Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 5, 626--682

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123820

☾ 5. *Zákryt ε Geminorum* (vel. 3,1) zač. $11^h 39^m$ k. $12^h 4^m$. Měsíc vychází v $9^h 15^m$. *Min. Algolu* $14^h 51^m$.
6. *Zákryt κ Geminorum* (vel. 3,4) zač. $12^h 54^m$ k. $13^h 42^m$. Měsíc vychází v $10^h 13^m$.
8. *Min. Algolu* $11^h 40^m$.
10. 17^h *Uran* ve východní kvadratuře se Sluncem.
11. *Min. Algolu* $8^h 29^m$.
12. 1^h *Konjunkce* Jupitera s Měsícem. — *Merkur* ve spodní konjunkci se Sluncem. — *Neptun* v západní kvadratuře se Sluncem.
● 13. *Saturn* v opposici se Sluncem. — 10^h *Konjunkce* Merkura s Měsícem.
14. *Min. Algolu* $5^h 18^m$.
17. 18^h *Konjunkce* Venuše s Měsícem.
18. *Venuše* v konjunkci s *α Scorpii* (Venuše $2^0 26'$ sev.).
☽ 21.
25. *Min. Algolu* $16^h 33^m$. — 19^h *Konjunkce* Marta s Měsícem.
27. 9^h *Konjunkce* Saturna s Měsícem. (Zákryt u nás neviditelný.) — *Merkur* v největší elongaci západní $18^0 31'$.
☺ 28. *Min. Algolu* $13^h 22^m$
30. *Zákryt* ω^2 Tauri (vel. 5,5) zač. $10^h 29^m$ k. $11^h 17^m$. Měsíc vrcholí v $13^h 43^m$.
31. *Min. Algolu* $10^h 11^m$. *N.*

Úlohy.

Řešení úloh.

a) Z mathematiky.

Úloha 1.

Rovnostrannému trojúhelníku jest kružnice vepsána a připsána. Určiti poloměr kružnice dotýkající se strany trojúhelníka i obou oněch kružnic. Uč. *Fr. Jirsák.*

Řešení zaslal p. *Jar. Krejzlík* ze VII. tř. něm. gymn. v Unčově.

Vzdálenost bodů, v nichž se kružnice strany trojúhelníka dotýkají, jest rovna straně trojúh. Vedeme-li středem třetí kružnice rovnoběžku k základně trojúh., obdržíme

$$\sqrt{(\varrho + x)^2 - (\varrho - x)^2} + \sqrt{(\varrho_1 + x)^2 - (\varrho_1 - x)^2} = a$$

$$x = \frac{a^2}{4(\sqrt{\varrho} + \sqrt{\varrho_1})^2}; \quad \varrho = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad \varrho_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{3a}{8\sqrt{3} + 12} = \frac{a}{4}(2\sqrt{3} - 3) = \frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{4}a,$$

t. j. hledaný poloměr rovná se rozdílu výšky daného trojúhelníka a tří čtvrtin jeho strany.

Úloha 2.

Kružnici vepsanou pravoúhlému trojúhelníku protínají kružnice sestrojené nad odvěsnami jakožto průměry v úhlech δ a ε. Dokázati vztah

$$\cos\delta \,.\, \cos\varepsilon = \cos 60^0.$$

Týž.

Řešení zaslal p. *J. Hanák* ze VII. tř. g. v Prostějově.

Úhly δ, ε stanoveny jsou úhly tečen v průsečících. Úhly ty rovnají se úhlům poloměrů, jež spojují průsečíky se středy kružnic. Kosiny těchto úhlů vypočteme podle věty Carnotovy ze stran trojúhelníků MSO_1 a NSO_2, kdež M a N značí vrcholy úhlů δ a ε, S střed vepsané kružnice, O_1 a O_2 středy kružnic sestrojených nad odvěsnami.

V trojúhelníku MSO_1 jest strana

$$SO_1 = \left(\frac{a}{2} - \varrho\right)^2 + \varrho^2$$

a v trojúhelníku NSO_2 strana

$$SO_2 = \left(\frac{b}{2} - \varrho\right)^2 + \varrho^2.$$

Dle věty cosinové jest

$$\left(\frac{a}{2} - \varrho\right)^2 + \varrho^2 = \frac{a^2}{4} + \varrho^2 - a\varrho\cos\delta \qquad (\alpha)$$

$$\left(\frac{b}{2} - \varrho\right)^2 + \varrho^2 = \frac{b^2}{4} + \varrho^2 - b\varrho\cos\varepsilon. \qquad (\beta)$$

Z toho

$$\cos\delta = \frac{a-\varrho}{a},$$

$$\cos\varepsilon = \frac{b-\varrho}{b}.$$

Pro poloměr kružnice vepsané známo, že

$$\varrho = \frac{a+b-c}{2}.$$

Jest tedy

$$\cos\delta \,.\, \cos\varepsilon = \frac{(a-b+c)(b-a+c)}{4ab} = \frac{(a-b)^2-c^2}{-4ab},$$

avšak ježto

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

tedy

$$\cos\delta \,.\, \cos\varepsilon = \frac{-2ab}{-4ab} = \frac{1}{2} = \cos 60^0.$$

Úloha 3.

Kružnice připsané trojúhelníku ABC o stranách a, b, c mějte středy O_1, O_2, O_3. Dokázati vztah

$$\frac{a\,.\,b\,.\,c}{a_1\,.\,b_1\,.\,c_1} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

jsou-li a_1, b_1, c_1 strany trojúhelníka $O_1O_2O_3$. *Týž.*

Řešení zaslal p. *B. Kořínek* ze VII. tř. r. v Olomouci.

Symmetrály vnitřních úhlů v původním $\triangle\, ABC$ jsou zároveň výškami v $\triangle\, O_1O_2O_3$, omezeném symmetrálami úhlů vnějších. Jest tedy:

$$\overline{O_3O_1} \perp \overline{O_2B},\ \overline{O_3O_2} \perp \overline{O_1A}.$$

Následkem toho

$$\sphericalangle\, O_1O_3O_2 = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

a doplňkový k němu

$$\sphericalangle\, O_3O_2B = R - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Z téhož důvodu

$$\sphericalangle O_1 O_3 C = \frac{\alpha}{2}.$$

V trojúhelníku pravoúhlém $O_3 B O_2$ platí

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\overline{O_3 B}}{\overline{O_3 O_2}} = \frac{\overline{O_3 B}}{a_1},$$

avšak

$$\overline{O_3 B} = \frac{a \, . \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad (\text{z } \triangle BCO_3).$$

Dosadíme-li, obdržíme

$$\frac{a}{a_1} = \sin\frac{\alpha}{2},$$

analogicky odvodíme

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{b}{b_1}, \text{ a } \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{c}{c_1}.$$

Platí tedy také

$$\frac{a}{a_1} \, . \, \frac{b}{b_1} \, . \, \frac{c}{c_1} = \sin\frac{\alpha}{2} \, . \, \sin\frac{\beta}{2} \, . \, \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Úloha 4.

Kosočtverec o straně s a úhlu σ promítá se v kosočtverec podobný. Jaký úhel svírají jeho strany s průmětnou a jaká je odchylka jeho roviny od průmětny. Prof. *R. Hruša.*

Řešení zaslal p. *Fr. Svoboda* ze VII. tř. r. v Jevíčku.

Strany kosočtverce svírají s průmětnou týž úhel α, odchylka jeho roviny od průmětny buď φ. Úhel σ se promítá v úhel $180 - \sigma$ a $\sphericalangle 180 - \sigma$ v $\sphericalangle \sigma$; stranu průmětu nazveme s_1.

Užijeme vztahu (Strnad III., str. 27)

$$\cos\omega_1 = \frac{\cos\omega - \sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}.$$

V našem případě $\omega_1 = 180 - \sigma$, $\omega = \sigma$, $\alpha = \beta$ a máme tedy

$$- \cos \sigma \,.\, \cos^2 \alpha = \cos \sigma - \sin^2 \alpha$$

a odtud

$$\cos \alpha = tg \frac{\sigma}{2}$$

a

$$\cos \varphi = \frac{s_1^2}{s^2} = tg^2 \frac{\sigma}{2}.$$

Úloha 5.

Kružnice opsané trojúhelníkům sestrojeným nad stranami libovolného pětiúhelníka prodloužením všech jeho stran protínají se kromě v jeho vrcholech ještě v pěti dalších bodech, o nichž jest dokázati, že leží vždy na kružnici. Dr. *P.* Pecl.

Řešení zaslal p. *A. Pelikán* z V. tř. r. v Telči.

Pětiúhelník druhého řádu $A_2B_2C_2D_2E_2$ měj dvojné body A, B, C, D, E a průsečíky kružnic opsaných trojúhelníkům ABD_2, BCE_2, BDA_2, DEB_2 a EAC_2 buďtež B_1, C_1, D_1, E_1 A_1. Úhly při A_2, B_2 ... buďte ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5.

Pak v trojúhelníku A_2BC_2 jest

$$\sphericalangle A_2BC_2 = 2R - (\omega_1 + \omega_2)$$

a poněvadž čtyřúhelník AA_1D_2B jest vepsán kruhu, jest

$$\sphericalangle AA_1D_2 = 2R - (\omega_1 + \omega_3)$$

a dále $\sphericalangle EA_1A = \omega_3$, tedy $\sphericalangle EA_1D_2 = 2R - \omega_1$, pročež čtyřúhelník $A_2D_2A_1E$ jest vepsán kruhu. Z podobných důvodů je vepsán kruhu i čtyřúhelník $A_2BA_1C_2$.

Nazveme $\sphericalangle A_1E_1A = \alpha$, $\sphericalangle AE_1B_1 = \beta$, pak $\sphericalangle A_1E_1B_1 = \alpha + \beta$. Však i $\sphericalangle A_1EA = \alpha$. Poněvadž pak $\sphericalangle A_1A_2D_2$ leží v kruhu (D_2, E, A_2) nad tětivou A_1D_2 jest i $\sphericalangle A_1A_2D_2 = \alpha$ a poněvadž tento úhel leží v kruhu (C_2, B, A_2) nad tětivou A_1B, jest též $\sphericalangle A_1C_1B = \alpha$.

Podobně

$$\sphericalangle B_1C_1B = \sphericalangle B_1CB = \sphericalangle B_1B_2D_2 = \sphericalangle B_1E_1A = \beta.$$

Jest tedy $\sphericalangle A_1C_1B_1 = \alpha + \beta = \sphericalangle A_1E_1B_1$ a tudíž oba úhly nad touž tětivou A, B ležící stejny a tedy všecky čtyři vrcholy na téže kružnici.

Docela obdobně lze ukázati, že

$$\sphericalangle A_1D_1B_1 = \sphericalangle A_1D_1D_2 + \sphericalangle D_2D_1B_1 = \alpha + \beta.$$

Pročež $\sphericalangle A_1B_1E_1 = \sphericalangle A_1D_1B_1 = \sphericalangle AC_1B_1$, z čehož plyne, že kružnice (A_1, B_1, C_1, E_1) jde i bodem D_1 a tedy všech pět bodů A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 leží na kružnici, c. b. d.

Úloha 6.

V kružnici o středu O a poloměru $OA = r$ sestrojen jest středový úhel $AOB = 60^0$; kolmice z A na OB spuštěná budiž v; na přímku, vedenou bodem A stejnosměrně s OB naneseno pořadem $AI = \frac{1}{2}v$, $AII = \frac{2}{3}v$, $AIII = \frac{4}{5}v$, $AIV = v$, $AV = r$, $AVI = r + \frac{v}{5}$, $AVII = \frac{5}{3}v$, $AVIII = r + v$. *Body I, II, III atd. spojeny s O udávají na kružnici body 1, 2, 3 . . . 8 tak, že* $A1 \doteq a_{21}$, $A2 \doteq a_{17}$, $A3 \doteq a_{15}$, $A4 \doteq a_{13}$, $A5 \doteq a_{12}$, $A6 \doteq a_{11}$, $A7 \doteq a_{10}$ *a* $A8 \doteq a_9$ *(a_n strana prav. n-úhelníka do kružnice vepsaného). Stanoviti chyby těchto přibližných konstrukcí na úhlech středových.* Prof. *J. Archleb.*

Řešení zaslal p. *B. Kořínek* ze VII. tř. r. v Olomouci.

Z bodu N (I, II, . .) veďme kolmici NK_n na přímku OA. Tu $\sphericalangle NAK_n = 60^0$

$$\overline{NK_n} = \overline{AN} \,.\, \cos 60^0 = \tfrac{1}{2}\,\overline{AN},$$
$$\overline{AK_n} = \overline{AN} \,.\, \sin 60^0 = \tfrac{1}{2}\,\overline{AN}\sqrt{3},$$
$$\operatorname{cotg} \alpha_n = \frac{\overline{K_nO}}{\overline{NK_n}} = \frac{2r + \overline{AN}}{\overline{AN} \,.\, \sqrt{3}}.$$

Dosazujíce za $\overline{AN}$ udané délky AI, AII . . . obdržíme úhly středové:

$$\alpha_{21} \doteq 17^0\,7'\,57''; \quad \alpha'_{21} = \frac{2\pi}{21} = 17^0\,8'\,24''$$

a chyba

$$\delta_{21} = \alpha_{21} - \alpha'_{21} = -37''$$

$\alpha_{17} = 21^0 12' 22''$; $\alpha'_{17} = 21^0 10' 35''$; $\delta_{17} = 1' 47''$,
$\alpha_{15} = 23^0 59' 7''$; $\alpha'_{15} = 24^0$; $\delta_{15} = -53''$,
$\alpha_{13} = 27^0 37' 35''$; $\alpha'_{13} = 27^0 41' 32''$; $\delta_{13} = -3' 57''$,
$\alpha_{12} = 30^0$; $\alpha'_{12} \doteq 30^0$; $\delta_{12} = 0$,
$\alpha_{11} = 32^0 38' 2''$; $\alpha'_{11} = 32^0 43' 38''$; $\delta = -5' 36''$,
$\alpha_{10} = 35^0 58' 49''$; $\alpha'_{10} = 36^0$; $\delta_{10} = -1' 11''$,
$\alpha_9 = 39^0 53' 45''$; $\alpha'_9 = 40^0$; $\delta_9 = -6' 15''$.

Úloha 7.

Dokažte rozšířenou větu Menelaovu: Každá příčka protíná strany n-úhelníka v n bodech, pro které součin dělicích poměrů vzhledem k vrcholům n-úhelníka jakožto základním rovná $+1$.

Jan Svoboda, akademik.

Důkaz 1. podal p. *A. Pelikán* z V. tř. r. v Telči.

Označme vrcholy n-úhelníka ciframi 1, 2, 3 ... n, veďme z vrcholu 1 všecky úhlopříčny $\overline{1,2}$, $\overline{1,3}$, ... $\overline{1,n}$. Příčka protínej strany n-úhelníka nebo zmíněné úhlopříčny v bodech, jichž dělicí poměry mějte hodnoty $d_{1,2}$, $d_{2,3}$ ..., obecně $d_{r,s}$ na úsečce $\overline{r,s}$. Součiny dělicích poměrů vzniklých na stranách trojúhelníků 1, 2, 3; 1, 3, 4; ..; 1, $(n-1)$, n buďtež R_1, R_2 ... R_{n-2}. Pak

$$\begin{aligned}
R_1 &= d_{1,2}\ d_{2,3}\ .\ d_{3,1} &&= 1\\
R_2 &= d_{1,3}\ .\ d_{3,4}\ .\ d_{4,1} &&= 1\\
R_3 &= d_{1,4}\ d_{4,5}\ .\ d_{5,1} &&= 1\\
&\vdots\\
R_{n-3} &= d_{1,n-2}\ .\ d_{n-2,n-1}\ .\ d_{n-1,1} &&= 1\\
R_{n-2} &= d_{1,n-1}\ .\ d_{n-1,n}\ .\ d_{n,1} &&= 1
\end{aligned}$$

Po znásobení všech rovnic dostáváme, uvědomíme-li si, že $d_{1,k}\ .\ d_{k,1} = 1$,

$$d_{1,2}\ .\ d_{2,3}\ .\ d_{3,4}\ \ldots\ d_{n-1,n}\ .\ d_{n,1} = 1,$$ c. b. d

Důkaz 2. podal p. *V. Krch* ze VI. tř. r. v Hradci Králové.

Buďtež A, B, C ... N vrcholy daného n-úhelníka; průsečíky příčky p se stranami AB, BC, CD, ..., MN, NA nazveme A_1, B_1, C_1, ..., M_1, N_1. Promítněme pak všecky zmíněné body ve směru dané příčky do jedné (prodloužené) strany ku př. AB a označme průměty vrcholů písmeny $A' (\equiv A)$, $B' (\equiv B)$, C', D', ... M', N'; společným průmětem bodů A_1, B_1, C_1, ..., N_1 jest bod A_1.

Pak platí

$$\frac{AA_1}{BA_1} = \frac{A'A_1}{B'A_1}$$
$$\frac{BB_1}{CB_1} = \frac{B'A_1}{C'A_1}$$
$$\frac{CC_1}{DC_1} = \frac{C'A_1}{D'A_1}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{NN_1}{AN_1} = \frac{N'A_1}{A'A_1}$$

Znásobením pravých i levých stran všech rovnic obdržíme

$$\frac{AA_1}{BA_1} \cdot \frac{BD_1}{CB_1} \cdots \frac{NN_1}{AN_1} = 1, \text{ c. b. d.}$$

Důkaz 3. podal p. *I. Janku*, ze VII. tř. kn. arcib. sem. v Kroměříži.

Zachovejme označení vrcholů i průsečíků příčky se stranami z důkazu 2. a promítněme všecko rovnoběžně, ale jinak v libovolném směru do dané příčky. Nazveme průměty vrcholů A, B, ... písmeny A'', B'' ... Pak

$$\frac{AA_1}{BA_1} = \frac{AA''}{BB''}$$
$$\frac{BB_1}{CB_1} = \frac{BB''}{CC''}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{NN_1}{AN_1} = \frac{NN''}{AA''}$$

Znásobením těchto rovnic vyplývá opět věta žádaná.

Padnou-li konce některé strany na různé strany příčky, pak je příslušný dělící poměr záporný; to se však stane u mnohoúhelníků 1. řádu buď dvakrát nebo vůbec ne, u každého pak uzavřeného mnohoúhelníka vždy v sudém počtu případů, takže znamení součinu bude vždy kladné.

Úloha 8.

Řešiti rovnici:

$$\sin\left(x+\frac{\alpha-\beta}{2}\right).\sin\left(x-\frac{\alpha-\beta}{2}\right).\sin\left(x-\frac{\alpha+3\beta}{2}\right)$$
$$.\sin\left(x-\frac{3\alpha+\beta}{2}\right)=m.$$

Týž.

Řešení zaslal p. *B. Žabský* z VIII. tř. g. v Praze v Žitné ulici.

Položme

$$x-\frac{\alpha-\beta}{2}=y;$$

pak jest

$$x+\frac{\alpha-\beta}{2}=y+\alpha,\quad x-\frac{\alpha-\beta}{2}=y+\beta,$$
$$x-\frac{\alpha+3\beta}{2}=y-\beta,\quad x-\frac{3\alpha+\beta}{2}=y-\alpha.$$

Daná rovnice přechází pak v tuto:

$$\sin(y+\alpha).\sin(y-\alpha).\sin(y+\beta).\sin(y-\beta)=m.$$

Ježto

$$\sin(\gamma+\delta).\sin(\gamma-\delta)=\sin^2\gamma-\sin^2\delta,$$

jest

$$(\sin^2 y-\sin^2\alpha).(\sin^2 y-\sin^2\beta)=m,$$

což jest pro *siny* biquadratická trinomická rovnice, již lze známou cestou řešiti.

Úloha 9.

Vepsati do čtverce ellipsu protínající kružnici čtverci vepsanou v úhlu 45°. Prof. *R. Hruša* v Novém Městě na Moravě.

Řešení zaslal p. *Fr. Špičák*, abiturient v Plumlově.

Buďtež úhlopříčky daného čtverce osami pravoúhlých souřadnic. Hledaná ellipsa má se dotýkati stran čtverce; podmínka dotyku toho jest

$$A^2a^2+b^2=B^2, \tag{α}$$

avšak

$$A = tg\,45^0 = 1, \quad B = \frac{s\sqrt{2}}{2},$$

tak že ona podmínka zní

$$a^2 + b^2 = \frac{s^2}{2}.$$

Ježto hledaná ellipsa protíná vepsanou kružnici v úhlu 45°, jest

$$tg\,45^0 = 1 = \frac{A' - A}{1 + AA'}, \tag{φ}$$

kdež

$$A_{T_k} = -\frac{x_1}{y_1}, \quad A'_{T_e} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Vložením těchto hodnot za A a A' do rovnice (φ) obdržíme relaci

$$(a^2 - b^2)\,x_1 y_1 = a^2 b^2, \tag{β}$$

kdež x_1, y_1 jsou souřadnice průsečíku kružnice a ellipsy, vyhovující naší úloze; rovnice (β) značí zároveň rovnici rovnostranné hyperboly.

Poněvadž hledaný bod $M(x_1, y_1)$ nachází se na kružnici onomu čtverci vepsané a na oné hledané ellipse, vyhovují jeho souřadnice rovnici kruhu a rovnici ellipsy, tak že

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{s^2}{4}, \tag{γ}$$

$$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2. \tag{δ}$$

K vypočtení souřadnic x_1, y_1 a os a, b máme čtyři rovnice (α, β, γ, δ).

Abychom hledané osy nalezli, řešme rovnice (γ) a (δ) dle x_1, y_1, tak že

$$x_1^2 = \frac{a^2(s^2 - 4b^2)}{4e^2}, \quad y_1^2 = \frac{b^2(4a^2 - s^2)}{4e^2}.$$

Vložíme-li tyto hodnoty za x_1 a y_1 do rovnice (β), obdržíme rovnici

$$4s^2(a^2 + b^2) - 32a^2b^2 - s^4 = 0,$$

která se ještě zjednoduší použitím rovnice (α), tak že

$$s^4 = 32a^2b^2. \tag{ε}$$

Odmocnění rovnice (ε) poskytne rovnici

$$ab = \frac{s^2\sqrt{2}}{8};$$

řešením s rovnicí (α)

$$a^2+b^2=\frac{s^2}{2}$$

obdržíme

$$a=\frac{s}{4}\sqrt{4+2\sqrt{2}},$$

$$b=\frac{s}{4}\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

jako poloosy hledané ellipsy.

Úloha 10.

Do kosočtverce o úhlopříčnách 2m, 2n vepsati ellipsu protínající vepsanou kružnici v úhlu 45°. *Týž.*

Řešení zaslal p. *V. Boubal* ze VII. tř. r. v Písku.

Rovnice kruhu vepsaného jest, volíme-li úhlopříčky za osy souřadné,

$$x^2+y^2=\frac{m^2n^2}{m^2+n^2}.$$

Má-li býti přímka $P\equiv\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ tečnou ellipsy $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, musí

$$b^2m^2+a^2n^2=m^2n^2. \tag{1}$$

Souřadnice průsečíků ellipsy a kružnice jsou

$$x_{1,2}=\pm\frac{an}{\sqrt{m^2+n^2}},\quad y_{1,2}=\pm\frac{bm}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Tečna kružnice v jednom z průsečíků jest

$$T_1\equiv\frac{an}{\sqrt{m^2+n^2}}x+\frac{bm}{\sqrt{m^2+n^2}}y=\frac{m^2n^2}{m^2+n^2}$$

a ellipsy

$$T_2\equiv\frac{n}{a\sqrt{m^2+n^2}}x+\frac{m}{b\sqrt{m^2+n^2}}y=1.$$

Aby tečny svíraly úhel 45°, musí platiti

$$1=\frac{mn}{ab}\cdot\frac{a^2-b^2}{m^2+n^2}.$$

Řešením této rovnice s rovnicí (1) vypočteme

$$a = \frac{m}{2\sqrt{m^2+n^2}}\sqrt{3n^2+m^2+\sqrt{(m^2+n^2)^2+(2mn)^2}}$$

$$b = \frac{n}{2\sqrt{m^2+n^2}}\sqrt{3m^2+n^2-\sqrt{(m^2+n^2)^2+(2mn)^2}}.$$

Dle takto psaných výrazů lze a i b sestrojiti. Při $m = n = u$ obdržíme výsledky příkladu předešlého.

Úloha 11.

Ustanoviti součinitele při x^{14} v rozvinutém výraze

$$(1-x^3)^9 \, . \, (1+x^2)^{10}.$$

Tý.

Řešení zaslal p. *J. Kostlivý* ze VII. tř. g. v Domažlicích.

Rozviňme oba výrazy v binomickou řadu i obdržíme:

$$(1-x^3)^9 = 1 - \binom{9}{1}x^3 + \binom{9}{2}x^6 - \binom{9}{3}x^9 + \ldots - \binom{9}{9}x^{27}.$$

$$(1+x^2)^{10} = 1 + \binom{10}{1}x^2 + \binom{10}{2}x^4 + \binom{10}{3}x^6 + \ldots + \binom{10}{10}x^{20}.$$

Z levé strany rovnic vybeřme členy, které znásobením obou rovnic dávají x^{14} a koefficienty jejich sečtěme.

Jsou to výrazy

$$\binom{10}{7}x^{14},\ \binom{9}{2}x^6 . \binom{10}{4}x^8,\ \binom{9}{4}x^{12} . \binom{10}{1}x^2.$$

Provedeme-li, obdržíme:

$$120x^{14} + 7560x^{14} + 1260x^{14} - 8940x^{14}.$$

Hledaný koefficient při x^{14} jest tedy 8940.

Úloha 12.

Dokázati, že

$$cosec\,\alpha\ cosec\,2\alpha + cosec\,2\alpha\ cosec\,3\alpha + \ldots$$
$$+ cosec\,(n-1)\,\alpha\ .\ cosec\,n\alpha =$$
$$= sin\,[(n-1)\,\alpha]\ .\ cosec^2\,\alpha\ .\ cosec\,n\alpha.$$

Tý.

Řešení zaslal p. *Fr. Špičák*, abiturient v Plumlově.

Upravme danou řadu pomocí vzorce

$$cotg\,\varphi - cotg\,\psi = \frac{sin\,(\psi-\varphi)}{sin\,\varphi\ sin\,\psi} = sin\,(\psi-\varphi) . cosec\,\varphi . cosec\,\psi;$$

tedy z této rovnice

$$cosec\ \varphi\ .\ cosec\ \psi = cosec(\psi - \varphi)\ .\ (cotg\ \varphi - cotg\ \psi),$$
$$S = cosec\ \alpha\ .\ (cotg\ \alpha - cotg\ 2\alpha + cotg\ 2\alpha - cotg\ 3\alpha$$
$$+ \ldots + ctg(n-1)\alpha - cot\ n\alpha),$$
$$S = cosec\ \alpha\ .\ (cotg\ \alpha - cotg\ n\alpha),$$
$$S = cosec\,\alpha . \frac{sin\,(n-1)\alpha}{sin\,\alpha\,.\,sin\,(n\alpha)} = sin\,[(n-1)\,\alpha]\,.\,cosec^2\,\alpha\,.\,cosec\,(n\alpha).$$

Úloha 13.

Ukázati, že výraz

$$2^{4n+1} - 2^{2n} - 1$$

jest pro celistvá a kladná n vždy dělitelný devíti; kdy je nad to dělitelný 27? *Týž.* (*L.*)

Řešení zaslal p. *V. Viktora* z VIII. tř. g. v Příbrami.

$$2^{4n+1} - 2^{2n} - 1 = 2^{4n}\,.\,2 - 2\,.\,2^{2n} + 2^{2n} - 1$$
$$= 2\,.\,2^{2n}(2^{2n} - 1) + (2^{2n} - 1) = (2^{2n} - 1)(2^{2n+1} + 1);$$

první činitel dělitelný je $2 + 1 = 3$ (rozdíl sudých mocnin atd.), druhý činitel $2 + 1 = 3$ (součet lichých mocnin atd.); tedy je výraz dělitelný 9.

Je-li $n = 3p$ (p = celé, kladné číslo), potom 1. činitel: $(64^p - 1) = (64 - 1)(64^{p-1} + 64^{p-2} \ldots) = 63\,(64^{p-1} \ldots)$ dělitelný 9; celý výraz tedy dělitelný 27.

Nebo je-li $n = 3k + 1$, má druhý činitel tvar

$$2^{6k+3} + 1 \quad \text{čili} \quad (2^{2k+1})^3 + 1$$

a to jest dělitelno číslem $2^3 + 1$ a tedy celý výraz opět 27i.

Úloha 14.

Ukázati, že

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^2 - x^n$$
$$= (1 + x + \ldots + x^{n+1})\,.\,(1 + x + \ldots + x^{n-1}).$$

Týž. (*L.*)

Řešení zaslal p. *K. Zvěřina* z VII. tř. g. v Boskovicích.

Položíme-li výraz

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n) = a,$$

lze psáti:

$$a^2 - x^n = (a + x^{n+1})(a - x^n),$$
$$a^2 - x^n = a^2 + ax^{n+1} - ax^n - x^{2n+1},$$
$$x^n(x^{n+1} - 1) = ax^n(x - 1),$$
$$a = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1,$$

jak jsme předpokládali.

Úloha 15.

Ukázati, že součin čtyř po sobě jdoucích členů řady arithmetické zvětšený o čtvrtou mocninu její difference jest úplný čtverec. *Týž.* (*L.*)

Řešení podal p. *B. Žabský* z VIII. tř. g. v Praze (Žitná ul.).

Mějme 4 členy řady arithmetické: a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$ a položme $a + \frac{3}{2}d = x$, bude pak jich součin:

$$\left(x - \frac{3}{2}d\right)\left(x - \frac{1}{2}d\right)\left(x + \frac{1}{2}d\right)\left(x + \frac{3}{2}d\right)$$
$$= \left(x^2 - \frac{9}{4}d^2\right)\left(x^2 - \frac{1}{4}d^2\right) = x^4 - \frac{10}{4}d^2x^2 + \frac{9}{16}d^4.$$

Přidáme-li k tomu d^4 a upravíme, obdržíme pak:

$$x^4 - \frac{10}{4}d^2x^2 + \frac{25}{16}d^4 = \left(x^2 - \frac{5}{2}d^2\right)^2,$$

c. b. d.

Úloha 16.

Ukázati, že výraz

$$1 + \frac{n-1}{n-2} + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)} + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-2)(n-4)(n-6)} + \ldots$$

nabývá pro lichá n hodnoty n, pro sudá n pak hodnoty

$$n - \frac{(n-1)(n-3)\ldots 5\,.\,3\,.\,1}{(n-2)(n-4)\ldots 6\,.\,4\,.\,2}.$$

Týž. (*L.*)

Řešení zaslal p. *V. Vysoudil* ze VII. tř. r. v Litovli.

Označme si daný výraz $f(n)$ a pišme jej ve formě

$$f(n) = 1 + \frac{n-1}{n-2}\left(1 + \frac{n-3}{n-4} + \frac{(n-3)(n-5)}{(n-4)(n-6)} + \ldots\right)$$

čili

$$f(n) = 1 + \frac{n-1}{n-2} f_{(n-2)}.$$

Právě tak obdržíme

$$f(n-1) = 1 + \frac{n-2}{n-3} f_{(n-3)},$$

$$f(n-2) = 1 + \frac{n-3}{n-4} f_{(n-4)},$$

$$\vdots$$

$$f(4) = 1 + \frac{3}{2} f_{(2)},$$

$$f(3) = 1 + \frac{2}{1} f_{(1)},$$

$$f(2) = 1 = 2 - 1,$$

$$f(1) = 1.$$

a) Budiž n liché. Dosazujme postupně:

$$f(3) = 1 + \frac{2}{1} \cdot 1 = 3,$$

$$f(5) = 1 + \frac{4}{3} \cdot 3 = 5,$$

$$\vdots$$

$$f(n) = 1 + \frac{n-1}{n-2} \cdot (n-2) = n.$$

b) Budiž n sudé. Dosazujme postupně:

$$f(4) = 1 + \frac{3}{2}\left(2 - 1\right) = 4 - \frac{3}{2} \cdot 1,$$

$$f(6) = 1 + \frac{5}{4}\left(4 - \frac{3}{2} \cdot 1\right) = 6 - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{4 \cdot 2},$$

$$\vdots$$

$$f(n) = 1 + \frac{n-1}{n-2}\left(n - 2 - \frac{(n-3) \cdot (n-5) \ldots 5 \cdot 3 \cdot 1}{(n-4) \cdot (n-6) \ldots 4 \cdot 2}\right),$$

$$f(n) = n - \frac{(n-3)(n-5) \ldots 5 \cdot 3 \cdot 1}{(n-2)(n-4) \ldots 6 \cdot 4 \cdot 2},$$

q. e. d.

Úloha 17.

Z každého vrcholu trojúhelníka rovnostranného vedena je příčka odchýlená od jedné strany o úhel α. Jak velký musí býti úhel α, aby trojúhelník rovnostranný těmi příčkami omezený zaujímal polovinu plochy daného trojúhelníka.

Učitel *V. Jírsák* v Dobřenici.

Řešení zaslal p. *B. Kořínek* ze VII. tř. r. v Olomouci.

Příčka bodem A vedená protne příčku bodem B vedenou ve vrcholu C_1.

Pak obsah $\triangle ABC_1$ musí se rovnati $\frac{1}{6}$ obsahu $\triangle ABC$.

$$\triangle ABC_1 = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\,.\,\overline{AC_1}\,.\,\sin\alpha,$$

$$\overline{AC_1} = \frac{\overline{AB}}{\sin 60^0}\,.\,\sin(60^0 - \alpha) = \frac{a}{\sin 60^0}\,.\,\sin(60^0 - \alpha).$$

Dosaďme:

$$\triangle ABC_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}\,.\,\sin(60^0 - \alpha)\,.\,\sin\alpha = \frac{1}{6}\,a^2\,\frac{\sqrt{3}}{4}$$

čili

$$\sin(60^0 - \alpha)\,.\,\sin\alpha = \frac{1}{8}.$$

Rozložme v rozdíl cosinů:

$$\cos(60^0 - 2\alpha) - \cos 60^0 = \frac{1}{4},$$

$$\cos(60^0 - 2\alpha) = \frac{3}{4},$$

z čehož

$$60^0 - 2\alpha = 41^0 24' 36''$$

a

$$\alpha = 9^0 17' 42''.$$

Úloha 18.

Dán kosočtverec $ABCD$ o středu O; vepišme kružnice: 1.) do kosočtverce $ABCD$, 2.) do trojúhelníka ABC, 3.) do trojúhelníka ABD, 4.) do trojúhelníka ABO. Dán-li je jeden z úhlů, ve kterém se libovolné dvě z těchto kružnic protínají, *ustanoviti úhly, v nichž se protínají ostatní páry těch kružnic i úhel kosočtverce.* *Týž.*

Řešení podal p. autor.

Nazveme

$$\overline{AO} = a, \quad \overline{BO} = b, \quad \sphericalangle DAB = 2\varepsilon$$
$$\overline{OH} = r, \quad \overline{OO_1} = r_1, \quad \overline{OO_2} = r_2,$$

kdež O_1 a O_2 jsou středy kružnic vepsaných do trojúhelníků ABC a ABD.

Pak

$$r = a \sin \varepsilon$$
$$r_1 = a\, tg \frac{\varepsilon}{2}$$
$$r_2 = b\, tg \left(45^0 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

G buď průsečík velké kružnice s první malou, H s druhou.

V $\triangle OO_1G$ jest $\overline{O_1G} = \overline{O_1O}$, proto

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}\overline{OG}}{\overline{O_1G}} = \frac{r}{2r_1} = \frac{2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{\varepsilon}{2}}{2 \cdot \dfrac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\cos \frac{\varepsilon}{2}}} = \cos^2 \frac{\varepsilon}{2}.$$

Je-li $\cos \alpha = m$, jest

$$\left.\begin{aligned} \sin \frac{\varepsilon}{2} &= \sqrt{1 - m} \\ \cos \frac{\varepsilon}{2} &= \sqrt{m} \qquad \cos \varepsilon = 2m - 1 \\ tg \frac{\varepsilon}{2} &= \sqrt{\frac{1 - m}{m}} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

V rovnoramenném $\triangle\ OHO_2$ jest

$$\cos \beta = \frac{r}{2r_2} = \frac{a \sin \varepsilon}{2b\, tg \left(45^0 - \frac{\varepsilon}{2}\right)},$$

a protože

$$tg \left(45^0 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\cos \varepsilon}{1 + \sin \varepsilon},$$

jest

$$\cos\beta = \frac{1+\sin\varepsilon}{2},$$

$$\sin\varepsilon = 2\cos\beta - 1.$$

Je-li $\cos\beta = n$, jest

$$\begin{aligned}\sin\varepsilon &= 2n - 1,\\ \cos\varepsilon &= \sqrt{n(1-n)}.\end{aligned} \tag{2}$$

Mezi úhly α a β je dle (1) a (2) vztah

$$\cos\alpha + \cos\beta - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta) = \tfrac{1}{4}. \tag{I.}$$

Budiž dále O_3 střed kružnice vepsané do $\triangle\ ABO$ a r_3 její poloměr, K a J průsečíky s kružnicemi o středech O_2 a O_1. Pak

$$\overline{O_3O_1}^2 = r_3^2 + (r_1 - r_3)^2,$$

$$\overline{O_2O_3}^2 = r_3^2 + (r_2 - r_3)^2.$$

V $\triangle\ O_1JO_3$

$$\overline{O_1O_3}^2 = \overline{O_1J}^2 + \overline{O_3J}^2 - 2\,\overline{O_1J}\,.\,\overline{O_3J}\cos\varphi,$$

$$r_3^2 + (r_1 - r_3)^2 = r_1^2 + r_3^2 - 2r_1r_3\cos\varphi,$$

$$\cos\varphi = \frac{2r_1 - r_3}{2r_1} = 1 - \frac{r_3}{2r_1}.$$

Ježto

$$r_1 = a\,tg\,\frac{\varepsilon}{2},\quad r_3 = \frac{a\,tg\,\frac{\varepsilon}{2}}{1 + tg\,\frac{\varepsilon}{2}},$$

jest

$$\cos\varphi = \frac{1 + 2\,tg\,\frac{\varepsilon}{2}}{2\left(1 + tg\,\frac{\varepsilon}{2}\right)},$$

z čehož, je-li $\cos\varphi = p$,

$$tg\,\frac{\varepsilon}{2} = \frac{2p-1}{2(1-p)}. \tag{3}$$

V $\triangle\ O_2O_3K$ jest obdobně

$$\cos\psi = 1 - \frac{r_3}{2r_2}.$$

Po úpravě vychází z toho

$$cos\,\psi = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\,tg\,\frac{\varepsilon}{2}.$$

Je-li $cos\,\psi = q$, jest

$$4q = 3 - tg\,\frac{\varepsilon}{2},$$

$$tg\,\frac{\varepsilon}{2} = 3 - 4q. \qquad (4)$$

Dle (3) a (4) jest

$$\frac{2p-1}{2-2p} = 3 - 4q,$$

z čehož

$$p + q - pq = \frac{7}{8}.$$

Je tedy mezi úhly φ a ψ vztah

$$cos\,\varphi + cos\,\psi - cos\,\varphi\,cos\,\psi = \frac{7}{8}. \qquad \text{II.}$$

Dán-li *cos* jednoho úhlu, možno dle rovnic 1.—4. vypočísti ostatní.

Správná řešení zaslaná pp. řešiteli jsou vesměs pro otištění málo stručná.

Úloha 19.

Sestrojiti kružnici daného poloměru, známe-li jeden pól a příslušnou mu poláru. Prof. *J. Archleb.*

1. řešení zaslal p. *K. Kohn* ze VI. tř. r. na Král. Vinohradech.

Nazveme-li pól P, poláru p, patu kolmice spuštěné s pólu na poláru písmenem M, střed kružnice O, platí

$$r^2 = \overline{OM} \,.\, \overline{OP}.$$

Přeneseme-li $\overline{OM}$ za bod P a učiníme-li $\overline{PQ} = \overline{OM}$, bude $\overline{OP} = \overline{MQ}$. Střed S úsečky $\overline{MP}$ bude též středem úsečky $\overline{OQ}$. Nanesu-li tedy na *poláru* od bodu M úsečku $\overline{MU} = r$ a opíši-li poloměrem $\overline{SU}$ kružnici, protne tato přímku $\overline{PM}$ v bodech O, Q, z nichž každý je středem jedné kružnice, jež vyhovují dané úloze.

2. řešení zaslal p. *E. Pelikán* ze VII. tř. r. v Praze, v Ječné ulici.

Zachováme-li označení z 1. řešení a nazveme-li ještě průsečíky kolmice s pólu na poláru spuštěné s kružnicí písmeny A a B (A mezi M a P), pak platí

$$\overline{BP} : \overline{AP} = \overline{BM} : \overline{MA},$$

čili

$$(\overline{OP} + r) : (\overline{OP} - r) = (r + \overline{OM}) : (r - \overline{OM}),$$

nebo

$$\overline{OP} : r = r : \overline{OM}.$$

Položíme-li tedy body P a M libovolnou kružnici, musí dle předchozí rovnice délka tečny z bodu O k té kružnici vedené býti r, t. j. kružnice hledaná a kružnice body P a M vedená protínají se pravoúhle.

Najdeme tedy O jako průsečík přímky MP s geometrickým místem středů kružnic o poloměru r, které libovolnou kružnici body M a P vedenou protínají pravoúhle. To jest kružnice s touto kružnicí soustředná, jež prochází mimo to bodem, jejž obdržíme, když na libovolnou její tečnu od bodu dotyčného naneseme r. Úloha je podle toho dvojznačná, vždy řešitelná.

Mimo řešení otištěná došla různá řešení na základě algebraické analyse provedená.

Úloha 20.

Sestrojiti dvě vzájemně se dotýkající kružnice o poloměrech jsoucích v poměru $m : n$ tak, aby každá dotýkala se jedné ze dvou daných přímek v daném bodě. Ing. *Langr.*

Řešení podané p. autorem.

Buďtež dány 2 různoběžky a a b a na nich body A, B. Průsečík obou různoběžek buď C. Kružnice K_1 dotýkejž se přímky a v bodě A, kružnice K_2 přímky b v bodě B. Dotyčný bod obou kružnic označme D. Poloměry obou kružnic nechť jsou v poměru $r_1 : r_2 = m : n$.

Spojnice CD protíná kružnici K_1 v bodě E, kružnici K_2 v bodě F. Dle dřívějšího musí býti $ED : DF = m : n$.

Dále jest

$$\overline{CA}^2 = \overline{CD} \, . \, \overline{CE} = \overline{CD}(CD + DE),$$
$$\overline{CB}^2 = \overline{CD} \, . \, \overline{CF} = CD\,(CD - DF)$$
$$= \overline{CD}\,(\overline{CD} - \overline{ED} \, . \, \frac{n}{m}).$$

Z obou rovnic lze pak vypočísti

$$\overline{CD}^2 = \frac{m \, . \, \overline{BC}^2 + n \, . \, \overline{AC}^2}{m + n}.$$

Opíšeme-li tedy z průsečíku C co středu kružnici poloměrem CD, jejž lze dle předchozí formule určiti, dostaneme geometrické místo, na němž se dotyčný bod obou kružnic nalézá.

Určeme ještě $\sphericalangle ADB$.

Označíme-li středy obou kružnic O_1, O_2, jest

$$\sphericalangle O_1AD = \sphericalangle O_1DA, \quad \sphericalangle O_2DB = \sphericalangle O_2BD$$

a

$$\sphericalangle O_1DA + \sphericalangle ADB + \sphericalangle BOO_2 = \pi.$$

Dále jest

$$\sphericalangle ADB + \sphericalangle DAC + \sphericalangle DBC + \sphericalangle ACB = 2\pi,$$

nebo také

$$\sphericalangle ADB + \frac{\pi}{2} - \sphericalangle O_1AD + \frac{\pi}{2} -$$
$$- \sphericalangle O_2BD + \sphericalangle ACB = 2\pi,$$

čili

$$\sphericalangle ADB + \sphericalangle ACB - \sphericalangle O_1AD - \sphericalangle O_2BD = \pi.$$

Dle dřívějšího lze psáti

$$\sphericalangle ADB + \sphericalangle ACB - \pi + \sphericalangle ADB = \pi,$$

to jest

$$\sphericalangle ADB = \pi - \frac{\sphericalangle ACB}{2}.$$

Lze tedy neznámý úhel ADB vyjádřiti známým $\sphericalangle ACB$. Ramena $\sphericalangle ADB$ procházejí danými body A, B. Geometrickým místem vrcholů všech úhlů o velikosti ADB, jichž ramena jdou stálými body A, B je kružnice příslušným poloměrem opsaná. Její průsečík s kružnicí z bodu C co středu opsanou určuje bod D. Máme-li dotyčný bod D, lze snadno obě hledané kružnice K_1 a K_2 konstruovati.

Úloha 21.

Nad společnou základnou sestrojeny dva rovnoramenné trojúhelníky, z nichž v jednom jest úhel α proti ramenu, v druhém týž úhel proti základně. Jsou-li poloměry kružnic oběma trojúhelníkům vepsaných v poměru 3 : 1; v jakém poměru jsou poloměry kružnic opsaných? Fr. Jirsák.

Řešení zaslal p. *J. Hanák* ze VII. tř. g. v Prostějově.

V rovnoramenném trojúhelníku ABC budiž ostrý úhel α při vrcholu a v trojúhelníku ABC' proti ramenu. Poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC

$$r_1 = \frac{a}{2 \sin \alpha}.$$

Poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC'

$$r_2 = \frac{a}{2 \sin 2\alpha}.$$

Tedy poměr

$$r_1 : r_2 = \sin 2\alpha : \sin a,$$

čili

$$r_1 : r_2 = 2 \cos \alpha : 1. \qquad (1)$$

Abychom určili tento poměr, musíme znáti $\cos \alpha$ nebo některou funkci úhlu α.

Víme, že $\varrho_1 : \varrho_2 = 3 : 1$.

Avšak

$$\varrho_2 = \frac{a}{2} tg \frac{\alpha}{2},$$

$$\varrho_1 = \left(b_1 - \frac{a}{2}\right) tg \frac{\alpha}{2}$$

(b_1 jest rameno v $\triangle ABC$),

$$b_1 = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}},$$

$$\varrho_1 = \frac{a}{2} tg \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} - 1\right),$$

$$\varrho_1 : \varrho_2 = \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right) : \sin \frac{\alpha}{2} = 3 : 1;$$

z toho

$$sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}.$$

Poněvadž pak

$$cos\, \alpha = 1 - 2\, sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

vychází z rovnice (1)

$$r_1 : r_2 = 7 : 4.$$

Úloha 22.

Ze čtyřúhelníka $ABCD$ dána těžiště T_1, T_2, T_3, T_4 trojúhelníků ABC, BCD, CDA, DAB. Sestrojiti onen čtyřúhelník.

J. Papřok.

I. řešení zaslal p. *A. Wangler* ze VII. tř. g. v Čáslavi.

Označíme-li středy stran AB, BC... písmeny A', B',..., jest $C'T_3 = \frac{1}{3} AC'$, $C'T_2 = \frac{1}{3} BC'$, tedy $T_3T_2 \parallel AB$ a $T_3T_2 = \frac{1}{3} AB$; podobně $T_1T_2 \parallel BC$ a $T_1T_2 = \frac{1}{3} BC$ atd.

Z toho vyplývá podobnost a podobná poloha čtyřúhelníka daného $T_1T_2T_3T_4$ a hledaného čtyřúhelníka $ABCD$. Ježto $C'A'$ půlí T_2T_3 a AB, jakož i T_1T_4 a DC a podobně i $B'D'$ rozpoluje AD a T_1T_2 i BC a T_3T_4, jest průsečík spojnic středu protějších stran čtyřúhelníka $T_1T_2T_3T_4$ středem podobnosti obou obrazců, při čemž poměr podobnosti zřejmě jest $-\frac{1}{3}$. Z toho konstrukce $ABCD$ přímo následuje.

II. řešení zaslal p. *E. Svoboda* ze VII. tř. r. ve Velkém Meziříčí.

Zachovejme označení z I. řešení. Veďme v $\triangle BCC'$ úsečku $T_1F \parallel AB$, kde F jest na BC; tu jest

$$T_1F = \frac{2}{3} BC' = \frac{1}{3} AB \ \#\ T_2T_3.$$

Pak ale musí $T_2F \ \#\ T_1T_3$. Tím způsobem lze pouhým vedením rovnoběžek získati na straně CD bod H, na straně DA bod J

a na straně AB bod K. Vedeme-li pak body F, H, J, K rovnoběžky se stranami T_3T_4, T_1T_4, T_1T_2, T_2T_3, omezí nám tyto přímky hledaný čtyřúhelník $ABCD$.

Úloha 23.

Dány jsou orthogonálné souřadnice bodů T_1, T_2, T_3, T_4 z předešlé úlohy; ustanoviti souřadnice vrcholů A, B, C, D.

Týž.

Řešení zaslal p. *J. Jarůšek* z VIII. tř. g. v Benešově.

Vrcholy hledaného čtyřúhelníka mají souřadnice $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ a těžiště $T_k(\xi_k, \eta_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$. Pak jest

$$\xi_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \eta_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

$$\xi_2 = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3}, \quad \eta_2 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3},$$

$$\xi_3 = \frac{x_3 + x_4 + x_1}{3}, \quad \eta_3 = \frac{y_3 + y_4 + y_1}{3},$$

$$\xi_4 = \frac{x_4 + x_1 + x_2}{3}, \quad \eta_4 = \frac{y_4 + y_1 + y_2}{3}.$$

Řešením těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 + \xi_4, \\ x_2 &= \xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3 + \xi_4, \\ x_3 &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - 2\xi_4, \\ x_4 &= -2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4, \end{aligned}$$

a podobně

$$y_1 = \eta_1 \quad 2\eta_2 + \eta_3 + \eta_4$$

a obdobně souřadnice y_2, y_3, y_4.

Úloha 24.

Úsečka stálé délky d šine se svými koncovými body A, B po ramenech pravého úhlu xOy; stanoviti geometrické místo středů největších kružnic vepsaných do Hippokratových měsíčků trojúhelníků ABO.

K. Čupr.

Řešení zaslal p. *V. Vysoudil* ze VII. tř. r. v Litovli.

Koncové body A, B úsečky $\overline{AB} = d = const$ šinou se po osách $+X$, $+Y$ pravoúhlé soustavy. Největší kružnice vepsané do Hippokratových měsíčků jsou patrně ty, jichž průměry kolmé k osám leží v průměru kružnice nad $\overline{AB}$ jakožto průměrem sestrojeném kolmém k téže ose. Nazveme $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, bod $M(x, y)$ střed jedné takové kružnice ležící ku př. při $\overline{OA}$; pak

$$x = \frac{a}{2},$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2} - \frac{b}{2} + \frac{a}{2}\right) = \frac{a - b + d}{4}.$$

Z toho

$$a = 2x, \quad b = 2x - 4y + d.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do podmínky

$$a^2 + b^2 = d^2,$$

máme rovnici hledaného geom. místa pro bod m

$$2x^2 - 4xy + 4y^2 + dx - 2dy = 0.$$

Rovnice ta značí kuželosečku. Poněvadž souřadnice bodů jejích

$$x = \frac{a}{2},$$

$$y = \frac{a - b + d}{4}$$

jsou vždy konečné, jest to buď ellipsa nebo kruh; snadno rozhodneme, že jest to ellipsa

Avšak ellipsa hledaná jest patrně pošinuta a otočena o jistý úhel, neboť by se v její rovnici nenacházely členy $dx - 2dy$, $-4xy$; transformujeme-li rovnoběžně souřadnice tak, aby střed $O(k, l)$ ellipsy byl počátkem nové soustavy $(X'Y')$, pak musí vymizeti členy $dx = d(x' + k)$, $-dy = -2d(y' + l)$, což se stane za podmínek

$$4k - 4l + d = 0,$$

$$2k - 4l + d = 0,$$

z nichž

$$k = 0, \quad l = \frac{d}{4}.$$

Tedy již známe střed $O\left(0, \frac{d}{4}\right)$; ještě nám zbývá vyšetřiti úhel, o který jest ellipsa hledaná kolem bodu O otočena, a její osy. Dosaďme za $x' = x \cos\alpha - y \sin\alpha$ a za $y' = x \sin\alpha + y \cos\alpha$ a vymyťme členy obsahující koefficient xy. To můžeme učiniti za podmínky

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \sin\alpha \cos\alpha = 0,$$

z níž

$$tg\,\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Nyní máme transformovanou ellipsu v normálném tvaru

$$x^2(2\cos^2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha + 4\sin^2\alpha)$$
$$+ y^2(2\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha) = \frac{d^2}{4}.$$

Dosaďme do něho vypočtené trigonom. funkce; tím obdržíme rovnici ellipsy

$$(10 - 4\sqrt{5})x^2 + (5 + \sqrt{5})y^2 = \frac{d^2}{16}(10 - 2\sqrt{5}),$$

kterou možno psáti

$$\left(\frac{x}{\frac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}d}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{1-\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}d}\right)^2 = 1.$$

Geom. místo pro bod n ležící při $+Y$ jest patrně symmetrické s vyšetřenou ellipsou dle osy úhlu $\widehat{+X+Y}$.

Úloha 25.

Stanoviti jest limitu

$$L = 2^n(1 - p_n^2)$$

platí-li vztahy

$$p_1 = \sqrt{\frac{1+p_0}{2}},\quad p_2 = \sqrt{\frac{1+p_1}{2}}, \ldots p_{n-1} = \sqrt{\frac{1+p_{n-1}}{2}}.$$

Tý.

Řešení.

Při řešení úlohy této téměř všichni pp. řešitelé opravili si tiskovou chybu vzniklou vynecháním slov . . . „při čemž $|p_0| < 1$“. Pak stačí klásti $p_0 = \cos\alpha$; pak jest

$$p_1 = \cos\frac{\alpha}{2},\quad p_2 = \cos\frac{\alpha}{4}, \ldots p^n = \cos^2\frac{\alpha}{2^n},$$

a posléze

$$L = 2^n\left(1 - \cos^2\frac{\alpha}{2^n}\right) = 2^n \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2^n}.$$

Snadno odvodíme, že

$$\frac{\sin x}{x} = 1 \; (\lim x = 0);$$

tedy

$$2^n L = \left(2^n \cdot \sin\frac{\alpha}{2^n}\right)^2_{\lim n = \infty} = 1.$$

a

$$L = \frac{1}{2^n}_{\lim n = \infty} = 0.$$

Pan K. Staffa, stud. VII. tř. r. v Olomouci, nalezl i druhou chybu, jež se do tisku vloudila: bylo proponováno hledati limitu

$$2^{2n}(1 - p_n^2),$$

pak jest, použijeme-li limity

$$L = \frac{\sin mx}{x} = m, \quad (\lim x = 0)$$

$$L = \left(2^n \sin\frac{\alpha}{2^n}\right)^2 = \alpha^2 = (arc \cos p_0)^2, \quad (n = \infty).$$

Specielně pro $p_0 = 0$, jest $L = \frac{\pi^2}{4}$.

Některá řešení vynikají zajímavými obraty: p. V. Boubal, stud. VII. tř. r. v Písku; p. V. Vysoudil, stud. VII. tř. r. v Litovli; p. J. Jarůšek, stud. VIII. tř. g. v Benešově.

Úloha 26.

Určiti geometrické místo těžišť trojúhelníků stálého obsahu Δ, které vepsány jsou do paraboly $y^2 = 2px$ a mají ve vrcholu paraboly jeden svůj společný stálý vrchol. Týž.

Řešení zaslal p. *V. Boubal* ze VII. tř. r. v Písku.

Trojúhelník OAB budiž vepsán do paraboly a souřadnice jeho vrcholů buďtež $O(0, 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ a těžiště

$t(x, y)$. Obsah $\triangle = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$, dále jest

$$y = \frac{y_1 + y_2}{3},$$
$$x = \frac{x_1 + x_2}{3},$$
$$y_1^2 = 2px_1,$$
$$y_2^2 = 2px_2.$$

Z rovnic těchto nutno vyloučiti veličiny x_1, y_1, x_2, y_2.

Dosadíme-li za x_1 a x_2 do první rovnice z posledních dvou, obdržíme

$$4\triangle p = y_1 y_2 (y_1 - y_2). \tag{1}$$

Jelikož jest

$$3y = y_1 + y_2$$

a

$$y_1^2 + y_2^2 = 6px,$$

jest

$$2y_1 y_2 = 9y^2 - 6px,$$
$$y_1 - y_2 = \sqrt{12px - 9y^2}.$$

Vložením těchto hodnot do (1) a zdvojmocněním nabudeme rovnice geom. m.:

$$(9y^2 - 6px)^2 (12px - 9y^2) = 64\triangle^2 p^2,$$

což je křivka dle X souměrná na pravo od Y položená.

Úloha 27.

Ustanoviti geometrické místo středů kružnic, jež dané tři kružnice protínají pod stejným úhlem. *T. T.*

Řešení zaslal p. *B. Kořínek* ze VII. tř. r. v Olomouci.

Mějme dány 3 kružnice: $K_1[s_1(a_1, b_1), r_1]$, $K_2[s_2(a_2, b_2), r_2]$ a $K_3[s_3(a_3, b_3), r_3]$. Kružnice $K[s(x, y), r]$ nechť protíná všechny tři kružnice dané v bodech m, n, p tak, aby

$$\sphericalangle sms_1 = \sphericalangle sns_2 = \sphericalangle sps_3 = \text{proměnnému } \sphericalangle \alpha.$$

Pak můžeme z $\triangle sms_1$ psáti

$$\overline{sm}^2 + \overline{s_1 m}^2 - 2\overline{sm} \, . \, \overline{s_1 m} \, . \cos\alpha = \overline{s_1 s}^2$$

čili

$$r^2 = r_1^2 - 2r \, . \, r_1 \, . \cos\alpha = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 \tag{1}$$

a podobně

$$r^2 + r_2^2 - 2r \,.\, r_2 \,.\, \cos\alpha = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2, \quad (2)$$
$$r^2 + r_3^2 - 2r \,.\, r_3 \,.\, \cos\alpha = (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2. \quad (3)$$

Odečteme-li rovnice (2) a (3) od (1), položivše zároveň

$$a_n^2 + b_n^2 - r_n^2 = L_n,$$

dostaneme

$$2x(a_1 - a_2) + 2y(b_1 - b_2) - 2r \,.\, \cos\alpha \,.\, (r_1 - r_2) = L_1 - L_2,$$
$$2x(a_1 - a_3) + 2y(b_1 - b_3) - 2r \,.\, \cos\alpha \,.\, (r_1 - r_3) = L_1 - L_3.$$

Vyloučíme-li odtud výraz

$$2r \,.\, \cos\alpha,$$

obdržíme po zjednodušení:

$$\begin{aligned} &2x[r_1(a_2 - a_3) + r_2(a_3 - a_1) + r_3(a_1 - a_2)] \\ &+ 2y[r_1(b_2 - b_3) + r_2(b_3 - b_1) + r_3(b_1 - b_2)] \\ &= r_1(L_2 - L_3) + r_2(L_3 - L_1) + r_3(L_1 - L_2). \end{aligned}$$

Nebo píšeme-li ve tvaru determinantů:

$$G \equiv 2 \begin{vmatrix} r_1, & a_1, & 1 \\ r_2, & a_2, & 1 \\ r_3, & a_3, & 1 \end{vmatrix} x + 2 \begin{vmatrix} r_1, & b_1, & 1 \\ r_2, & b_2, & 1 \\ r_3, & b_3, & 1 \end{vmatrix} y$$
$$- \begin{vmatrix} r_1, & a_1^2 + b_1^2 - r_1^2, & 1 \\ r_2, & a_2^2 + b_2^2 - r_2^2, & 1 \\ r_3, & a_3^2 + b_3^2 - r_3^2, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Hledaným geom. místem jest tedy přímka o stanovené rovnici. Poněvadž však výraz $\cos\alpha$, jejž jsme vyloučili jako proměnnou, může nabýti různých hodnot pouze v mezích od -1 do $+1$, bude též naší podmínce vyhovovati pouze úsečka, jejíž koncové body stanovíme z rovnic (1), (2), (3) dosazením extrémních hodnot -1 a $+1$ za $\cos\alpha$. V prvém případě pro $\cos\alpha = -1$ dotýkati se bude kružnice K daných kružnic vně, v druhém vnitř. Kromě toho jde úsečka tato i chordálným středem daných kružnic.

Jsou-li kružnice všecky stejně veliké, geometrické místo přechází v jediný bod.

Úloha 28.

Ustanoviti geometrické místo bodů, jichž poláry vzhledem ke třem daným kružnicím sbíhají se vždy v jednom bodě.

Týž.

I. řešení zaslal p. *K. Zvěřina* ze VII. tř. g. v Boskovicích.

Budiž M libovolný pól, jehož poláry vzhledem ke 3 daným kružnicím $K_1(o_1)$, $K_2(o_2)$, $K_3(o_3)$ se sbíhají v jednom bodě N. Průsečíky jednotlivých polár se spojnicí pólu se středem kružnice buďtež po pořádku A_1, A_2, A_3. Poněvadž každá polára tvoří s příslušnou spojnicí pólu M se středem kružnice úhel pravý, leží body A_1, A_2, A_3 na kružnici sestrojené nad $\overline{MN}$ jakožto průměrem. Střed této kružnice leží v průsečíku symmetrál tětiv $\overline{A_1M}$, $\overline{A_2M}$, $\overline{A_3M}$. Každou z těchto symmetrál rozpoluje se však také tečna vedená pólem M k příslušné z daných kružnic. Jsou tedy všechny tři symmetrály chordálami vždy jedné ze tří daných kružnic a bodu M. Ježto střed kružnice sestrojené nad $\overline{MN}$ jakožto průměrem leží v průsečíku všech tří symmetrál, protíná tato tři kružnice dané pravoúhelně. Jest tedy hledaným geometrickým místem kružnice $K(o)$ protínající tři dané kružnice pravoúhelně a střed její jest, jak známo, v průsečíku chordál kružnic K_1, K_2, K_3.

II. řešení zaslal p. *A. Pelikán* z V. tř. r. v Telči

Buďtež dány 3 kruhy

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 + l_1x + m_1y + n_1 = 0,$$
$$K_2 \equiv x^2 + y^2 + l_2x + m_2y + n_2 = 0,$$
$$K_3 \equiv x^2 + y^2 + l_3x + m_3y + n_3 = 0.$$

Poláru bodu $m(x_0, y_0)$ vzhledem K_1 lze psáti ve tvaru:

$$P_1 \equiv x(2x_0 + l_1) + y(2y_0 + m_1) + x_0l_1 + y_0m_1 + 2n_1 = 0,$$

a podobně

$$P_2 \equiv x(2x_0 + l_2) + y(2y_0 + m_2) + x_0l_2 + y_0m_2 + 2n_2 = 0,$$
$$P_3 \equiv x(2x_0 + l_3) + y(2y_0 + m_3) + x_0l_3 + y_0m_3 + 2n_3 = 0.$$

Mají-li všecky tři poláry probíhati jedním bodem, jest třeba aby platilo

$$\begin{vmatrix} 2x_0 + l_1, & 2y_0 + m_1, & x_0 l_1 + y_0 m_1 + 2n_1 \\ 2x_0 + l_2, & 2y_0 + m_2, & x_0 l_2 + y_0 m_2 + 2n_2 \\ 2x_0 + l_3, & 2y_0 + m_3, & x_0 l_3 + y_0 m_3 + 2n_3 \end{vmatrix} = 0,$$

což jest rovnice hledaného geometrického místa.

Vyvineme-li, obdržíme po patřičném zrušení

$$x^2 + y^2 - 2\frac{l_0}{p_0}x - 2\frac{m_0}{p_0}y + 2\frac{n_0}{p_0} = 0,$$

při čemž čísla l_0, m_0, p_0, n_0 jsou vyjádřena determinanty:

$$l_0 = \begin{vmatrix} m_1, & n_1, & 1 \\ m_2, & n_2, & 1 \\ m_3, & n_3, & 1 \end{vmatrix}, \quad m_0 = \begin{vmatrix} n_1, & l_1, & 1 \\ n_2, & l_2, & 1 \\ n_3, & l_3, & 1 \end{vmatrix},$$

$$p_0 = \begin{vmatrix} l_1, & m_1, & 1 \\ l_2, & m_2, & 1 \\ l_3, & m_3, & 1 \end{vmatrix}, \quad n_0 = \begin{vmatrix} n_1, & l_1, & m_1 \\ n_2, & l_2, & m_2 \\ n_3, & l_3, & m_3 \end{vmatrix}.$$

Rozbor: Střed kružnice žádané má souřadnice:

$$s_0\left(\frac{l_0}{p_0}, \frac{m_0}{p_0}\right).$$

Píšeme-li pak

$$l_0 = \begin{vmatrix} m_1 - m_2, & n_1 - n_2 \\ m_1 - m_3, & n_1 - n_3 \end{vmatrix},$$

$$m_0 = \begin{vmatrix} n_1 - n_2, & l_1 - l_2 \\ n_1 - n_3, & l_1 - l_3 \end{vmatrix},$$

$$p_0 = \begin{vmatrix} l_1 - l_2, & m_1 - m_2 \\ l_1 - l_3, & m_1 - m_3 \end{vmatrix},$$

vidíme, že s jest průsek přímek:

$$K_1 - K_2 \equiv x(l_1 - l_2) + y(m_1 - m_2) + n_1 - n_2 = 0,$$
$$K_1 - K_3 \equiv x(l_1 - l_3) + y(m_1 - m_3) + n_1 - n_3 = 0,$$

t. j. chordál všech tří kružnic čili bod rovných mocností.

Úpravou výrazu pro poloměr, který dostaneme ze stanovené rovnice, přesvědčíme se, že poloměr vyjadřuje délku tečny se středu kruhu na dané kruhy vedené, protíná tedy tato kružnice všecky 3 dané kružnice pod pravým úhlem.

Úloha 29.

Ustanoviti kružnici, známe-li mocnosti tří daných bodů vzhledem k ní (ku př. dané body jsou vrcholy trojúhelníka o stranách 6, 8, 10 *a mocnosti jsou postupně* ± 4, ± 9, ± 1). *Řešiti graficky i analyt. geometrií.* *Tý ř.*

Řešení zaslal p. *B. Kořínek* ze VII. tř. r. v Olomouci.

Řešení analytickou geometrií:

Jsou-li souřadnice daných bodů $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ a mocnosti jejich vzhledem ke kružnici

$$K \equiv x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0,$$

(kdež M, N, L jsou čísla neznámá) $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, pak platí vztahy

$$\mathfrak{M}_1 = Mx_1 + Ny_1 + L + x_1^2 + y_1^2,$$
$$\mathfrak{M}_2 = Mx_2 + Ny_2 + L + x_2^2 + y_2^2,$$
$$\mathfrak{M}_3 = Mx_3 + Ny_3 + L + x_3^2 + y_3^2.$$

Z rovnic těchto možno konstanty M, N a L vypočítati, čímž kružnice K jest úplně stanovena. $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ a $\mathfrak{M}_3$ mohou býti jakákoli čísla reálná kladná nebo záporná.

Řešení grafické: *a*) Jsou-li mocnosti kladné.

Protínají-li se 2 kružnice pravoúhelně, tu mocnost středu jedné z nich ke druhé jest rovna čtverci poloměru prvé. Opíšeme-li tedy z daných bodů kružnice o poloměrech $\sqrt{\mathfrak{M}_1}$, $\sqrt{\mathfrak{M}_2}$, $\sqrt{\mathfrak{M}_3}$, a sestrojíme kružnici která stojí na všech třech kolmo, jest tím úloha řešena. Hledaná kružnice má střed v průsečíku chordál tří kružnic. Poloměr jest roven délce tečny ze středu ku kterékoli kružnici vedené.

b) Mocnosti záporné.

Půlí-li kružnice K_1 kružnici K_2 (s_2, r_2), tu mocnost bodu s_2 ke kružnici K_1 jest rovna $-r_2^2$. — Jsou-li tedy mocnosti daných bodů A, B, C ke kružnici hledané $-r_1^2$, $-r_2^2$, $-r_3^2$, opišme z bodů těch kružnice o poloměrech r_1, r_2, r_3 a sestrojme kružnici, která všechny tři půlí. Střed její S leží v průsečíku přímek souměrných s chordálami vždy dvou a dvou kružnice dle rozpolovacího bodu středné obou kružnic. Poloměr má délku

$$R = \sqrt{\overline{SA}^2 + r_1^2} = \sqrt{\overline{SB}^2 + r_2^2} = \sqrt{\overline{SC}^2 + r_3^2}.$$

Jestliže mocnosti jsou různých znamení, je třeba zobraziti kružnici, jež kružnice z daných bodů odmocninami mocností opsané jednak půlí, jednak kolmo protíná. Geom. místo středů kružnic, jež jednu danou kružnici půlí a druhou kolmo protíná, je též přímka kolmo stojící k spojnici středů.

Úloha 30.

Nalézti geometrické místo těžiště niti, pomocí které známým způsobem rýsujeme ellipsu. *Týž.*

Řešení zaslal p. *K. Staffa* ze VII tř. r. v Olomouci.

Budiž dána ellipsa rovnicí $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ o číselné výstřednosti $\varepsilon=\frac{e}{a}$ a na ní libovolný bod $A(x, y)$, jehož průvodiče jsou dány: $r_1=a-\varepsilon x$, $r_2=a+\varepsilon x$. Těžiště průvodičů buďtež T_1, T_2. Jsou-li F_2, F_1 ohniska dané ellipsy, jest

$$\overline{F_2T_2}=\frac{r_2}{2},\quad \overline{F_1T_1}=\frac{r_1}{2}\quad \text{a}\quad \overline{T_2T_1}=\frac{\overline{F_2F_1}}{2}=e.$$

Je-li T těžištěm niti o délce $2a$, platí úměra:

$$T_2T : TT_1 = r_1 : r_2,$$

čili

$$T_2T : T_2T_1 = r_1 : (r_1+r_2),$$

odkudž plyne:

$$T_2T_1=\frac{er_1}{r_1+r_2}=\frac{e(a-\varepsilon x)}{2a}.$$

Jsou-li souřadnice bodů hledaného geom. místa obecně (x_1, y_1), jest zřejmě:

$$y_1=\frac{y}{2},\quad x_1=+\overline{OF_2}+\frac{x+e}{2}+\overline{T_2T},\tag{1}$$

při čemž $+OF_2=-e$, a promítneme-li r_2 na F_2F_1, má délku $e+x$, tedy průmět poloviční má délku $\frac{e+x}{2}$; proto průmět $F_2T_2=\frac{e+x}{2}$..

$$x_1=-e+\frac{e+x}{2}+\frac{e(a-\varepsilon x)}{2a}.\tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) vyhledáme x a y

$$y = 2y_1, \tag{3}$$

$$x = \frac{2a^2x_1}{b^2}, \tag{4}$$

což dosazeno do rovnice ellipsy svrchu uvedené, dává

$$\frac{4a^4x_1^2}{a^2b^4} + \frac{4y_1^2}{b^2} = 1, \quad \text{čili} \quad \frac{4a^2}{b^4} \cdot x_1^2 + \frac{4y_1^2}{b^2} = 1.$$

Toť žádané geom. místo, a jak patrno, ellipsa o poloosách: malé $b_1 = \frac{b}{2}$, $a_1 = \frac{b^2}{2a}$ velké.

Úloha 31.

Sečísti řady:

$$a)\quad \binom{p}{o} \cdot \binom{p}{q} + \binom{p}{1}\binom{p-1}{q-1} + \binom{p}{2}\binom{p-2}{q-2} + \cdots$$

$$b)\quad \binom{o}{p} \cdot \binom{p}{q} + \binom{p}{1}\binom{p-1}{q-1} + \binom{p}{2}\binom{p-2}{q-2} - \cdots$$

V. Simandl.

Řešení zaslal p. *J. Jarůšek* z VIII. tř. g. v Benešově. Transformujme všechny členy podle identického vzorce

$$\binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k} = \frac{p(p-1)\ldots(p-k-1)}{1.2\ldots k} \cdot$$

$$\cdot \frac{(p-k)(p-k-1)\ldots(p-q+1)}{1.2\ldots(q-k)} \cdot$$

$$\cdot \frac{(q-k+1)(q-k+2)\ldots(q-1)q}{(q-k+1)(q-k+2)\ldots(q-1)q} = \binom{q}{k}\binom{p}{q}.$$

Při tom jsme předpokládali $k < q$. Jestliže $q < k$, jest vždy součin $\binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}$ rovný 0.

Obdržíme tedy v prvním daném příkladě pro součet

$$S_1 = \binom{p}{q}\left[\binom{q}{0} + \binom{q}{1} + \binom{q}{2} + \cdots\right]$$

$$= \binom{p}{q}(1+1)^q = 2^q\binom{p}{q}.$$

V druhém případě

$$S_2=\binom{p}{q}\left[\binom{q}{0}-\binom{q}{1}+\binom{q}{2}-\ldots\right]=\binom{p}{q}\cdot(1-1)^q=0.$$

Úloha 32.

$$\binom{p}{q}-\binom{p}{q-1}+\binom{p}{q-2}-\binom{p}{q-3}+\ldots$$

Týž.

Řešení zaslal p. *A. Pelikán* z V. tř. r. v Telči.

Z nauky o číslech kombinačních jest znám vzorec:

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1},$$

položíme-li tu: $n+1=p$, $k+1=q$, bude:

$$\binom{p}{q}=\binom{p-1}{q-1}+\binom{p-1}{q}.$$

Užijeme-li tohoto vzorce pro řadu

$$S_{p,q}=\binom{p}{q}-\binom{p}{q-1}+\binom{p}{q-2}-\binom{p}{q-3}+\ldots$$

$$=\binom{p-1}{q}+\binom{p-1}{q-1}-\binom{p-1}{q-2}-\binom{p-1}{q-1}$$

$$+\binom{p-1}{q-2}+\binom{p-1}{q-3}-\binom{p-1}{q-4}-\binom{p-1}{q-3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

obdržíme po patřičném zrušení

$$S_{p,q}=\binom{p-1}{q}.$$

b) Z deskriptivní geometrie.

Úloha 1.

Nalézti geom. místo středů všech ellips s danou malou poloosou b, uložených na dané rotační ploše kuželové. Odvoditi z toho konstrukci roviny protínající danou rot. plochu kuželovou v dané ellipse. *L. Č.*

Dle řešení, jež zaslal p. *V. Pejše* ze VII. tř. r. v Kostelci n. Orlicí.

Uvažujme z rovin protínajících danou rotační plochu kuželovou (vrchol její nazveme v, odchylku povrchových přímek od osy buď α) v ellipsách o dané malé ose $2b$ nejdříve jen ony, jež jsou kolmy k jedinému osovému řezu. Vedeme-li některou z těchto malých os rovinu kolmou k ose, protne tato rovina plochu kuželovou v kružnici, jejíž průměr ab v osovém řezu onom uložený bude středem ellipsy s rozdělen tak, že

$$\overline{as} \, . \, \overline{sb} = b^2.$$

Při tom průměr $\overline{ab}$ je kolmý k ose kužele. Jedná se tudíž při naší úloze o geometrické místo bodů, které dělí úseky příček kolmých k ose úhlu 2α tak, aby součin částí byl konstantní. To jest však (jak z asymptotické rovnice hyperboly přímo plyne) hyperbola, jejímiž asymptotami jsou povrchové přímky plochy kuželové náležející zvolenému osovému průseku a jejíž reálná poloosa má délku $b \, . \, cotg \, \alpha$. Tečna ve vrcholu této hyperboly určena je příčkou mezi rameny úhlu 2α kolmou k ose toho úhlu a dlouhou $2b$.

V ostatních osových řezech jsou geometrická místa středů rovněž hyperboly a tedy:

Geometrické místo středů všech ellips uložených na dané rotační ploše kuželové a majících malou osu dané délky $2b$, *je rotační hyperboloid dvojplochý; daná plocha kuželová je tomuto hyperboloidu plochou asymptotickou a reálná poloosa jeho má délku* $b \, . \, cotg \, \alpha$, *znamená-li* α *odchylku povrch. přímek plochy kuželové od osy.*

Úloha: *přetnouti danou rot. plochou kuželovou v dané ellipse* je neurčitá. Kdybychom však žádali, aby rovina hledaná byla kolmá k určitému osovému řezu, stačí řešiti úlohu: vésti k dané hyperbole tečnu tak, aby úsek její mezi asymptotami měl danou délku $2a$. Poněvadž víme, že trojúhelníky, omezené asymptotami a tečnami nějaké hyperboly, mají konstantní obsah, jedná se tu o řešení snadné planimetrické úlohy; sestrojiti trojúhelník mající daný obsah (rovný obsahu trojúhelníka rovnoramenného, se základnou $2b$ a protějším úhlem 2α), danou stranu $2a$ a daný protější úhel 2α. Další dvě strany takového trojúhelníka udají vzdálenosti konců velké osy ellipsy od vrcholu plochy kuželové. Přijdeme patrně ke dvěma ellipsám. — Roviny všech ellips, hovících nahoře uvedené úloze neurčité, obalují rot. plochu kuželovou s danou plochou souosou.

Úloha 2.

Sestrojiti plochu kulovou dotýkající se daných dvou různoběžek (nebo rovnoběžek) A a B a třetí přímky C s nimi mimoběžné v bodě c. Prof. *J. Archleb.*

Řešení zaslal p. *J. Suchý* ze VII. tř. r. v Plzni.

Geom. místo středů ploch kulových dotýkajících se dvou různoběžek A a B, jsou obě roviny ϱ a σ, jež procházejí osami úhlů těmi různoběžkami sevřených a jsou kolmy k rovině jejich. Geom. místo středů ploch kulových dotýkajících se dané přímky C v bodě c jest rovina τ bodem c kolmo k přímce C vedená. Roviny ϱ a τ (nebo σ a τ) protínají se v přímce O (O'), jež jest osou hledané koule. Otočíme-li bod c kolem této osy O (O'), vznikne kružnice K (K'), ležící na hledané kouli. Tečna k této kružnici v bodě c sestrojená a přímka C určují rovinu tečnou k ploše kulové a střed její je průsečík kolmice R (R') k této rovině v bodě c vztyčené s osou O (O'). Úloha má obecně dvě řešení. Je-li $A \parallel B$, ubývá rovina σ a řešení je jen jedno.

Úloha 3.

Dána jest rotační plocha kuželová vrcholem v, osou vp a jedním bodem svým a; ustanoviti jinou rotační plochu kuželovou mající daný vrchol u, osu $\overline{uq}$ a dotýkající se první plochy kuželové. Kand. prof. *J. Kroupa.*

Řešení zaslal p. E. Pelikán ze VII. tř. r. v Praze, Ječná ul.

Daná plocha kuželová a hledaná musí míti společnou rovinu tečnou, jež prochází přímkou $\overline{uv}$. Vedeme tedy touto přímkou k dané ploše kuželové rovinu tečnou (jsou dvě), promítneme do ní osy uq i vp. Tyto průměty $\overline{uq'}$ a $\overline{vp'}$ udávají dvě povrchové přímky po jedné z obou ploch kuželových a protínají se v bodě, ve kterém se obě plochy dotknou. Řešení jsou dvě. Jedna nalezená plocha dotýkati se bude dané plochy vně, druhá vnitř. Tato bude danou plochu protínati v křivce, jejímž dvojným bodem bude nalezený dotyčný bod.

Úloha 4.

Ustanoviti polohu svítícího bodu, pro kterou by vržený stín dané koule na I. průmětnu byl omezen parabolou jdoucí danými dvěma body. *L. Č.*

Dle řešení, jež zaslal p. *F Kutnohorský*, abs. reálky v Nové Říši.

Geometrické místo zdrojů světelných, pro něž vržený stín koule na I. průmětnu je parabola, jest rovina tečná τ, dané koule v nejvyšším bodu se dotýkající. Geometrické místo zdrojů světelných, pro něž prochází mez vrženého stínu bodem $\begin{cases} a \\ b \end{cases}$ jest rotační plocha kuželová $\begin{cases} \mathrm{K} \\ \mathrm{L} \end{cases}$ z vrcholu $\begin{cases} a \\ b \end{cases}$ dané kouli opsaná. Hledané zdroje světelné jsou tedy body společné třem plochám K. L a τ. Plochy kuželové K a L, jsouce opsány téže ploše kulové, dotýkají se ve *dvou* bodech, ve kterých se protínají styčné kružnice na kouli. Protínají se tedy obě plochy v páru kuželoseček E a F a průsečíky těchto kuželoseček s rovinou τ jsou hledané zdroje. Roviny kuželoseček E a F jsou kolmy k rovině položené body a, b a s (středem koule), kteráž rovina je oběma plochám a tedy i oběma kuželosečkám rovinou souměrnosti. Promítnutím daných útvarů do této roviny se roviny ϱ a σ kuželoseček E a F snadno ustanoví. Hledané zdroje světelné najdou se pak jako průsečíky přímek, ve kterých se protínají roviny ϱ a τ a pak σ a τ s kteroukoli kuželovou plochou K nebo L. Tyto průsečíky lze nalézti bez rýsování kuželoseček pomocí kružnic, podél kterých se plochy K a L stýkají s danou plochou kulovou. Řešení dané úlohy jsou obecně dvě, poněvadž jedna z kuželoseček E a F neprotíná rovinu τ v reálných bodech.

Úloha 5.

Sestrojiti plochu kulovou, jež dotýká se dvou různoběžek (nebo rovnoběžek) A a B a kromě toho roviny ϱ v některém (neznámém) bodě její přímky C. Prof. *J. Archleb.*

Řešení zaslal p. *Fr. Svoboda* ze VII. tř. r. v Jevíčku.

Střed hledané koule musí ležeti na přímce O (O'), které je průsečnicí roviny σ, jdoucí přímkou C a kolmou k ϱ, s některou z rovin ν a π, které procházejí jednou z os úhlu přímek A a B a jsou k rovině jejich kolmy. Hledaná koule musí se dotýkati rotační plochy kuželové, která povstane otočením přímky C kolem přímky O (O'). Střed její nalezneme, určíme-li průsečík přímky O (O') s jednou z rovin, které kolmo rozpolují úhel přímky A a té přímky povrchové sestrojené rotační plochy kuželové, jež prochází kterýmkoli průsečíkem té přímky A s touto plochou kuželovou.

Řešení jsou obecně čtyři.

Úloha 6.

Určiti plochu kulovou, jež prochází třemi body a, b, c a dotýká se dané plochy kulové **K**. Prof. *J. Mates.*

Řešení I. zaslal p. *K. Staffa* ze VII. tř. r. v Olomouci.

Střed hledané koule hledati jest na přímce O, ve středu kružnice procházející body a, b, c kolmo k jejich rovině vztyčené. Rovina jdoucí přímkou O a středem dané koule protíná onu kružnici ve dvou bodech p, q a danou kouli v hlavní kružnici K. Kružnice procházející body p a q a dotýkající se kružnice K, je hlavní kružnicí hledané koule.

Řešení obecně *dvě*.

Řešení II. Koule daná, hledaná a libovolná koule jdoucí body a, b, c, mají tři chordálné roviny jdoucí touž přímkou, kterou najdeme jeho průsečnici roviny (a, b, c) s chordálnou rovinou koule dané a volené. Roviny tečné touto průsečnicí k dané kouli vedené dotýkají se dané koule v dotyčných bodech hledané koule s danou.

c) Z fysiky.

Úloha 1.

Protéká-li řekou 20 m³ za sekundu při spádu 9 m, kolik koňských sil to obnáší? Kolik žárovek 16tisvíčkových (110 Volt, 0,5 Ampère) by mohla řeka udržovati ve svícení?

Připomínáme, že turbinou se dá zužitkovati 75% jí dodané energie, dynamem 90% energie. Jaký kapitál tu odtéká za den, čítáme-li za KW hodinu 40 h? Dr. F. Pietsch.

Řešení, jež podal p. *V. Cibulka*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.

Padá-li 20 m^3 vody v každé sekundě s výše 9 *m*, vykonává práci 180000 *kgm/sec* = 2400 HP. Turbina zužitkuje z této energie 75%, t. j. 1800 HP, z nichž $^9/_{10}$, t. j. 1620 HP se přemění dynamem na energii elektrického proudu.

Žárovka (100 V, 0·5 A) potřebuje 55 W; ježto 1 HP = 736 W = 0·736 KW stačí 1620 HP na 1620 . 736 : 55 = 21678 žárovek. Počítáme-li KW hodinu za 40 h = 0·4 K, značí denně odtékající voda ztrátu 1620 . 0 736 . 24 . 0 4 K = 11446·27 K za nezužitkovanou energii.

Úloha 2.

Zajisté jest Vám známo zařízení válce u parního stroje, do kterého pára z komory rozváděčem proudí. Záhy shledalo se, že možno výhodnější páry užíti, nenaplníme-li válec celý, nýbrž uzavřeme-li příchod páře dříve než píst dostoupí své krajní polohy. Jest otázka, jaké změny dozná effekt stroje, plní-li se pouze polovina válce. Pokuste se uvésti to do počtu pro tento případ a udejte v procentech bývalého effektu effekt stroje, u něhož pára při poloviční poloze pístu se uzavře. [Připomínáme, že páry přehřáté řídí se zákonem Boyle-Mariottovým (ovšem jen přibližně)]. V čem záleží oekonomie tohoto zařízení?

[Pokyn početní. Druhou polovinu válce si mysleme rozdělenu na 10 stejných objemových částí, v jichž rozsahu tlak považujeme za nepromĕnný.] Týž.

Řešení, jak je udal autor.

Poloviční délku válce nazveme l, $\frac{1}{10} l = x$, P_0 tlak páry z komory přicházející a polovinu válce vyplňující, P_1 tlak uzavřené páry odpovídající objemu o $^1/_{10}$ zvětšenému, P_2 tlak při objemu o $^2/_{10}$ větším atd. Při pohybu pístu dílkem x počítáme s tlakem stálým, rovným průměrnému tlaku na začátku a na konci dílku. Práce při jednom zdvihu bude pak:

$$W = P_0 . l + \frac{P_0 + P_1}{2} . x + \frac{P_1 + P_2}{2} . x$$
$$+ \frac{P_2 + P_3}{2} . x + \ldots\ldots \frac{P_9 + P_{10}}{2} . x.$$

Dle zákona Boyleova jest

$$P_1 = P_0 . \frac{l}{l + x} = P_0 . \frac{l}{l + \frac{l}{10}} = \frac{10}{11} P_0$$

a podobně

$$P_2 = P_0 . \frac{l}{l + 2x} = \frac{10}{12} P_0 \quad \text{až} \quad P_{10} = \frac{10}{20} P_0 = \frac{1}{2} P_0.$$

Z toho plyne pro práci výraz

$$W = P_0 l + \frac{P_0 + P_{10}}{2} . x + x (P_1 + P_2 + \ldots . + P_9)$$
$$= P_0 l \left[1 + \frac{3}{40} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \ldots . + \frac{1}{19} \right] = 1{\cdot}69 . P_0 l.$$

Práce původní, kdyby tlak P_0 působil během pohybu pístu celým válcem, byl by

$$W_0 = P_0 . 2l,$$

takže poměr

$$\frac{W_0}{W} = \frac{2}{1{\cdot}69} = \frac{100}{84{\cdot}5}.$$

Klesne tudíž uzavřením páry práce stroje pouze o 15·5%, kdežto spotřeba páry, podmiňující spotřebu drahého paliva, na polovici.

Úloha 3.

Hmotný bod m se pohybuje po ose x-ové s počát. rychlostí c, jsa retardován silou, úměrnou jeho abscisse x a koëfficientu k. Kde se zastaví? *L. Štětka.*

I. Řešení, jež podal p *V. Pejše* stud. VII. tř. r. v Kostelci n. O.

Pro retardující sílu platí rovnice

$$f = m . a = - k . x,$$

z níž pro urychlení zpětné plyne

$$a = - \frac{k}{m} . x.$$

Tato rovnice charakterisuje pohyb harmonický, jehož amplituda udá nám místo, kde se bod zastaví. V tom okamžiku jest urychlení $a = \gamma_1$ příslušnému urychlení centripetálnému, považujeme-li harmonický pohyb za průmět pohybu kruhového a $x_1 = r$ (poloměru kružnice). Pro centrálné urychlení v onom bodě platí tedy

$$\gamma_1 = \frac{c^2}{r} = \frac{c^2}{x_1},$$

čili dosazením absolutní hodnoty za

$$\gamma_1 = \frac{k}{m} x_1 = \frac{c^2}{x_1}$$

hledaná vzdálenost

$$x_1 = c\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

II. Řešení autorovo. Uvažujme dvě posice bodu m, vzdálené od sebe o velmi malou délku Δ a odpovídající rychlostem v_1 a v_2. Během dráhy Δ ztratí bod m na živé síle obnos $\frac{m}{2} \cdot (v_1^2 - v_2^2)$ rovný práci retardující síly $k \cdot x$, kde x značí abscissu středu velmi krátké trati Δ; jest tedy

$$\frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2) = k \cdot x \cdot \Delta$$

čili

$$\frac{\frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2)}{\Delta} = kx.$$

Napsaný podíl značí ztrátu na živé síle během dráhové jednotky v místě x; vidíme, že jest úměrna elongaci x. Nanášíme-li x jako úsečku a příslušnou ztrátu živé síly, redukovanou na jednotku délky, jakožto pořadnici y, leží koncové body pořadnic na přímce $y = k \cdot x$. Rozdělíme-li x na libovolně malé délky Δ, je patrně ztráta živé síly po této délce vyznačena obdélníkem $kx \cdot \Delta$, a ztráta po délce od $x = 0$ až $x = x_1$ součtem takových obdélníků, t. j. předpokládáme-li jednotlivá Δ nesmírně malá, plochou trojúhelníka

$$\frac{k \cdot x_1}{2} \cdot x_1 = \frac{1}{2} k x_1^2.$$

V bodě x má tedy bod m živou sílu

$$\frac{1}{2}mc^2 - \frac{1}{2}kx^2,$$

a zastaví se v místě x, určeném rovnicí

$$\frac{1}{2}mc^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 = 0$$

čili

$$x_1 = \pm c\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Znamení — odpovídá přechodu bodu zpět přes rovnovážnou polohu ($x = 0$) a novému obrácení při nastalém pohybu kývavém.

III. Řešení vyšší analysí, jež podal p. *Vojt. Vysoudil*, stud. VII. tř. r. v Litovli.

Pro pohyb bodu m platí

$$m \, . \, \frac{d^2x}{dt^2} = -k \, . \, x$$

čili

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1 \, . \, x, \text{ kde } k_1 = \frac{k}{m}.$$

Integrál jest $x = A \, . \, sin\,(t \, . \sqrt{k_1} + C)$. Pro $t = 0$ je $x = 0$, tedy $C = 0$, dále pro $t = 0$, $\frac{dx}{dt} = c$, tedy $A = \frac{c}{\sqrt{k}}$.

Bod se zastaví, když rychlost $\frac{dx}{dt} = 0$, tedy když

$$\frac{dx}{dt} = c \, . \, cos\; t\sqrt{k_1} = 0,$$

což nastane tehdy, když

$$t \, . \sqrt{k_1} = \frac{\pi}{2}, \text{ t. j. } t = \frac{\pi}{2\sqrt{k_1}}.$$

V tom čase bude

$$x = x_1 = \frac{c}{\sqrt{k_1}} \, . \, sin\,\frac{\pi}{2\sqrt{k_1}} \, . \sqrt{k_1} = \frac{c}{\sqrt{k_1}}.$$

Zastaví se tedy pohybovaný bod ve vzdálenosti

$$x_1 = \frac{c}{\sqrt{k_1}} = c\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Úloha 4.

Těleso nepružné hmoty m dopadne s výše h na nepruž. desku hmoty μ, jež spočívá na vertikálném spirálovém péru; síla, jakou péro působí, je úměrna jeho depressi. Kde se těleso m zastaví? Tý ř.

Řešení, jež podal autor.

Těleso m dopadne na μ s rychlostí $\sqrt{2gh}$, takže počáteční rychlost společná jest

$$c = \frac{m\sqrt{2gh}}{M},$$

píšeme-li za $m + \mu$ krátce M. Hmota M se tedy s touto počátečnou rychlostí pohybuje za působení urychlující síly Mg a retardující síly $k \cdot x$, kde x značí depressi péra. Podobně jako v úloze 3. platí, že ztráta na živé síle a na energii potenciálné jest rovna práci síly $k \cdot x$. Jsou-li tedy v_1 a v_2 rychlosti ve dvou místech velmi málo od sebe vzdálených o Δ, a je-li zase x úsečka středu délky Δ, platí

$$\frac{M}{2}(v_1^2 - v_2^2) + Mg \cdot \Delta = kx \cdot \Delta$$

čili

$$\frac{\frac{M}{2}(v_1^2 - v_2^2)}{\Delta} = kx - Mg.$$

Podobně jako v předchozí úloze, jest ztráta živé síly na jednotce délky znázorněna přímkou, nyní tvaru $y = kx - Mg$. Ve stavu rovnoběžném před nárazem bylo péro stlačeno o délku x_0 vlivem téže hmoty μ, t. j. $\mu g = kx_0$ a $x_0 = \frac{\mu g}{k}$.

Celá ztráta živé síly podél dráhy od x_0 do x jest dána plochou lichoběžníka o základnách y_0 a y a o výšce $x - x_0$, tedy výrazem

$$\frac{kx_0 - Mx + kx - Mg}{2}(x - x_0).$$

Těleso se zastaví, až se tato ztráta kinetické energie vyrovná celé původně dodané kin. energii $\frac{M}{2}c^2$, tedy v bodě x_1, pro nějž platí

$$\frac{k}{2}x_1^2 - Mgx_1 - \left(\frac{k}{2}\cdot x_0^2 - Mgx_0\right) = \frac{M}{2}c^2,$$

čili dosadíme-li za

$$x_0 = \frac{\mu g}{k} \quad \text{a} \quad M - \mu = m$$

po krátké transformaci

$$x_1 = \frac{Mg}{k}\left(1 \pm \sqrt{\frac{m^2}{M^2} + \frac{kc^2}{Mg^2}}\right).$$

x_1 má dvojí hodnotu: Prvá (u odmocniny $+$) značí depressi péra, při níž se deska s hmotou zastaví; na to se ovšem péro vzpruží, přežene desku přes polohu rovnovážnou zpět až k novému zastavení (obratu), při x_1 vyznačeném záporným znamením před odmocninou. Tento pohyb kmitavý se opakuje. Rovnovážná poloha péra zatíženého hmotou $m + \mu = M$ odpovídá

$$x'_0 = \frac{Mg}{k},$$

leží tedy uprostřed mezi oběma body obratu.

Úloha 5.

Hmotný bod m se pohybuje ve směru osy x-ové s počáteční rychlostí c, jsa ve svém pohybu retardován silou, jejíž urychlení je v každém okamžiku úměrno jeho rychlosti a koefficientu k. Kde a kdy se bod m zastaví? *Týž.*

I. Řešení dle úvahy, již podal *V. Vysoudil*, stud. VII. tř. r. v Litovli.

Počáteční rychlost bodu m jest c. Ježto retardující síla působí urychlením (ovšem záporným) kc, jest změna rychlosti na konci nesmírně krátké doby Δt, během které rychlost téměř za stálou můžeme považovati, dána součinem $kc \cdot \Delta t$ čili, rychlost zbývající jest $c - ck\Delta t = c\,(1 - k\Delta t)$. Počtem lze k tomu přijíti také takto: Retardace jest změna rychlosti dělená časem, během něhož nastala; dle úlohy jest dána součinem z k a průměrné rychlosti. Je-li tedy na konci nesmírně krátké doby Δt

rychlost c_1, jest

$$\frac{c - c_1}{\Delta t} = k \cdot \frac{c_1 + c_2}{2}$$

čili

$$c_1 = c \cdot \frac{2 - k\Delta t}{2 + k\Delta t} = c \cdot \frac{4 - k^2 (\Delta t)^2}{4 + 4k\Delta t + k^2 (\Delta t)^2}.$$

Zanedbáme-li vyšší mocniny velmi malé veličiny Δt než prvou, zůstane

$$c_1 = c \frac{1}{1 + k\Delta t} = c\,(1 - k\Delta t).$$

Podobně po druhé stejné době je rychlost

$$c_2 = c_1 (1 - k\Delta t) = c\,(1 - k\Delta t)^2,$$

a stejně dále. Rychlosti bodu ubývá tedy ve stejných intervallech časových dle řady geometrické. Má-li konečné

$$c_n = c\,(1 - k\Delta t)^n = 0,$$

musí počet intervallů býti nekonečně veliký. Celková dráha tělesa bude dána součtem drah v jednotlivých okamžicích, t. j. bude rovna

$$c\Delta t + c_1 \cdot \Delta t + c_2 \Delta t + \ldots . = c\Delta t\,(1 + (1 - k\Delta t) + (1 - k\Delta t)^2 + (1 - k\Delta t)^3 + \ldots).$$

Můžeme vždy Δt voliti tak, že $k\Delta t < 1$; má tedy tato nekonečná řada součet konečný a dráha jest dána výrazem

$$c \cdot \Delta t \cdot \frac{1}{1 - 1 + k\Delta t} = \frac{c}{k}.$$

Z následujícího vysvitne, že jest k proběhnutí této dráhy potřebí času nekonečného, čili že $n \cdot \Delta t = \infty$. Ježto konečná rychlost jest 0, platí

$$c_n = c\,(1 - k\Delta t)^n = 0$$

čili

$$n \cdot \log\,(1 - k\Delta t) = - \infty.$$

Dosadíme-li za logarithmus řadu, plyne

$$- n \left(\frac{k \cdot \Delta t}{1} + \frac{(k \cdot \Delta t)^2}{2} + \frac{(k \cdot \Delta t)^3}{3} + \ldots \right) = - \infty,$$

nebo zanedbáme-li vyšší mocniny Δt, zůstane

$$k \cdot n \cdot \Delta t = \infty \text{ a tedy také } n \cdot \Delta t = \infty.]$$

II. Řešení autorovo, pomocí ztráty živé síly.

Práce retardující síly na dráze Δ, rovná se ztrátě kinetické energie tělesa, t. j.

$$\frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2) = k \, . \, m \, . \, \frac{v_1 + v_2}{2} \, . \, \Delta.$$

Z toho plyne

$$\frac{v_1 - v_2}{\Delta} = k.$$

Ztráta na rychlosti během dráhové jednotky jest po celou dráhu konstantní, rovna k. V poloze x ztratil tedy bod na rychlosti celkem $k \, . \, x$ a zůstává mu rychlost $c - kx$; zastaví se, bude mít rychlost nullovou v poloze x_1, když $c - kx_1 = 0$, t. j.

$$x_1 = \frac{c}{k}.$$

Cíl je tolikráte dále, kolikrát větší je počáteční rychlost, a kolikrát menší koeff. retardace k. V místě x má bod rychlost $v = c - kx$, která postupně klesá; k dosažení cíle potřebuje tedy bod doby τ, jistě větší než

$$\frac{x_1 - x}{v}, \text{ t. j. } \tau > \frac{\frac{c}{k} - x}{c - kx} \text{ neboli } \tau > \frac{1}{k}.$$

Ať jest tedy bod sebe blíže k cíli x, přece ještě k jeho dosažení potřebuje *konečné* doby $\tau > \frac{1}{k}$, to znamená, bod dorazí k cíli teprve po uplynutí doby nekonečné.

III. Řešení vyšší analysí, jež podal p. *V. Vysoudil*, stud. VII. tř. r. Litovli.

Je-li rychlost okamžitá v, je urychlení

$$\frac{dv}{dt} = -k \, . \, v,$$

čili integrací $e = A \, . \, e^{-kt}$. Pro $t = 0$ je $v = c = A$. Dosazením

$$v = \frac{dx}{dt} \text{ plyne tedy } \frac{dx}{dt} = c \, . \, e^{-kt}$$

a integrací

$$x = B - \frac{c}{k} e^{-kt}.$$

Pro $t = 0$ je $x = 0$, tedy $B = \frac{c}{k}$ a tudíž

$$x = \frac{c}{k}(1 - e^{-kt}).$$

Bod se zastaví, v se stane nullou, když $t = \infty$; pak

$$x = x_1 = \frac{c}{k}.$$

Úloha 6.

V rovině, kolmé na pevnou, dokonale pružnou rovinnou stěnu R, otáčí se kolem pevného koncového bodu A, od R o délku k vzdáleného, pevná, nehmotná tyč délky l, jejíž volný konec má vlastnosti koule dokonale pružné o hmotě m — rovnoměrně, s angulárnou rychlostí ω. Jaké napětí doznává tyč před, při a po nárazu na stěnu R? *Týž.*

Řešení dle p. *V. Vysoudila*, stud. VII. tř. r. v Litovli a *autora*.

Před nárazem na stěnu R je tyč napínána silou „odstředivou" $m\omega^2 l$.

V dalším musíme rozeznávati tyč nepružnou a pružnou.

1. Tyč *nepružná*. Rychlost tangenciálnou $v = l\omega$ v okamžiku nárazu rozložme ve složku $v_2 \perp R$ a $v_1 \parallel R$. Poněvadž jde o náraz dokonale pružné koule m na stěnu dokonale pružnou, obrátí se směr rychlosti v_2, takže vzniká výsledná rychlost $v' = v$, položená symmetricky s v vzhledem ku kolmici na R. Rozložíme v' dále na dvě složky $v_3 \parallel \overline{mA}$ a $v_4 \perp \overline{mA}$. Složka v_3 působí tlak v tyči. Označme si

$$\frac{k}{l} = \sin\alpha,$$

pak $\sphericalangle\, \overline{v_3 v'} = 90 - 2\alpha$ a

$$v_3 = v' \sin 2\alpha = 2v \sin\alpha \cos\alpha = 2v \cdot \frac{k}{l^2}\sqrt{l^2 - k^2}.$$

Podléhá tedy tyč ve směru $\overline{mA}$ tlaku

$$\frac{2m\omega}{\tau} \cdot \frac{k}{l}\sqrt{l^2 - k^2},$$

je-li τ doba trvání rázu.

Druhou složkou v_4 pohybuje se po rázu tyč zpět. Tato komponenta rovná se

$$v_4 = v' \cos 2\alpha = v \,.\, (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \omega \,.\, \frac{l^2 - 2k^2}{l}.$$

Tyč otáčí se pak kolem bodu A zpět úhlovou rychlostí

$$\omega_1 = \omega \,.\, \frac{l^2 - 2k^2}{l^2}$$

a je tudíž napínána „odstředivou" silou

$$m\omega_1^2 l = m\omega^2 \frac{(l^2 - 2k^2)^2}{l^3}.$$

Ježto $v_4 < v$ a ovšem i $\omega_1 < \omega$, je kinetická energie po rázu menší než před ním — zmařená energie je rovna oteplení v tyči během rázu.

2. Tyč *pružná*. Jde-li o hmoty vesměs dokonale pružné, nesmí se zmařiti žádná kinetická energie, t. j. koule musí od stěny odskočiti s touž rychlostí v, se kterou na ni dopadla. Rozložme v na dvě složky $a \perp R$ a $b \parallel mA$. Nárazem se obrátí jak rychlost a v $-a$, tak i b v $-b$. Impulsivní napětí jest

$$\frac{2mb}{\tau} = \frac{2mv \,.\, tg\alpha}{\tau}.$$

Po nárazu jest opět trvalým napětím tyče $m\omega^2 l$.

Úloha 7.

Na vahách W_1 je vyvážena nádoba s vodou závažím K (na vzduchu), na vahách W_2 evakuovaná dutá koule závažím k (na vzduchu); jak se změní rovnováha na vahách W_1, vnoříme-li kouli pod vodu v nádobě a přidáme-li závaží k ke K?

Tvž.

Řešení.

Když ponoříme kouli pod vodu, působí na ni vztlak rovný objemu x spec. váha vody; tento vztlak nutno vyvážiti novým závažím vedle K. Přidané závaží k vyvažuje pouze vlastní váhu koule; aby byla rovnováha, bylo by tedy nutno přidati ještě závaží rovné vztlaku — k. Na to, že závaží k jest menší o vztlak koule ve vzduchu ($V \,.\, \sigma$), není nutno bráti zřetele, ježto po ponoření koule pod vodu její objem o tolikéž stoupne, a tedy vztlak vzduchu zde stejným způsobem intervenuje.

Řešení početní, podané p. *V. Vysoudilem*, stud. VII. tř. r. v Litovli.

Nazveme-li hmotu vody M, její spec. váhu s, spec. váhu vzduchu σ, závaží δ, látky, z níž jest zhotovena koule S a vnitřní a vnější poloměr koule R, resp. r, platí následující podmínky rovnováhy:

$$\frac{M}{s}(s-\sigma)=\frac{K}{\delta}(\delta-\sigma).$$

Dále

$$\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)\,S-\frac{4}{3}\pi R^3\sigma=\frac{k}{\delta}(\delta-\sigma).$$

Ponoříme-li kouli pod vodu, bude na té straně váha

$$\left(\frac{M}{s}+\frac{4}{3}\pi R^3\right)(s-\sigma)=\frac{M}{s}(s-\sigma)+\frac{4}{3}\pi R^3 s-\frac{4}{3}\pi R^3\sigma,$$

na druhé pak

$$\frac{K+k}{\delta}(\delta-\sigma)=\frac{M}{s}(s-\sigma)+\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)\,S-\frac{4}{3}\pi R^3\sigma.$$

Vidíme tudíž na straně vody převahu o

$$\frac{4}{3}\pi R^3 s-\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)\,S.$$

Dle zvláštních hodnot R, r a S nutno pak buď přidati neb ubrati závaží, je-li výraz tento positivní, resp. negativní.

Správná *) řešení úloh v tomto ročníku zaslali pp.:

a) Z mathematiky:

Adamovič J., VII. g. Domažlice, 14., 15.
Alb J., VII. r. Olomouc, 19., 21.—23.
Bárták B., VI. r. Karlín, 1.—4., 6., 7., 9., 11., 13.—15., 17., 18.
Berný J., VI. r., Jičín, 1.—4., 6.—8., 11., 13.—17., 19., 21.—24., 28.—30.

*) Aspoň v podstatě.

Boubal V., VII. r. Písek, 1.—4., 6.—32.
Cibulka A., VII. r. Pardubice, 3., 14.—17.
Červenka O., VIII. g. Místek, 11., 13., 14.
Hanák J., VII. g. Prostějov, 1.—4., 6.—17., 19., 22.—28., 30.
Hanzelín J., VIII. g. Slaný, 1.—4., 6., 7., 13.—15., 17.
Chochola K., VII. r. Žižkov, 1.—4., 6., 22., 30.
Ingriš V., VII. r. Rakovník, 3., 6., 11., 14., 15., 17., 19., 21.
Janků J., VII. kn. arcib. sem. Kroměříž, 1.—4., 6.—8., 11.—15., 17., 18.
Jaroň A., VII. r. Olomouc, 1., 3., 9. 11., 13.—15., 17.
Jaroš V., VI. r. Písek, 3., 4., 6., 15., 17., 19. 21.—23.
Jarůšek J., VIII. g. Benešov, 1.—4., 6., 7., 9.—24., 26., 28.—32.
Jiřička V., VIII. g. Jičín, 4., 7., 8., 13.—15., 17.
Joukl K., VII. r. Nové Město na Mor., 3., 4., 6.—8., 11., 14.—16., 19., 21.—23., 28.—30.
Kašpar Fr., VI. r. Kutná Hora, 3., 4., 6., 11., 13.—15., 17., 19., 21.
Kašpárek E., V. r. Nové Město n. M., 1.—4., 6.—15., 17., 19., 21.—24., 26., 29., 31.
Klouda R., VII. r. Hradec Králové, 19., 21., 23., 26., 28.
Kňourek J., VI. r. Jičín, 1.—4., 6.—8., 11.—17., 19.—24., 28.—30.
Kočí J., VII. r. Olomouc, 19., 21., 22., 23.
Kohn K., VI. r. Kr. Vinohrady, 1.—4., 6., 7., 11., 13.—17., 19.—24.
Kollmann A., VI. r. Kr. Vinohrady, 1.—4., 6., 7., 11.—15., 17., 19.—24., 26
Kornhäuser F., VI. r. Karlín, 1.—4., 6., 7., 11., 13.—15., 17.—19., 21.—23.
Kořínek B., VII. r. Olomouc, 1.—32.
Kostlivý J., VII. g. Domažlice, 2., 3., 6., 7., 11., 15., 17., 19., 21.—23.
Koudelka F., VIII. g. Jičín, 1., 2., 4., 8., 13.—15., 17., 23.
Krejzlík J., VII. g. v Unčově, 1.—4., 6.—8., 11.—14.
Krch V., VI. r. Hradec Králové, 1.—4., 6.—8., 11., 13.—15., 17., 18.
Kšír J., VII. r. Olomouc, 1.—3., 9.—15., 17.

Kučera J., VI. r. Č. Budějovice, 1.—4., 6.—8., 11., 13.—15., 17., 19.—25., 29.
Kutnohorský F., abs. reálky Nová Říše, 1.—30.
Laufberger V., VII. g. Chrudim, 19., 21.—24., 26.
Mastný Th., V. g. Praha—II. Žitná ul., 1., 13., 14., 15., 19., 22., 23.
Materna V., VI. r. Kr. Vinohrady, 1., 2., 3., 4., 6.
Miškovský L., V. r. Nymburk, 1., 7., 13., 14., 15., 19.
Neumann B., VII. g. Slaný, 3., 4., 6., 11., 13.—17., 19., 21., 23.
Neumann K., VI. r. Praha—II., 4., 14., 15., 17.
Pasovský J., VII. r. Praha—II., 1., 3., 4., 11., 14., 15., 17.
Pavlík S., VII. r. g. Praha, Křem. ul., 15., 17.
Pelikán A., V. r. Telč, 1.—9., 11.—16, 19., 20., 22., 24.—26., 28., 29., 31., 32.
Pelikán E., VII. r. Praha—II., 1.—4., 6.—8., 11., 13., 14., 15, 17., 19., 21.—23., 29.
Pick J., VII. r. Král. Vinohrady, 1.—4, 6.—30.
Podhajský J., VII. g. Benešov, 3., 4., 8, 14., 15., 17.
Pražák J., VIII. g. Č. Budějovice, 2., 3., 11.—15., 17.
Rýpar J., VII. g. Olomouc, 1., 3., 11, 13.—15., 17.
Seliger V., VIII. g. Praha—II., Žitná ul., 1., 3, 14.—17., 21., 29.
Staffa K., VII. r. Olomouc, 1.—32.
Steinocher V., V. g. Č. Budějovice, 1., 6., 7., 11., 14., 15., 17., 19., 23.
Suchý Jos., VII. r. Plzeň, 2, 3., 4., 11., 13.—15., 17., 19., 22., 23., 30.
Svoboda E., VI. r. Velké Meziříčí, 3, 4., 6, 7., 14., 15, 17., 19., 21.—23.
Svoboda F., VII. r. Jevíčko, 1., 3.—17., 20.—24., 27., 31.
Široký Jan, II. paed. Polská Ostrava, 1.—3., 7., 11., 13., 17.
Šofr B., VIII. g. Rychnov, 11., 13.—15., 17.
Šourek J., VII. r. Praha—II., 1., 14., 15., 17.
Špičák F., abit. Plumlov u Prostějova, 1.—4., 5., 6.—15., 17.—30.
Teige K., VI. g. Praha, Žitná ul., 1.—32.
Trnka J., VI. r. Žižkov, 14., 17, 21.
Vaněk J., VII. g. Domažlice, 2., 3., 6., 7., 11., 13., 14., 15., 17.

Vanýsek R., VII. g. Přerov, 1., 6., 11., 13.—15., 17.
Vicenec G., VIII. g. Olomouc 1., 3., 4., 6., 9., 11., 13.—17., 19., 21.—23., 30., 31., 32.
Viktora V., VIII. g. Příbram, 1.—4., 6.—8, 11.—17.
Vosyka R., VI. r. Nymburk, 14., 15., 22.
Vysloužil A., VII. g. Místek, 11., 14., 15., 17.
Vysoudil V., VII. r. Litovel, 1.—32.
Wagner Okt., V. g. Rokycany, 3., 4., 11., 13.—17., 19., 21., 25.
Wangler Al., VII. g. Čáslav, 1.—4., 6., 7, 11., 13.—15., 17.—19., 21.—24., 26., 28., 30.
Zahradníček L., VI. r. Holešov, 1., 6., 7., 14., 15., 17.
Zeman J., VII. r. Plzeň, 1.—4., 6., 9., 11., 13.—15., 17., 19., 22., 23., 30.
Zlatník J., VI. g. Hradec Králové, 13.—15.
Zvěřina K., VII. g. Boskovice, 1.—4., 6.—8., 12.
Žabský B., VIII. g. Praha - II., Žitná ul, 1.—4., 6.—8., 12.—15., 17., 19., 22.—26., 30.—32.

b) Z deskriptivní geometrie:

Alb J., VII. r. Olomouc, 5., 6.
Barták B., VI. r. Karlín, 1., 3., 4.
Boubal V., VII. r. Písek, 1.—6.
Hraba R., VII. r. Karlín 1.—6.
Chochola K., VII. r. Žižkov, 5.
Ingriš V, VII. r. Rakovník, 6.
Jaroň A., VII. r. Olomouc, 2.—4.
Joukl K., VII. r. Nové Město na Mor., 2.—6.
Kašpar Fr., VI. r. Kutná Hora, 3., 4., 6.
Klouda R., VII. r. Hradec Králové, 5., 6.
Kňourek J., VI. r. Jičín, 1.—6.
Kočí J., VII. r. Olomouc, 5.
Krch V., VI. r. Hradec Králové 1.—4.
Kollmann A., VI. r. Kr. Vinohrady, 1.—6.
Kořínek B., VII. r. Olomouc, 1.—6.
Krejzlík J., VII. g. v Uničově, 2.
Kšír J., VII. r. Olomouc, 1.—4.

Kučera J., VI. r. Č. Budějovice, 2., 3.
Kučera Kl., VII. r. Praha—II., 2.—6.
Kutnohorský F., abs. reálky Nová Říše, 1.—6.
Lošťák F., VI. r. Prostějov, 1.—6.
Materna V., VI. r. Kr. Vinohrady, 1.—3.
Pejše V., VII. r. Kostelec n. O., 1.—6.
Pelikán E., VII. r. Praha—II., 2.—5.
Pilmann F., VII. r. Č. Budějovice, 1.—4.
Staffa K., VII. r. Olomouc, 1.—6.
Suchý Jos., VII. r. Plzeň, 1.—6.
Svoboda F., VII. r. Jevíčko, 1.—6.
Šourek J., VII. r. Praha -II., 3.
Špičák F., abit., Plumlov u Prostějova, 1.—6
Vysoudil V., VII. r. Litovel, 1.—6.
Zahradníček L., VI. r. Holešov, 3., 4.
Zeman J., VII. r. Plzeň, 1.—6.

c) Z fysiky*):

Adamovič Jan, VII. g. Domažlice, řeš. úl. 1.
Barták B., VI. r. Karlín, 1., 2.*
Cibulka V., VII. r. Pardubice, 1.
Kašpar Fr., VI. r. Kutná Hora, 1., 2., 3.*
Kostlivý J., VII. g. Domažlice, 1.*, 2., 6.*
Krejzlík Jar., VII. g. Unčov, 1., 2.*
Pejše Václ., VII. r. Kostelec n. O., 2., 3, 6.*, 7.
Pelikán E., VII. r. Praha—II., 1.
Pick J., VII. r. Kr. Vinohrady, 2., 3., 4.*, 6.*, 7.
Suchý J., VII. r. Plzeň, 1.*, 7.*
Špičák Fr., abiturient, Plumlov u Prostějova, 1.*
Vysoudil Vojt., VII. r. Litovel, 1., 2., 3., 4.*, 5., 6., 7.

*) Částečně správná řešení jsou označená hvězdičkou.

Udělení cen.

Ceny za správná řešení úloh přisouzeny takto:

a) Z mathematiky:

Ceny první:

pp. *Boubal V.* ze VII. r. v Písku.
Hanák J. ze VII. g. v Prostějově
Jarůšek J. z VIII. g. v Benešově.
Kašpárek z V. r. v Novém Městě na Mor.
Kořínek B. ze VII. r. v Olomouci.
Kňourek J. ze VI. r. v Jičíně.
Kutnohorský F., abs. reálky v Nové Říši.
Pelikán A. z V. r. v Telči.
Pick J. ze VII. r. na Král. Vinohradech.
Staffa K. ze VII. r. v Olomouci.
Svoboda F. ze VII. r. v Jevíčku.
Špičák F., abit. r. v Plumlově.
Teige K. ze VI. g. v Praze v Žitné ul.
Vysoudil V. ze VII. r. v Litovli.

Ceny druhé:

pp. *Berný J.* ze VI. r. v Jičíně.
Joukl K. ze VII. r. v Novém Městě na Mor.
Kohn K. ze VI. r. na Král. Vinohradech.
Kollmann A. ze VI. r. na Král. Vinohradech.
Kornhäuser F. ze VI. r. v Karlíně.
Kučera J. ze VI. r. v Č. Budějovicích.
Pelikán E. ze VII. r. v Praze—II.
Suchý Jos. ze VII. r. v Plzni.
Vicenec J. z VIII. g v Olomouci.

pp. *Wangner Al.* ze VII. g. v Čáslavi.
Zeman J. ze VII. r. v Plzni.
Žabský B. z VIII. g. v Praze, Žitná ul.

Ceny třetí:

pp. *Hanzelín J.* z VIII. v Slaném.
Janku J. ze VII. kn. arcib. sem. v Kroměříži.
Jaroň A. ze VII. r. v Olomouci.
Kašpar F. ze VI. r. v Kutné Hoře.
Kostlivý J. ze VII. g. v Domažlicích.
Koudelka F. z VIII. g. v Jičíně.
Krejzlík J. ze VII. g. v Unčově.
Krch V. ze VI. r. v Hradci Králové.
Kšír J. ze VII. r. v Olomouci.
Neumann B. ze VII. g. ve Slaném.
Steinocher V. z V. g. v Č. Budějovicích.
Široký Jan z II. r. paed. v Polské Ostravě.
Viktora V. z VIII. g. v Příbrami.
Wagner Okt. z V. g. v Rokycanech.

b) Z deskriptivní geometrie:

Sobotkovu deskriptivní geometrii dostane

p. *F. Kutnohorský,* abs. reálky v Nové Říši na Moravě;

Jarolímkovu trojdílnou deskriptivní geometrii:

pp. *Boubal* ze VII. r. v Písku.
Hraba R. ze VII. r. v Karlíně.
Joukl K. ze VII. r. v Novém Městě na Moravě.
Kňourek J. ze VI. r. v Jičíně.
Kollmann A. ze VI. r. na Kr. Vinohradech.
Kořínek B. ze VII. r. v Olomouci.
Kučera Kl. ze VII. r. v Praze—II.

pp. *Lošťák F.* ze VI. r. v Prostějově.
Pejše V. ze VII. r. v Kostelci nad Orlicí.
Staffa K. ze VII. r. v Olomouci.
Suchý Josef ze VII. r. v Plzni.
Svoboda F. ze VII. r. v Jevíčku.
Špičák F., abit. v Plumlově.
Vysoudil V. ze VII. r. v Litovli.
Zeman J. ze VII r. v Plzni.

c) Z fysiky:

Cenu první obdržel:

p. *Vysoudil Vojtěch* ze VII. tř. r. v Litovli.

Cenu druhou obdrželi:

pp. *Vysoudil Vojtěch* ze VII. tř. r. v Litovli,
Pick J. ze VII. tř. r. na Král. Vinohradech,
Pejše Václ. ze VII. tř. r. v Kostelci n. Orl.