímek dělil harmonicky druhý pár, jest (dle rov. (6), pag. 177.)

$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\,\mu_1 = 0\,,$$

---

*) Viz Hesse Vorlesungen pg. 65.

kterážto rovnice po dosazení hodnot za λ μ,... přejde v:

$$A_1\, C - \tfrac{1}{2} B_1\, B + C_1\, A = 0. \qquad (17)$$

Rovnice (15) při proměnných koëfficientech A, B, C představuje nám veškeré páry přímek, jež harmonicky dělí určitý pár přímek, stává-li mezi oněmi koefficienty lineárné rovnice:

$$Aa + Bb + Cc = 0.$$

Dle výměru involuce (čl. 7) tvoří tři takové páry involuci přímek.*) Tak na př. tvoří páry přímek (15) a (16) a třetí pár přímek, daný rovnicí:

$$A_2\, P_1{}^2 + B_2\, P_1\, P_2 + C_2\, P_2{}^2 = 0 \qquad (18)$$

involuci, lze-li tři veličiny a, b, c tak určiti, by vyhověly následujícím třem rovnicím:

$$A\, a + B\, b + C\, c = 0,$$
$$A_1 a + B_1 b + C_1 c = 0,$$
$$A_2 a + B_2 b + C_2 c = 0.$$

Z theorie determinant známe, že

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & A_1 & A_2 \\ B & B_1 & B_2 \\ C & C_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

z čehož soudíme že, dají-li se tři veličiny a, b, c tak určiti, že vyhoví posledním třem rovnicím, též jiné tři veličiny α, β, γ, se nalézti dají, které vyhovují následujícím třem rovnicím:

$$A\,\alpha + A_1\beta + A_2\gamma = 0,$$
$$B\,\alpha + B_1\beta + B_2\beta = 0,$$
$$C\,\alpha + C_1\beta + C_2\gamma = 0,$$

kteréžto tři rovnice též podmínku involuce vyjadřují.

---

*) Máme-li na př. kuželosečku se středem, jejíž rovnice jest

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 = a_{33}\,,$$

bude rovnice dvou průměrů združených

$$(y - x\, tg\, \Theta)\, [(y\, (a_{12} + a_{22}\, tg\, \Theta) + x\, (a_{11} + a_{12}\, tg\, \Theta)] = 0$$

aneb násobí-li se

$$y^2\, (a_{12} + a_{22}\; tg\,\Theta) + xy\, (a_{11} - a_{22}\; tg^2\,\Theta) - x^2\, tg\,\Theta\, (a_{11} + a_{12}\; tg\Theta) = 0.$$

Rovnice páru asymptot (buď při hyperbole realných neb imaginárných při ellipse) jest pak $a_{22}\, y^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{11}\, x^2 = 0$.
Coefficienty těchto rovnic vyhovují rovnici (17) neodvisle na úhlu Θ z čehož plyne, že asymptoty rozdělují libovolný pár sdružených průměrů harmonicky. Sdružené průměry tvoří tedy *involuci paprskovou.*

Rovnice uvedené podávají nám následující větu:

Tři páry přímek, procházejících týmž bodem a daných rovnicemi (15, 16, 18), tvoří involuci, dají-li jejich rovnice násobené stálými činiteli za součet identicky nullu.

II.

12. Přistupmež nyní k upotřebení daných vět, z nichž zjevno bude, jakých výhod nám ono zkrácené označení přímky poskytuje.

Má se určiti podmínka, vedle které tři příčky vedené vrcholi daného trojúhelníka se protínají v bodě jediném.

Budiž $a_1\, a_2\, a_3$ daný trojúhelník; rovnice jeho stran $a_1\, a_2$, $a_2\, a_3$, $a_3\, a_1$ buďtež $P_3 = 0$, $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, rovnice pak příček procházejících vrcholi $a_1\, a_2\, a_3$ budou posloupně:

$$P_2 - \lambda_1\, P_3 = 0 \equiv Q_1$$
$$P_3 - \lambda_2\, P_1 = 0 \equiv Q_2$$
$$P_1 - \lambda_3\, P_2 = 0 \equiv Q_3$$

Znásobíme-li druhou rovnici λ_1, třetí pak $\lambda_1\, \lambda_2$ a sečteme-li je, obdržíme

$$(1 + \lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3)\, P_2 \equiv 0 \equiv Q_1 + \lambda_1\, Q_2 + \lambda_1\, \lambda_2\, Q_3$$

tedy

$$\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3 = 1 \tag{1}$$

neb přejdeme-li ku geometrickému významu coefficientu λ (čl. 4. pag. 175), obdržíme:

$$\frac{\sin (P_2\, Q_1)}{\sin (P_3\, Q_1)} \cdot \frac{\sin (P_3\, Q_2)}{\sin (P_1\, Q_2)} \cdot \frac{\sin (P_1\, Q_3)}{\sin (P_2\, Q_3)} = 1 \tag{2}$$

Rovnici tu v jinou změniti můžeme, nahradíme-li sinusy úseky na stranách. Označíme-li průsek $(Q_1\, P_1) = b_1$, $(Q_2 P_2) = b_2$ $(Q_3\, P_3) = b_3$,*) bude

$$\frac{a_1\, b_3}{a_2\, b_3} = \frac{a_2\, a_3 \,.\, \sin (P_2\, Q_3)}{a_1\, a_3 \,.\, \sin (P_1\, Q_3)}$$
$$\frac{a_2\, b_1}{a_3\, b_1} = \frac{a_3\, a_1 \,.\, \sin (P_3\, Q_1)}{a_2\, a_1 \,.\, \sin (P_2\, Q_1)}$$
$$\frac{a_3\, b_2}{a_1\, b_2} = \frac{a_1\, a_2 \,.\, \sin (P_1\, Q_2)}{a_3\, a_2 \,.\, \sin (P_3\, Q_2)}$$

---

*) Příslušný výkres snadno si každý sám sestaví.

Znásobíme-li tyto rovnice, obdržíme vzhledem k rovnici (2):

$$a_1 b_3 . a_2 b_1 . a_3 b_2 = a_2 b_3 . a_3 b_1 . a_1 b_2,$$

známou to větu Cevovu.

Z rovnice (1) plyne pak dále:

α) Přímky rozpolovací vnitřní úhly trojúhelníku daného, protínají se v bodě jediném; neb $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

β) Přímky rozpolovací dva zevnější a jeden vnitřní úhel trojúhelníku daného protínají se v bodě jediném, neb v tomto případě jsou dvě λ rovné -1, třetí pak $+1$.

γ) Kolmice z vrcholů na základnice spuštěné protínají se v bodě jediném; neb obecně jest

$$\lambda_3 = \frac{\sin(P_1 Q_3)}{\sin(P_2 Q_3)}.$$

Stojí-li $Q_3 \perp P_3$, bude $\sphericalangle (P_1 Q_3) = 90^0 - \alpha_2$; označíme-li úhel ve vrcholi a_2 písmenem α_2, bude tedy

$$\sin(P_1 Q_3) = \cos\alpha_2$$
$$\sin(P_2 Q_3) = \cos\alpha_1,$$

pročež

$$\lambda_3 = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1};$$

podobně obdržíme pro λ_1 a λ_2 cyklickou záměnou přípon

$$\lambda_1 = \frac{\cos\alpha_3}{\cos\alpha_2},\quad \lambda_2 = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_3}.$$

δ) Přímky spojující vrchole trojhranu se středy stran protilehlých (těžné přímky) protínají se v bodě jediném. Neb

$$\lambda_3 = \frac{\sin(P_1 Q_3)}{\sin(P_2 Q_3)} = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$$

Značí-li b_3 střed strany $a_1\, a_2$, podobně b_1, b_2 středy stran ostatních, bude

$$\varkappa_1 = a_2 b_3 \sin\alpha_2,$$
$$\varkappa_2 = a_1 b_3 \sin\alpha_1,$$

tedy

$$\lambda_3 = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}$$

neb $a_2 b_3 = a_1 b_3$.

Rovnice (2) jsme obdrželi pro involuci šesti přímek, *) z čehož plyne věta: „*Vedeme-li z daného bodu rovnoběžky ku*

* pg. 183. třeba pouze místo P psáti Q, a místo Q položiti S a přejde nám rovnice (2) v rovnici vyjadřující podmínku involuce. Na str. 183.

stranám a příčkám protínajícím se v bodě jediném, obdržíme involuci šesti přímek." Větu tu můžeme i následovně vyslovit: „*Dané čtyry body můžeme třikráte po dvou spojit a vedeme-li daným bodem k těmto párům rovnoběžky, tvoří tyto involuci.*"

Na základě této věty mohli bychom sestrojiti šestou přímku příslušnou ku třem párům přímek tvořících involuci, dáno-li pět přímek, ale seznáme později daleko jednoduší sestrojení, pročež toto pomíjíme.

13. *Jsou-li dva trojúhelníky v také poloze, že kolmice z vrcholů jednoho trojúhelníka na strany druhého spuštěné, jediným bodem probíhají, tu probíhají též kolmice z vrcholů druhého trojúhelníka na strany prvého trojúhelníka spuštěné bodem jediným.*

Označmež strany prvého trojúhelníku $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, druhého pak trojúhelníku $P_1' = 0$, $P_2' = 0$, $P_3' = 0$. Vrchole trojúhelníků označme písmenou a s příponou protilehlé strany, tedy $(P_1 P_2) = a_3$, $(P_3' P_2') = a_1'$, atd.

Rovnice prímky vedené vrcholem a_3 kolmo na stranu $P_3' = 0$ bude:

$$P_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_3') - P_2 \cos(\alpha_3' - \alpha_1) = 0, \tag{1}$$

neboť rovnice přímky procházející vrcholem a_3 čili průsekem přímek $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ jest

$$P - \lambda_3 P_2 = 0 = Q_3, \tag{2}$$

aneb v rozvedeném tvaru,

$$x(\cos\alpha_1 - \lambda_3 \cos\alpha_2) + y(\sin\alpha_1 - \lambda_3 \sin\alpha_2) - (p_1 - \lambda_3 p_2) = 0.$$

Má-li přímka Q_3 státi kolmo na přímce

$$P_3' \equiv 0 = x\cos\alpha_3' + y\sin\alpha_3' - p_3',$$

musí dle známé podmínky kolmosti dvou přímek býti

$$\cos\alpha_3'(\cos\alpha_1 - \lambda_3\cos\alpha_2) + \sin\alpha_3'(\sin\alpha_1 - \lambda_3 \sin\alpha_2) = 0,$$

z kteréžto rovnice si můžeme λ_3 jednoznačně ustanovit a sice bude tu

$$\lambda_3 = \frac{\cos(\alpha_3' - \alpha_1)}{\cos(\alpha_2 - \alpha_3')} \tag{3}$$

---

vyskytují se v této rovnici chyby tiskové; třeba ji takto psáti, což ostatně z násobení oněch tří rovnic patrno:

$$1 = \frac{\sin(Q_3 S_1)\sin(Q_1 S_2)\sin(Q_2 S_3)}{\sin(Q_2 S_1)\sin(Q_3 S_2)\sin(Q_1 S_3)}$$

Položíme-li hodnotu za λ_3 do rovnice (2), obdržíme uvedenou rovnici (1).

Podobně najdeme rovnice kolmic s vrcholů a_1, a_2 na $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ spuštěných, které též ze symetrického označení cyklickou záměnou obdržíme a sice:

$$\begin{aligned} &P_2 \cos(\alpha_3 - \alpha_1') - P_3 \cos(\alpha_1' - \alpha_2), \\ &P_3 \cos(\alpha_1 - \alpha_2') - P_1 \cos(\alpha_2' - \alpha_3). \end{aligned} \qquad (4)$$

kdež

$$\lambda_1 = \frac{\cos(\alpha_1' - \alpha_2)}{\cos(\alpha_3 - \alpha_1')}, \quad \lambda_2 = \frac{\cos(\alpha_2' - \alpha_3)}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2')}.$$

Dle čl. 12, (1) probíhají tyto kolmice bodem jediným, platí-li $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, neb

$$\cos(\alpha_6 - \alpha_2') \cos(\alpha_2 - \alpha_3') \cos(\alpha_3 - \alpha_1') = \cos(\alpha_1' - \alpha_2) \cos (\alpha_2' - \alpha_3) \cos(\alpha_3' - \alpha_1), \qquad (5)$$

kteroužto rovnici též obdržíme vyloučením P_1, P_2, P_3 z rovnic (1 a 4) ve tvaru determinantu:

$$\begin{vmatrix} 0, & \cos(\alpha_3 - \alpha_1'), & -\cos(\alpha_1' - \alpha_2) \\ -\cos(\alpha_2' - \alpha_3), & 0\ , & \cos(\alpha_1 - \alpha'_2) \\ \cos(\alpha_2 - \alpha_3'), & -\cos(\alpha_3' - \alpha_1), & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Záměnou α s α' obdržíme z (5) rovnici podmínečnou, by kolmice spuštěné z vrcholu trojúhelníku druhého na strany prvého probíhaly týmž bodem. Zaměníme-li tedy α s α' vidíme, že rovnice (5) se nemění, čímž uvedená věta stvrzena.

14. Prvé než přistoupíme k dalším příkladům, vyložíme ještě jednu větu, kterouž ihned velmi prospěšnou býti shledáme.

Známe-li tři přímky P_1, P_2, P_3, kteréž se neprotínají v bodě jediném, můžeme vždy rovnici jiné přímky P vyjádřiti pomocí symbolů daných tří přímek a to tvarem:

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0 \qquad (1)$$

Neb, je-li obecně

$$P_k \equiv x \cos\alpha_k + y \sin\alpha_k - p_k = 0,$$

tu přejde rovnice (1) ve

$$x(\lambda_1 \cos\alpha_1 + \lambda_2 \cos\alpha_2 + \lambda_3 \cos\alpha_3) + y(\lambda_1 \sin\alpha_1 + \lambda_2 \sin\alpha_2 + \lambda_3 \sin\alpha_3) - (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3) = 0,$$

kterážto rovnice nám bude představovati rovnici přímky P, položíme-li

$$\lambda_1 \cos\alpha + \lambda_2 \cos\alpha_2 + \lambda_3 \cos\alpha_3 = \cos\alpha,$$
$$\lambda_1 \sin\alpha_1 + \lambda_2 \sin\alpha_2 + \lambda_3 \sin\alpha_3 = \sin\alpha,$$
$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_2 p_3 = p.$$

Z těchto tří rovnic můžeme ale λ_1, λ_2, λ_3 vždy určiti předpokládáme-li, že neprochází dané tři přímky bodem jediným. Podobně jako v čl. 9. můžeme tuto větu následovně vyjádřiti:

Známe-li čtyři přímky $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, $P_4 = 0$, *můžeme nalézti čtyry činitele* λ *té vlastnosti, že identicky bude*

$$\lambda P + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \equiv 0.$$

Tato rovnice nám totiž vyjadřuje, že pod výrazem $-\lambda P$ vyrozumívati máme výraz $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$. Princip tento objasníme několika příklady:

15. *Mají-li dva trojúhelníky takovou polohu, že průsečíky příslušných stran leží na přímce, tu prochází přímky, jež spojují příslušné vrchole těchto trojúhelníků bodem jediným.*

Dva trojúhelníky v takové poloze*) nazýváme homologické, perspectivické, neb collineární, přímku, na které se příslušné strany protínají, osou homologie, atd. a bod, jímž procházejí přímky spojující vrchole, středem homologie atd.

Strany prvého trojúhelníka buďtež $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ a přímka, ve které se příslušné strany trojúhelníka protínají budiž dána rovnicí

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0 \equiv Q. \qquad (1)$$

Druhého trojúhelníka strana $\overline{b_2 b_3}$ **) prochází průsečíkem c_1 přímky Q s příslušnou stranou $\overline{a_2 a_3} = P_1$ neb dle podmínky protínají se strany $\overline{a_2 a_3}$ a $\overline{b_2 b_3}$ v bodě c_1, jenž leží na Q; tudíž můžeme psáti rovnici přímky $\overline{b_2 b_3}$ dle čl. 3. ve tvaru

$$Q - \mu_1 P_1 = 0;$$

Dokud μ libovolné, značí nám tato rovnice dle dřívějšího svazek paprsků, jehož vrchol $(Q P_1)$.

Za určitou hodnotu $\mu = \mu_1$, obdržíme určitý paprsek tohoto svazku, jenž bude totožný s prodloužením strany trojúhelníka

---

*) Porovnej kapitolu VI. pg. 62. Tato věta i se svou reciprokou větou připisuje se *Desarguesovi* (1593—1662). *Poncelet* pojmenoval dva trojúhelníky v také poloze *homologickými* (podobně i pojmenování osa a střed homologie od něho); *Möbius* nazývá dva trojúhelníky v také poloze *collinearnými*, *Weyr* pak *perspektivickými*.

**) Příslušný výkres nechť si laskavý čtenář sám vyvede.

$\overline{b_2 b_3}$, pročež pak (2) bude rovnicí strany $b_2 b_3$. Podobně rovnicemi stran $b_3 b_1$ a $b_1 b_2$ budou

$$Q - \mu_2 P_2 = 0 \qquad (3)$$
$$Q - \mu_3 P_3 = 0 \qquad (4)$$

Odečteme-li rovnici (2) od (3), obdržíme

$$\mu_1 P_1 - \mu_2 P_2 = 0. \qquad (5)$$

Přímka rovnici (5) vyjádřená prochází průsekem stran $\overline{b_2 b_3}$ a $\overline{b_3 b_1}$ tedy vrcholem b_3; dle tvaru rovnice (5) poznáváme, pak, že též probíhá průsečíkem stran P_1 a P_2, tedy a_3.

Dle uvedeného jest tedy (5) rovnice přímky

$$\overline{a_3 b_3} \ldots \mu_1 P_1 - \mu_2 P_2 = 0;$$

podobně

$$\overline{a_1 b_1} \ldots \mu_2 P_2 - \mu_3 P_3 = 0.$$
$$\overline{a_2 b_2} \ldots \mu_3 P_3 - \mu_1 P_1 = 0.$$

Součet těchto tří rovnic rovná se identicky nulle, tedy $\overline{a_3 b_3}$, $\overline{a_1 b_1}$, $\overline{a_2 b_2}$ probíhají bodem jediným.

16. *Dán budiž trojúhelník $a_1\, a_2\, a_3$, proložme vrcholi tři příčky, protínající se v bodě jediném a vyšetřme vlastnosti tohoto skupení přímek.*

Rovnice stran $\overline{a_2 a_3}$, $\overline{a_3 a_1}$, $\overline{a_1 a_2}$ buďtež posloupně $P_1 = 0$ $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, rovnice pak příček $\overline{a_3 b_3}$, $\overline{a_1 b_1}$, $\overline{a_2 b_2}$ budou posloupně

$$\begin{aligned} \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2 &= 0 \equiv Q_3, \\ \lambda_2 P_2 - \lambda_3 P_3 &= 0 \equiv Q_1, \\ \lambda_3 P_3 - \lambda_1 P_1 &= 0 \equiv Q_2. \end{aligned} \qquad (1)$$

Spojme paty příček b_1, b_2, b_3, čímž obdržíme tři přímky $b_1 b_2 = R_3$, $b_2 b_3 = R_1$, $b_3 b_1 = R_2$. Tyto přímky protínají protilehlé strany trojúhelníka v bodech

$$c_1 = (R_1 P_1),\ c_2 = (R_2 P_2),\ c_3 = (R_3 P_3).$$

Veďme dále přímky $\overline{a_1 c_1} = T_1$, $\overline{a_2 c_2} = T_2$, $\overline{a_3 c_3} = T_3$. Rovnice přímek R, S, T můžeme nyní dle uvedeného principu vyjádřiti pomocí symbolů přímek P.

Přímka $R_1 = b_2 b_3$ procházející bodem b_2 (průsečíkem přímek $P_2 = 0$ a $Q_2 = 0$) a bodem b_3 (průsečíkem přímek $P_3 = 0$ a $Q_3 = 0$) vyjádřena jest rovnicí

$$\lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 - \lambda_1 P_1 = 0 \equiv R_1 \qquad (2)$$

neb vzhledem k rovnicím (1) můžeme rovnici (2) dáti tvar

$$\lambda_2 P_2 - Q_2 = 0,$$
$$\lambda_3 P_3 - Q_3 = 0.$$

z nichž prvá nám ukazuje, že přímka R prochází průsekem přímek P_2 a Q_2, tedy bodem b_2, druhá pak že prochází též průsekem přímek P_3 a Q_3; tedy skutecně zní, jak svrchu uvedeno, rovnice přímky $b_2 b_3$.

$$R_1 \equiv \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 - \lambda_1 P_1 = 0,$$

a podobně přímky

$$\overline{b_3 b_1} \quad R_2 \equiv \lambda_3 P_3 + \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2 = 0$$
$$\overline{b_1 b_2} \quad R_3 \equiv \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 - \lambda_3 P_3 = 0$$

Přímky tyto protínají protilehlé strany trojuhelníka v bodech téže přímky S, jejíž rovnice jest

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0 \equiv S \qquad (4)$$

Důkaz lze snadně provésti následovně: $R_1 - \lambda \; P_1 = 0$ jest rovnice svazku paprsků, jehož vrchol jest $(R_1 \, P_1) = c_1$; pro $\lambda = -2\lambda_1$ obdržíme rovnici určitého paprsku tohoto svazku a sice, přihlížíme-li k rovnici (2)

$$\lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 - \lambda_1 P_1 + 2\lambda_1 P_1 = 0,$$

kterážto rovnice po redukci úplně s rovnicí $S = 0$ se shoduje. Jest tedy S určitý paprsek svazku

$$R_1 - \lambda \; P_1 = 0,$$

pročež prochází též jeho vrcholem c_1.

Důkaz totožně se vede pro bod c_2 a c_3; leží tedy body c_1, c_2, c_3, na přímce S, jejíž rovnice jest (4).

Zbývá nám ještě rovnice přímky $T = \overline{ac}$ pomocí symbolů přímek P vyjádřiti. Rovnice přímky $T_3 = a_3 \, c_3$ zní:

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0 \equiv T_3 \qquad (5)$$

neb z tvaru jejího vysvítá, že prochází bodem $a_3 = (P_1 \, P_2)$; mimo to můžeme tuto rovnici psáti ve tvaru

$$T_3 \equiv R_3 + \lambda_3 P_3 = 0,$$

z čehož patrno, že přímka T_3 prochází průsekem přímek $(R_3 \; P_3)$ tôtiž bodem c_3.

Jest tedy rovnice přímky

$$\overline{a_3 c_3} \quad T_3 \equiv \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0,$$

podobně přímky

$$\overline{a_1 c_1} \quad T_1 \equiv \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0,$$
$$\overline{a_2 c_2} \quad T_2 \equiv \lambda_3 P_3 + \lambda_1 P_1 = 0.$$

Nyní máme rovnice veškerých přímek našeho obrazce vyjádřené symboly přímek základního trojhranu. Pohledneme-li na obrazec, jenž se snadno podlé předešlého udání sestrojí, vidíme, že *každým vrcholem trojúhelníka probíhají čtyry přímky a rovnice jeví nám jejich harmonickou vlastnost.*

Vezmeme na př. vrchol a_1. jímž procházejí přímky $\overline{a_1 a_3}$, $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{a_1 b_1}$, $\overline{a_1 c_1}$, jsou rovnice jejich posloupně

$$P_2 = 0, \quad \lambda_2 P_2 - \lambda_3 P_3 = 0 \equiv Q_1,$$
$$P_3 = 0, \quad \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0 \equiv T_1,$$

a dle čl. 4. tvoří tyto čtyry přímky harmonický svazek, jelikož

$$(P_2 P_3 Q_1 T_1) = -1.$$

Podobně obdržíme pro vrchole a_2, a_3

$$\left.\begin{aligned}(P_3 P_1 Q_2 T_2) &= -1,\\ (P_1 P_2 Q_3 T_3) &= -1,\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Porovnáme-li rovnice (1) a (6), vidíme, že tři přímky T_1, $T_2 Q_3$, podobně $T_2 T_3 Q_1$, $T_3 T_1 Q_2$ probíhají jediným bodem. Z vyšetřování uvedeného plynou pak následující vzájemné věty:

1. Vedeme-li v rovině trojúhelníku $a_1 a_2 a_3$ libovolnou příčku S, kteráž seče strany trojúhelníku v bodech $c_1 c_2 c_3$ a stanovíme-li si na každé bod harmonicky sdružený k bodu průsečnému příčky se stranou vzhledem k vrcholům trojúhelníku, tu procházejí přímky spojující tyto harmonicky sdružené body s protilehlým vrcholem týmž bodem 0.

2. Vedeme-li v rovině trojúhelníku libovolnou příčku a volíme-li na stranách trojúhelníku dva body, které tyto strany s příčkou harmonicky dělí, pak leží tyto dva body s průsečíkem strany třetí s příčkou na téže přímce.

Pakli jest příčka nekonečně vzdálená, přejdou tyto dvě věty v následující:

α) *Spojíme-li v trojúhelníku středy stran s protilehlými vrcholi, procházejí spojující přímky bodem jedinym.*

β) *Přímka spojující v trojúhelníku středy dvou stran jest ku třetí straně rovnoběžná.*

Nebude snad od místa, připojím-li některé zvláštní případy uvedených rovnic, kterýchž při řešení různých úloh lze upotřebiti Přihlížejíce ku čl. 12. γ, a ku rovnicím (3) tohoto čl., obdržíme

$$P_1 \cos a_1 + P_2 \cos a_2 + P_3 \cos a_3 = 0$$

co rovnici přímky, kteráž spojuje dvě paty výšek trojúhelníku $a_1 a_2 a_3$; dále, že

$$P_1 \cos a_1 + P_2 \cos a_2 + P_3 \cos a_3 = 0$$

značí rovnici přímky, na níž leží průseky přímek spojujících podvojně paty výšek daného trojúhelníku s protilehlými stranami. Podobně

$$P_1 \sin a_1 + P_2 \sin a_2 - P_3 \sin a_3 = 0$$

jest rovnice přímky spojující středy dvou stran trojúhelníka; tyto přímky protínají protilehlé strany v bodech ležících na přímce, jejíž rovnice zní

$$P_1 \sin a_1 + P_2 \sin a_2 + P_3 \sin a_3 = 0;$$

rovnice tato však značí nám přímku nekonečně vzdálenou, čímž též věta výsledná (β) dokázána.

17. Harmonické vlastnosti čtyrúhelníka úplného plynou zcela ze čl. 16; neb přihlížíme-li místo k trojúhelníku $a_1 a_2 a_3$, ku čtyrúhelníku $a_1 a_2 c_1 c_2$, budou body a_3, m c_3 průseky diagonal, tedy body diagonálnými. Tu ihned dokázati můžeme, že *paprsky diagonalnými body procházející jsou harmonické.**) Vezměmež na př. diagonalný bod a_3, jímž probíhají paprsky

$$\begin{array}{ll} \overline{a_3 a_2} & P_1 = 0, \\ \overline{a_3 a_1} & P_2 = 0, \\ \overline{a_3 b_3} & \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2 = 0 \equiv Q_3, \\ \overline{a_3 c_3} & \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0 \equiv T_3. \end{array}$$

Tvar těchto rovnic (čl. 4) podává nám současně důkaz věty uvedené. Této vlastnosti úplného čtyrúhelníku upotřebuje se ku sestrojení čtvrtého harmonického paprsku, dané-li jsou tři paprsky.

---

*) Kapitola III. pg. 32.