Karel Petr

O separaci kořenů rovnic algebraických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 5, 554--569

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123819

invariantními útvary geometrickými, po případě ještě differenciálními invarianty, aby vyšetřil, existují-li mezi subgrupami těmi některé ekvivalentní, z nichž by bylo pouze jednu podržeti. Z křivek mohou býti invariantní pouze přímka a prost. křivka kubická; rovinná křivka musila by míti invariantní souhrn svých tečen, jenž však nemůže patřiti komplexu. Neexistuje konečně žádná subgrupa s invariantní křivou plochou bez invariantních křivek a bodů a žádná subgrupa bez invariantního útvaru bodového.

V Brně, v listopadu 1908.

O separaci kořenů rovnic algebraických.

(Poznámka prvá.)

Napsal K. Petr.

Z věty Descartesovy, že rovnice algebraická

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0 \qquad (1)$$

o reálných koefficientech $A_0, A_1, \ldots A_n$ má nejvýše tolik kořenů kladných, kolik je v řadě čísel $A_0, A_1, \ldots A_n$ změn znaménkových, následuje jednoduchým způsobem další věta důležitá pro separaci kořenů rovnic algebraických.

Dosadíme-li do levé strany rovnice dané

$$x = \frac{a + by}{1 + y},$$

dostaneme rovnici

$$(1 + y)^n f\left(\frac{a + by}{1 + y}\right) = B_0 y^n + B_1 y^{n-1} + \ldots + B_n = 0, \quad (2)$$

jejímž kořenům kladným odpovídají kořeny rovnice (1) položené mezi a a b a naopak

Užijeme-li tudíž věty Descartesovy na rovnici (2), máme ihned tento důsledek pro rovnici (1): Rovnice (1) má nejvýše tolik kořenů mezi a a b, kolik jest v řadě čísel $B_0, B_1, \ldots B_n$ změn znaménkových.

Mluvě o tomto důsledku praví *F. Klein**): „Das ist so einfach, dass es Wunder nehmen müsste, wenn dieser Ansatz nicht schon in früherer Zeit bemerkt sein sollte. Und in der That findet sich derselbe beispielsweise bei *Jacobi* in Crelle's Journal Bd. 13. 1835 (Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes) Nur fügt Jacobi merkwürdigerweise hinzu: regula a clarissimo Fourier proposita multis nominibus praestat."

Tato zcela střízlivá poznámka Kleinova zavdala patrně podnět k tomu, že se pro důsledek svrchu uvedený Descartesovy věty ujalo jméno „Jacobiovo kriterium" **). Toto pojmenování jest však zcela neoprávněné. Neboť již před Jacobim bylo vylíčené užití Descartesova theoremu známo, ba dokonce i prakticky pro separaci kořenů užíváno. Byl to *F. D. Budan,* který tuto methodu použil v pojednání uveřejněném v roce 1807***). Budu tudíž v následujícím místo pojmenování „Jacobiovo kriterium" užívati prostě „rozšířená věta Descartesova".

K témuž účelu jako rozšířená věta Descartesova slouží t. zv. věta Budan-Fourierova, která praví, že mezi a a b $(a < b)$ jest nejvýše tolik kořenů kladných, rovnice (1), o kolik jest v řadě čísel

$$f(b), f'(b), \ldots f^{(n)}(b)$$

změn znaménkových méně než v řadě

$$f(a), f'(a), \ldots f^{(n)}(a).$$

---

*) *F. Klein,* Geometrisches über Wurzelrealität (Katalog mathem. und math.-physik. Modelle, Apparate und Instrumente, München, 1892, str. 3 a násl.).

**) Viz ku př. »Weber, Lehrbuch der Algebra,« 1. vyd., str. 311.

***) F. D. Budan, Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques d'un degré quelconque; d'après laquelle tout le calcul exigé pour cette résolution se réduit à l'emploi des deux premières règles de l'Arithmétique. Paris, 1807. V kapitole první jest podán historický přehled method pro separaci kořenů rovnic algebraických. Zajímavo jest tam místo vztahující se ku svrchu zmíněnému důsledku věty Descartesovy: »Si dans cette esquisse des travaux de deux siècles concernant la résolution des équations numériques, l'immortel Descartes semble avoir été oublié, c'est que nous nous sommes réservé d'en parler ailleurs. Comment aurions-nous pu oublier sa fameuse règle des variations et des permanences de signes, publiée pour la première fois en 1637, et qui, longtemps négligée, reçoit dans notre méthode une application nouvelle, et, en quelque sorte, une nouvelle existence.«

Udávají tudíž i rozšířená věta Descartesova i věta Budan-Fourierova horní hranici pro počet kořenů dané rovnice mezi čísly a a b. Tato horní hranice shoduje se v obou větách přesně s počtem kořenů mezi a a b, když jsou všecky kořeny dané rovnice reálné; tu dávají rozšířená věta Descartesova a věta Budan-Fourierova totéž číslo. V tom případě však, má-li daná rovnice též komplexní kořeny, mohou udávati obě věty různá čísla pro horní hranice; cennější výsledky poskytuje ovšem ta věta, která pro horní hranici udává číslo menší. Poměr obou method – avšak toliko pro stupeň 2 a 3 rovnice alg. — objasnil geometricky Klein l. c. a ukázal, že od pravidla Descartesova lze s velikou pravděpodobností očekávati výsledky (pro hranici počtu kořenů položených mezi a a b) bližší skutečnému počtu kořenů mezi a a b.

Obecně vyplývá toto tvrzení z věty, kterou *C. Stéphanos* bez důkazu uveřejnil *). Důkaz této věty uveřejnil *A. Zoukis* **). V následujícím podávám rovněž důkaz věty Stephanosovy a ukazuji, že užitím známých vztahů pro poláry binárních forem lze dospěti k důkazu neobyčejně jednoduchému ***).

II.

K důkazu věty Stephanosovy použiji této pomocné věty †): *Utvoříme-li z řady $n+1$ čísel reálných*

$$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots a_n, \tag{α}$$

řadu $n+2$ čísel

$$\lambda_0 a_0,\ \lambda_1 a_1 + \mu_0 a_0,\ \lambda_2 a_2 + \mu_1 a_1, \ldots \lambda_n a_n + \mu_{n-1} a_{n-1},\ \mu_n a_n, \tag{β}$$

kde $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n, \mu_0 \ldots \mu_n$ jsou čísla reálná kladná, jest v řadě (β) buď týž počet změn znaménkových jako v řadě (α),

---

*) Intermédiaire des Mathématiciens, t. VIII. (1900), str. 117.

**) Bulletin de la société mathématique de France, t. XXX., str. 181 v pojednání »Sur quelques formules des fonctions homogènes et sur la démonstration d'un théorème qui s'y rattache«.

***) Tyto historické poznámky, jakož i dole provedený důkaz věty C. Stephanosa naznačil jsem v jedné přednášce na středoškolských kursech velikonočních, konaných o velikonocích r. 1909.

†) Podobné věty pomocné používá i Zoukis, l. c.

anebo jest počet změn znaménkových v řadě (β) *o sudý počet menší nežli počet změn znaménkových v řadě* (α).

Důkaz pomocné věty vyplývá snadno obecnou indukcí. Že věta jest platna, když $n = 1$, jest téměř bezprostředně jasno. Předpokládejme, že jest platna pro řady o počtu členů menším nežli $n + 1$ (resp. $n + 2$) a dokažme, že pak platí pro řady (α) (resp. (β)). Současně můžeme předpokládati, že žádný člen řady (α) není rovný nulle. Neboť kdyby ku př. bylo $a_k = 0$, rozpadla by se řada (α) na dvě

$$a_0, a_1, \ldots a_{k-1} \quad \text{a} \quad a_{k+1}, a_{k+2} \ldots a_n;$$

a rovněž řada (β) na dvě

$$\lambda_0 a_0, \lambda_1 a_1 + \mu_0 a_0, \ldots \mu_{k-1} a_{k-1} \text{ a } \lambda_{k+1} a_{k+1}, \ldots \mu_n a_n,$$

a poněvadž pro jednotlivé řady rozpadnutím vzniklé věta naše dle supposice platí, platí i v tomto případě ($a_k = 0$) i pro řadu (α) (resp. (β)), jak snadno patrno.

Budiž tedy zejména a_{n-1} a a_n od nully různo. Dle předpokladu (že věta pomocná platí pro řady o menším počtu členů nežli jsou (α), (β)) jest v řadě

$$a_0, a_1, \ldots a_{n-1} \qquad (\alpha')$$

buďto týž počet změn znaménkových anebo o sudý počet větší jako v řadě

$$\lambda_0 a_0, \lambda_1 a_1 + \mu_0 a_0, \ldots \lambda_{n-1} a_{n-1} + \mu_{n-2} a_{n-2}, \mu_{n-1} a_{n-1}. \qquad (\beta')$$

Má-li však a_{n-1} a a_n stejné znaménko jest v řadě (α) a (α') týž počet změn znaménkových a rovněž tak v řadě (β) a (β'). Mají-li a_{n-1} a a_n různá znaménka, jest v řadě (α) o jednu změnu znaménkovou více nežli v (α'); v řadě (β') jest počet změn znaménkových o lichý počet různý od počtu v řadě (β) a může tento rozdíl obnášeti toliko ± 1; neboť řadu (β) dostáváme z (β') přidáním jednoho členu a pozměněním posledního členu v (β'), nemůže tudíž rozdíl zmíněný dosahovati ku př. ± 3.

Jest tedy v řadě (β) počet změn znaménkových buďto o sudý počet menší nebo rovný počtu změn znaménkových v řadě (α).

Zcela stejně bychom dokázali větu následující:

Utvoříme-li z řady $n + 1$ *čísel reálných*

$$a_0, a_1, \ldots a_n,$$

řadu $n+2$ čísel

$$-\lambda_0 a_0,\quad -\lambda_1 a_1+\mu_0 a_0,\quad -\lambda_2 a_2+\mu_1 a_1,\ldots \\ -\lambda_n a_n+\mu_{n-1} a_{n-1},\quad \mu_n a_n, \tag{γ}$$

kde $\lambda_0 \ldots \lambda_n, \mu_0, \ldots \mu_n$ *jsou čísla reálná kladná, jest počet změn znaménkových v řadě* (γ) *větší o lichý počet než počet změn znaménkových v řadě* (α).

Tuto druhou větu sice v následujícím nepotřebujeme; že ji zde uvádím, má příčinu v tom, že z ní bezprostředně vyplývá známým způsobem věta Descartesova.

III.

Účelno jest dále pro následující zavésti označení homogenní. Budeme tudíž levou stranu rovnice (1) psáti ve tvaru

$$f(x_1, x_2) = A_0 x_1^n + A_1 x_1^{n-1} x_2 + A_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + A_n x_2^n;$$

jest tedy

$$f(x) = f(x, 1);\quad f(x_1, x_2) = x_2^n f\left(\frac{x_1}{x_2}\right);$$

můžeme pak (2) psáti ve tvaru

$$f(a+by, 1+y),$$

anebo když i vzhledem ku y, a, b zavedeme označení homogenní

$$f(a_1 y_1 + b_1 y_2, a_2 y_1 + b_2 y_2).$$

Koefficienty této formy u $y_1^k y_2^{n-k}$ jsou t. zv. poláry formy $f(x_1, x_2)$; i budeme při označování jich v zásadě dbáti obvyklých tu způsobů, kladouce

$$f(a_1 y_1 + b_1 y_2, a_2 y_1 + b_2 y_2) = f_{a^n} \cdot y_1^n + f_{a^{n-1}b} y_1^{n-1} y_2 \\ + f_{a^{n-2}b^2} y_1^{n-2} y_2^2 + \ldots + f_{b^n} y_2^n. \tag{3}$$

Při tom jest patrně

$$f_{a^n} = f(a_1, a_2),\quad f_{b^n} = f(b_1, b_2);$$

ostatní pak koefficienty vytvoříme z f_{a^n} pomocí opětovného použití operace (polární)

$$D_{ab} = \frac{\partial}{\partial a_1} \cdot b_1 + \frac{\partial}{\partial a_2} \cdot b_2.$$

Provedeme-li totiž na (3) tuto operaci, značíce pro krátkost

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2), \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_2(x_1, x_2),$$

obdržíme po krácení činitelem y_1

$$b_1 f_1(a_1y_1 + b_1y_2, a_2y_1 + b_2y_2) + b_2 f_2(a_1y_1 + b_1y_2, a_2y_1 + b_2y_2)$$
$$= D_{ab}f_{a^n} \, . \, y_1^{n-1} + D_{ab}f_{a^{n-1}b} \, . \, y_1^{n-2}y_2 + \ldots \quad (4)$$

Derivujeme-li však rovnici (3) dle y_2, dostáváme pro levou stranu rovnice (4) tento výraz

$$= f_{a^{n-1}b}\, y_1^{n-1} + 2f_{a^{n-2}b^2}\, y_1^{n-2}y_2 + \ldots, \quad (5)$$

odkud (srovnáním (4) a (5)) ihned vyplývá

$$f_{a^{n-1}b} = D_{ab}f_{a^n}, \quad f_{a^{n-2}b^2} = 2D_{ab}f_{a^{n-1}b}, \ldots \quad (6)$$
$$f_{a^{n-k}b^k} = k\,D_{ab}\,f_{a^{n-k+1}b^{k-1}}, \ldots \quad (7)$$

Podobné vztahy bychom mohli psáti vzhledem k operaci D_{ba}; vyplývá ostatně bezprostředně (zaměníme-li současně a_1, a_2 s b_1, b_2 a y_1 s y_2) z rovnice definující $f_{a^k b^{n-k}}$, že

$$f_{a^k b^{n-k}} = f_{b^{n-k}a^k}.$$

IV.

Věta Stephanosova týká se počtu změn znaménkových v řadě

$$f_{a^n}, f_{a^{n-1}b}, f_{a^{n-2}b^2}, \ldots f_{b^n}. \quad (8)$$

Označme tento počet Z_{ab}. Pak věta ona zní:

Jestliže

$$\frac{a_1}{a_2} < \frac{b_1}{b_2} < \frac{c_1}{c_2}$$

a $f_{b^n} \gtrless 0$, **pak jest platna tato rovnice**

$$Z_{ab} + Z_{bc} + 2k = Z_{ac}, \quad (9)$$

kde celé číslo $k \geqq 0$.

Důkaz provedeme úplnou indukcí, předpokládajíce větu platnou pro formy stupně $(n - 1)$ v proměnných. Na základě tohoto předpokladu dokážeme nejprve, že věta platí pro formy stupně n-tého, u nichž

$$f_{a^{n-1}b} \gtrless 0, \quad f_{c^{n-1}b} \gtrless 0; \quad f_{a^n} \gtrless 0, \quad f_{c^n} \gtrless 0.$$

Poněvadž jest věta Stephanosova platna dle supposice pro každou formu stupně $(n - 1)$, jest také platna pro formu

$$b_1 f_1(x_1, x_2) + b_2 f_2(x_1, x_2). \tag{10}$$

Počty změn znaménkových, o nichž věta Stephanosova mluví, označíme při této formě

$$Z'_{ab},\ Z'_{bc},\ Z'_{ac},$$

i jest tudíž

$$Z'_{ab} + Z'_{bc} + 2k' = Z'_{ac};\ k' \geqq 0. \tag{11}$$

Řada udávající počtem změn znaménkových Z'_{ab} redukuje dle (4) a (5) (numerické kladné koefficienty 2, 3, ... vynecháváme)

$$f_{a^{n-1}b},\ f_{a^{n-2}b^2}, \ldots\ldots\ldots f_{b^n}; \qquad (Z'_{ab})$$

podobně k určení čísla Z'_{bc} máme řadu

$$f_{c^{n-1}b},\ f_{c^{n-2}b^2}, \ldots\ldots\ldots f_{b^n}; \qquad (Z'_{bc})$$

a konečně, abychom dostali řadu stanovící Z'_{ac}, nahradíme b_1, b_2 v (3) čísly c_1, c_2 a provedeme na obou stranách operaci D_{ab}. Obdržíme ihned (po krácení y_1) výraz pro formu

$$b_1 f_1(a_1 y_1 + c_1 y_2, a_2 y_1 + c_2 y_2) + b_2 f_2(a_1 y_1 + c_1 y_2, a_2 y_1 + c_2 y_2)$$
$$= D_{ab} f_{a^n} . y_1^{n-1} + D_{ab} f_{a^{n-1}c} y_1^{n-2} y_2 + D_{ab} f_{a^{n-2}c^2} y_1^{n-3} y_2^3 + \ldots$$
$$+ D_{ab} f_{ac^{n-1}} y_2^{n-1}.$$

I máme tudíž pro řadu určující Z'_{ac}:

$$D_{ab} f_{a^n},\ D_{ab} f_{a^{n-1}c},\ D_{ab} f_{a^{n-2}c^2}, \ldots D_{ab} f_{ac^{n-1}}. \qquad (Z'_{ac})$$

Pro první a poslední člen jest (dle (6) anebo též přímo)

$$D_{ab} f_{a^n} = f_{a^{n-1}b},\quad D_{ab} f_{ac^{n-1}} = f_{bc^{n-1}}. \tag{12}$$

Přidejme ku řadě Z'_{ab} na prvé místo f_{a^n}; tím se tato řada změní v (8), řadu to určující Z_{ab}; podobně přidáním f_{c^n} na prvé místo dostáváme ze (Z'_{bc}) řadu pro Z_{bc}. V řadě (Z'_{ac}) konečně přidejme na prvé místo f_{a^n}, na poslední f_{c^n}, tím obdržíme řadu (o $n + 2$ členech) mající počet změn znaménkových Z''_{ac}. Těmito přídavky zvětšil se počet změn znaménkových v řadách (Z'_{ab}) a (Z'_{bc}) dohromady o tolik, o kolik v řadě (Z'_{ac}), jak vyplývá z (12) a z té okolnosti dosud předpokládané, že $f_{a^{n-1}b} \gtrless 0$, $f_{c^{n-1}b} \gtrless 0$. I máme tudíž z (11)

$$Z_{ab} + Z_{bc} + 2k' = Z''_{ac}. \tag{13}$$

Abychom z této rovnice dospěli ku vztahu (9), postačí zabývati se řadou určující Z''_{ac} (o $n+2$ členech), t. j. řadou

$$f_{a^n},\ D_{ab}f_{a^n},\ D_{ab}f_{a^{n-1}c},\ \ldots\ D_{ab}f_{ac^{n-1}},\ f_{c^n};\ (Z''_{ac})$$

a jejím vztahem ku řadě stanovící Z_{ac} (o $n+1$) členech

$$f_{a^n},\ f_{a^{n-1}c},\ f_{a^{n-2}c^2},\ \ldots f_{c^n};\ (Z_{ac})$$

a k tomu nám bude užitečna právě věta pomocná dokázaná v odst. III.

Vezměme v úvahu ku př. $(k+1)$-vý člen řady (Z''_{ac}), t. j. výraz $D_{ab}f_{a^{n-k+1}c^{k-1}}$; označíme-li k-tý člen řady (Z_{ac}) pro krátkost φ_k (kladouce $\varphi_k = f_{a^{n-k+1}c^{k-1}}$), máme ihned dle definice operace D_{ab}

$$D_{ab}f_{a^{n-k+1}c^{k-1}} = \frac{\partial\varphi_k}{\partial a_1} b_1 + \frac{\partial\varphi_k}{\partial a_2} b_2;$$

dále dle věty Eulerovy pro formy stupně $(n-k+1)$

$$(n-k+1)\,\varphi_k = \frac{\partial\varphi_k}{\partial a_1} a_1 + \frac{\partial\varphi_k}{\partial a_2} a_2;$$

a konečně dle (7)

$$\varphi_{k+1} = k\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial a_1} c_1 + \frac{\partial\varphi_k}{\partial a_2} c_2\right).$$

Eliminujeme-li z těchto tří vztahů $\frac{\partial\varphi_k}{\partial a_1}$, $\frac{\partial\varphi_k}{\partial a_2}$, obdržíme lineární relaci mezi $(k+1)$-vým členem řady (Z''_{ac}) a $(k+1)$-vým a k-tým členem řady (Z_{ac}) ve tvaru

$$D_{ab}f_{a^{n-k+1}c^{k-1}} = (n-k+1)\,\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1c_2-a_2c_1}\,\varphi_k + \frac{1}{k}\,\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1c_2-a_2c_1}\,\varphi_{k+1}.$$

Koefficienty však, kterými na pravé straně jsou násobeny φ_k, φ_{k+1}, jsou vždy kladná čísla (nehledě ku případu ovšem, že $k=n+1$); i možno tu použíti pomocné věty svrchu dokázané, kteráž dává

$$Z''_{ac} + 2k'' = Z_{ac};\quad k'' \geqq 0. \tag{14}$$

Z (13) a (14) máme však bezprostředně

$$Z_{ab} + Z_{bc} + 2k = Z_{ac};\quad k \geqq 0. \tag{9}$$

Tento vztah dokázán ovšem za jistých omezení, jichž však snadno se zbaviti. Nejprve ukážeme to o předpokladu, že $f_{a^{n-1}b}$ i $f_{c^{n-1}b}$ — první to členové řad (Z'_{ab}), (Z'_{bc}) — jsou různy od nully. Buďtež za tím účelem

$$(\beta_1^{(k)}, \beta_2^{k}); \qquad k = 1, 2, \ldots \varrho$$

všecky hodnoty, které za b_1, b_2 do řad (Z'_{ab}), (Z'_{bc}) dosazeny byvše činí některý člen těchto řad rovným nulle. Nechť tyto dvojice čísel jsou spořádány dle velikosti příslušného poměru, t. j. nechť jest

$$\frac{\beta_1^{(k)}}{\beta_2^{(k)}} < \frac{\beta_1^{(k+1)}}{\beta_2^{(k+1)}}, \quad k = 1, 2, \ldots \varrho - 1,$$

a nechť jest dvojice $(\beta_1^{(r)}, \beta_2^{(r)})$ obsažena v intervallu $(a) \ldots (c)$, pod čímž vyrozumívám platnost nerovnin

$$\frac{a_1}{a_2} < \frac{\beta_1^{(r)}}{\beta_2^{(r)}} < \frac{c_1}{c_2}.$$

Není-li $f(\beta_1^{(r)}, \beta_2^{(r)}) = f_{\beta^{(r)n}}$ rovno nulle a rovněž tak f_{a^n} i f_{c^n}, pak můžeme též psáti

$$Z_{a\beta^{(r)}} + Z_{\beta^{(r)}c} + 2k_r = Z_{ac}, \quad k_r \geqq 0, \tag{15}$$

i když buď $f_{a^{n-1}\beta^{(r)}}$, anebo $f_{c^{n-1}\beta^{(r)}}$ anebo obojí $f_{a^{n-1}\beta^{(r)}}$, $f_{c^{n-1}\beta^{(r)}}$ jsou rovna nulle.

Neboť je-li (b_1, b_2) dvojice libovolná jenom obsažená jednak v intervallu $(a) \ldots (c)$, jednak v intervallu $(\beta^{(r)}) \ldots (\beta^{(r+1)})$, pak platí o ní (9). Řady však určující $Z_{a\beta^{(r)}}$, $Z_{\beta^{(r)}c}$ liší se jenom potud od řad pro Z_{ab}, Z_{bc}, máme-li na mysli toliko znaménka jednotlivých členů, že někteří členové řad prvých jsou rovny nulle, a jsou tudíž čísla $Z_{a\beta^{(r)}}$, $Z_{\beta^{(r)}c}$ vždy čísla buď rovná, buď menší nežli jsou čísla Z_{ab}, Z_{bc} a to menší o sudý počet, jelikož to jsou vždy členové vnitřní v příslušných řadách, jež dle předpokladů učiněných mohou býti rovny nulle. Následuje tudíž z (9) i (15), kde $k_r \geqq k$.

Ještě snadněji lze odstraniti další omezení při důkazu předpokládané, že $f(a_1, a_2) = f_{a^n}$ a f_{c^n} od nully jsou různa. Jestliže ku př. $f_{a^n} = 0$, tu přidáním tohoto čísla ku (Z'_{ab}) resp. ku (Z'_{ac}) se v počtu změn znaménkových těchto řad pranic nezmění i když $f_{a^{n-1}b} = 0$*) a tudíž i v tomto případě vztah Stephanosův jest platný, je-li platný pro formy stupně $(n - 1)$-vého. Stejně jest tomu, když $f_{c^n} = 0$ anebo když i f_{a^n} i f_{c^n} jsou současně rovna nulle.

Věta svrchu vyslovená jest tudíž u forem n-tého stupně pro každý případ dokázána, platna-li jest pro formy, jichž stupeň jest $n - 1$. Poněvadž však jest platna pro formy stupně prvého, jak bezprostředně vyplývá, jest obecně platna.

V.

Větu odstavce předcházejícího lze snadno rozšířiti i pro ten případ, že $f(b_1, b_2) = f_{b^n} = 0$.

Budiž tedy (b_1, b_2) „nullovým bodem" formy $f(x_1, x_2)$ a to řádu μ-tého. Pak můžeme psáti vztah

$$Z_{ab} + Z_{bc} + 2k + \mu = Z_{ac}, \tag{16}$$

kde $k \geqq 0$ a kde $\frac{a_1}{a_2} < \frac{b_1}{b_2} < \frac{c_1}{c_2}$.

*) Jestliže $f_{a^n} = 0$, t. j. jestliže $f(a_1, a_2) = 0$, nemůže $f_{a^{n-1}b}$ státi se nullou v intervallu $(a) \ldots (c)$, není-li vůbec identicky (pro každé b_1, b_2) nullou. Neboť tu jest (a_1, a_2) nullový bod formy $f(x_1, x_2)$ prvního řádu a lze ji psáti $f(x_1, x_2) = (a_2 x_1 - a_1 x_2)\, g(x_1, x_2)$, kde $g(a_1, a_2) \neq 0$. Pro $f_{a^{n-1}b}$ pak jest

$$f_{a^{n-1}b} = (a_2 b_1 - a_1 b_2)\, g(a_1, a_2).$$

Jestliže obecně (a_1, a_2) jest nullový bod μ-tého řádu pro formu $f(x_1, x_2)$, t. j. jestliže

$$f(x_1, x_2) = (a_2 x_1 - a_1 x_2)^{\mu}\, g(x_1, x_2), \quad g(a_1, a_2) \neq 0,$$

pak jest identicky (pro každé (b_1, b_2))

$$f_{a^n} = 0, \quad f_{a^{n-1}b} = 0, \ldots f_{a^{n-\mu+1}b^{\mu-1}} = 0$$

a zároveň

$$f_{a^{n-\mu}b^{\mu}} = (a_2 b_1 - a_1 b_2)^{\mu}\, g(a_1, a_2),$$

jak bezprostředně z rovnice (3) vyplývá.

Jest tedy prvé z čísel $f_{a^{n-k}b^k}$, jež není v tomto případě identicky rovno nulle, v intervallu $(a) \ldots (c)$ stále od nully různo.

Platí tudíž i v tomto případě, (že $f_{a^n} = 0$,) okolnost svrchu použitá, že stanou-li se pro některou z dvojic $(\beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)})$ nacházející se v intervallu $(a) \ldots (c)$ někteří členové řad (Z'_{ab}), (Z'_{bc}) nullou, jsou to vždy členové vnitřní.

Důkaz v odstavci předcházejícím podaný platí i v tomto případě; neboť při tom důkaze supposice učiněná $f_{b^n} \neq 0$ se nikde neuplatnila, až teprve ve tvrzení, že věta dokazovaná jest platna pro formy stupně prvého.

Tedy i výrok (16) v tomto odstavci učiněný bude platný pro formy n-tého stupně mající v (b_1, b_2) nullový bod μ-tého řádu $(n > \mu)$, je-li platný pro formy $(n-1)$-tého stupně mající rovněž v (b_1, b_2) nullový bod μ-tého řádu $(n-1 \geq \mu)$. A tudíž tvrzení (16) bude dokázáno, potvrdíme-li je pro formy μ-tého řádu, mající v (b_1, b_2) nullový bod μ-tého řádu.

Formy však μ-tého řádu mající v (b_1, b_2) nullový bod μ-tého řádu lze psáti ve tvaru

$$A\,(b_2 x_1 - b_1 x_2)^{\mu}$$

a pro ně platnost tvrzení bezprostředně vyplývá; neboť tu jest $Z_{ab} = 0$, $Z_{bc} = 0$, $Z_{ac} = \mu$.

VI.

Z věty Stephanosovy rozšířené pro případ, že $f_{b^n} = 0$, lze snadno odvoditi nejprve větu Descartesovu. Buďtež nullové body formy $f(x_1, x_2)$ obsažené v intervallu $(a) \ldots (b)$, $(\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots \varrho$; každý bod řádu μ_i. Pak opětovným užitím rovnice (16)*) vyplývá

$$Z_{ab} = Z_{a\alpha^{(1)}} + Z_{\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}} + \ldots + Z_{\alpha^{(\varrho)}b} + \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\varrho + 2k,$$
$$k \geq 0;$$

t. j. počet změn znaménkových v řadě (Z_{ab}) jest rovný anebo jest větší nežli jest počet nullových bodů v intervallu $(a)\ldots(b)$; tato věta jest rozšířená věta Descartesova.

Větu Descartesovu v původním znění bychom dostali, kdybychom tu položili $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$.

---

*) Stačí k tomu cíli sčítati rovnice:

$$\begin{aligned}
Z_{a\alpha^{(1)}} + Z_{\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}} + 2k_1 + \mu_1 &= Z_{a\alpha^{(2)}},\\
Z_{a\alpha^{(2)}} + Z_{\alpha^{(2)}\alpha^{(3)}} + 2k_2 + \mu_2 &= Z_{a\alpha^{(3)}},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
Z_{a\alpha^{(\varrho)}} + Z_{\alpha^{(\varrho)}b} \quad + 2k_\varrho + \mu_\varrho &= Z_{ab}.
\end{aligned}$$

Klademe-li $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ a $a_1 = a$, $a_2 = 1$; $b_1 = b$, $b_2 = 1$ a nahradíme-li v tomto případě značku c symbolem ∞, máme z věty Stephanosovy (odst. IV.)

$$Z_{ab} + Z_{b\infty} + 2k = Z_{a\infty}$$

anebo

$$Z_{ab} = Z_{a\infty} - Z_{b\infty} - 2k. \tag{17}$$

Avšak dle definice čísla $Z_{a\infty}$ jest toto rovno počtu změn znaménkových v koefficientech formy

$$f(ay_1 + y_2, y_1),$$

t. j. rovná se počtu změn znaménkových v řadě

$$f(a), f'(a), \ldots f^n(a)$$

a máme tudíž dle předcházejícího a z rovnice (17) ihned *důkaz věty Budanovy.*

Avšak rovnice (17) nad to praví, že, *dávají-li rozšířená věta Descartesova a věta Budanova pro horní hranici kořenů rovnice dané v daném intervallu různé výsledky, dává věta Descartesova výsledky menší,* t. j. výsledky prakticky užitečnější *).

VII.

Značnou důležitost má otázka o praktickém provádění separace kořenů pomocí rozšířené věty Descartesovy. Ačkoliv odpověď zcela na snadě leží, jest přece způsob, jak by účelně bylo zaříditi počítání čísel f_{a^n}, $f_{a^{n-1}b}$, $f_{a^{n-2}b^2}$, ... málo znám. Vyložím jej v následujícím a provedu, abych výklady předcházející a jich užitek pro separaci objasnil, separaci kořenů dvou algebraických rovnic.

K počítání čísel f_{a^n}, $f_{a^{n-1}b}$, ... lze užíti t. zv. Hornerova schematu. Pomocí Hornerova schematu se počítají koefficienty polynomu v y

$$f(a + y) = A'_n + A'_{n-1}y + A'_{n-2}y^2 + \ldots,$$

kteréžto koefficienty jsou $f(a)$, $\frac{1}{1!}f'(a)$, $\frac{1}{2!}f''(a)$, ... Schema

---

*) Tento důsledek jakož i možnost důkazu věty Budanovy z věty Stephanosovy vytkl již Stephanos sám. Viz Zoukis l. c., kde se nachází důkaz příslušný.

to jest pro polynom

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$$

následujícího tvaru

$$
\begin{array}{llll}
A_0, & A_1, & A_2, & A_3 \ldots\ldots\ldots A_{n-2}, \quad A_{n-1}, \quad A_n \\
0 & aB_0, & aB_1, & aB_2 \ldots\ldots\ldots aB_{n-3}, \quad aB_{n-2}, \quad aB_{n-1} \\ \hline
B_0, & B_1, & B_2, & B_3 \ldots\ldots\ldots B_{n-2}, \quad B_{n-1}, \quad \underline{B_n} \\
0 & aC_0, & aC_1, & aC_2 \ldots\ldots\ldots aC_{n-3}, \quad aC_{n-2} \\ \hline
C_0, & C_1, & C_2, & C_3 \ldots\ldots\ldots C_{n-2}, \quad \underline{C_{n-1}} \\
0 & aD_0, & aD_1, & aD_2 \ldots\ldots\ldots aD_{n-3} \\ \hline
D_0, & D_1, & D_2, & D_3 \ldots\ldots\ldots \underline{D_{n-2}} \\
\ldots & & & \\
\ldots & & &
\end{array}
\qquad (a)
$$

V tomto schematu jest každé číslo pod horizontální čarou rovno součtu dvou nad ním nad čarou se nacházejících čísel, ku př. $C_3 = B_3 + aC_2$. Čísla B_n, C_{n-1}, D_{n-2}, $E_{n-3}, \ldots$ nám dávají hledaná čísla; jest

$$B_n = f(a) = A'_n, \quad C_{n-1} = \frac{1}{1!}f'(a) = A'_{n-1},$$

$$D_{n-2} = \frac{1}{2!}f''(a) = A'_{n-2} \ldots$$

Schematu (a) říkejme schema Hornerovo pro a a pro řadu $A_0, A_1, \ldots A_n$.

Čísla f_{a^n}, $f_{a^{n-1}b}, \ldots$ jsou koefficienty v polynomu

$$(1 + y)^n f\left(\frac{ay + b}{y + 1}\right),$$

(vracíme se opět k označení nehomogennímu). Avšak

$$f\left(\frac{ay + b}{y + 1}\right) = f\left(a + \frac{b - a}{y + 1}\right),$$

a tak vidíme, že k výpočtu čísel f_{a^n}, $f_{a^{n-1}b}, \ldots$ postačí provésti tyto tři výkony po sobě:

1. Sestaviti Hornerovo schema pro a a pro řadu $A_0, A_1, \ldots A_n$.

2. Z řady, kterou tak dostáváme, $A'_0, A'_1, \ldots A'_n$ odvoditi řadu

$$A''_0 = A'_n, \quad A''_1 = (b - a)\,A'_{n-1}, \quad A''_2 = (b - a)^2\,A'_{n-2}, \ldots$$

3 Sestaviti Hornerovo schema pro 1 a pro řadu A''_0, $A''_1, \ldots A''_n$. Tato třetí operace nám jako výsledek poskytne $f_{a^n} = A'''_0$, $f_{a^{n-1}b} = A'''_1, \ldots$ *)

1. *příklad.* Provésti jest separaci reálných kořenů rovnice

$$3x^6 - 25x^5 + 34x^4 - 31x^3 + 88x^2 - 215x + 331 = 0.$$

Dle Descartesovy věty všechny reálné kořeny této rovnice jsou kladné, jako horní mez kořenů můžeme pokládati číslo 9 (neboť pro čísla $\geqq 9$ jsou výrazy $3x^6 - 25x^5$, $34x^4 - 31x^3$, $88x^2 - 215x$, 331 stále kladny) Stačí tedy vyšetřovati intervally $0 \ldots 1, 1 \ldots 2, \ldots\ldots\ldots, 8 \ldots 9$; vyšetřování budeme prováděti dle věty Budanovy a teprve tam, kde Budanova věta dává výsledky málo určité, použijeme rozšířené věty Descartesovy. Při vyšetřování intervallů vyznačených vystačíme se sčítáním; (neboť veškerá násobení potřebná jsou násobení jednotkou). Hornerovo schema pro 1 a pro 3, — 25, . . . jest

3	— 25	34	— 31	88	— 215	331
3	— 22	12	— 19	69	— 146	*185*
3	— 19	— 7	— 26	43	— *103*	
3	— 16	— 23	— 49	— *6*		
3	— 13	— 36	— *85*			
3	— 10	— *46*				
3	— *7*					

Dospěli jsme tak k řadě čísel poskytující dvě změny znaménkové, jsou tedy nejvýše toliko dva kořeny reálné větší než 1 (dle věty Descartesovy) a poněvadž původní řada koefficientů poskytuje 6 změn, jsou dle věty Budanovy mezi 0 a 1 nejvýše 4 kořeny dané rovnice. Poněvadž tento výsledek jest neurčitý, zkusíme rozšířenou větu Descartesovu pro $a = 0$, $b = 1$. Výpočty příslušné redukují se tu na sestrojení schematu Hornerova

*) Tato úprava výpočtu čísel $f_a{}^n$, $f_a{}^{n-1}{}_b, \ldots$ není jediná. Často lze docíliti ještě jednodušším způsobem výsledních koefficientů. I tu se uplatňuje užitek označení homogenního. Tak ku př. když $b = a + \frac{1}{k}$, užijeme tohoto vztahu

$$f\left(\frac{ay + ak + 1}{y + k}\right) = f\left(a + \frac{1}{y + k}\right);$$

i vidíme, že se tu redukuje počet na sestavení dvou Hornerových schematů, první pro číslo a, druhý pro číslo k.

pro 1 a pro řadu 331, — 215, 88, . . . Toto schema jest

$$\begin{array}{rrrrrrr} 331 & -215 & 88 & -31 & 34 & -25 & 3 \\ \hline 331 & 116 & 204 & 173 & 207 & 182 & \mathit{185} \end{array}$$

. . . .

Stačilo počítati toliko jeden řádek schematu, abychom seznali, že koefficienty hledané jsou vesměs kladné a že tudíž dle rozšířené věty Descartesovy není reálného kořene mezi 0 a 1. Jsou tedy jistě aspoň 4 kořeny dané rovnice komplexní a nejvýše dva reálné.

Abychom vyšetřili intervall (1, 2), sestrojíme Hornerovo schema pro 1 a pro řadu 3, — 7, — 46, . . . ; dostaneme

$$\begin{array}{rrrrrrr} 3 & -7 & -46 & -85 & -6 & -103 & 185 \\ \hline 3 & -4 & -50 & -135 & -141 & -244 & -\mathit{59} \end{array}$$

. . . .

Rovněž stačilo počítati toliko jedinou řádku, abychom seznali, že mezi 1 a 2 jest jeden a toliko jeden kořen reálný: druhý pak musí býti mezi 2 a 9. Tím jsme zjistili, kolik daná rovnice má kořenů reálných, jakož i našli intervally, ve kterých se nacházejí, a separace kořenů jest tudíž provedena.

2. příklad. Provésti jest separaci reálných kořenů u rovnice

$$16x^4 - 32x^3 + 423x^2 - 408x + 102 = 0.$$

Budanovo schema pro 1 a pro řadu koefficientů této rovnice jest

$$\begin{array}{rrrrr} 16 & -32 & 423 & -408 & 102 \\ \hline 16 & -16 & 407 & -1 & \mathit{101} \\ 16 & 0 & 391 & \mathit{390} & \\ 16 & 16 & \mathit{407} & & \\ \mathit{16} & \mathit{32}. & & & \end{array}$$

Dle výsledku docíleného jsou všecky kořeny reálné dané rovnice obsaženy v intervallu 0 . . . 1. Abychom si zajistili určitější výsledek, užijeme rozšířeného kriteria Descartesova pro intervall 0 . . . 1. K tomu účelu stačí sestaviti toto Hornerovo schema

$$\begin{array}{rrrrr} 102 & -408 & 423 & -32 & 16 \\ \hline 102 & -306 & 117 & 85 & \mathit{101} \\ 102 & -204 & -87 & -\mathit{2} & \\ 102 & -102 & -\mathit{189} & & \\ \mathit{102} & \mathit{0} & & & \end{array}$$

I jest tedy počet kořenů reálných v intervallu $0 \ldots 1$ nejvýše rovný 2; aspoň dva kořeny dané rovnice jsou komplexní. Abychom si zjednali výsledky ještě určitější, užijeme Descartesovy věty na intervally $\left(0 \ldots \frac{1}{2}\right)$ a $\left(\frac{1}{2} \ldots 1\right)$.

Pro první intervall jest počítati Hornerovo schema pro 1 a pro řadu

$$102, \quad -408 \cdot \frac{1}{2}, \quad 423 \cdot \frac{1}{4}, \quad -32 \cdot \frac{1}{8}, \quad 16 \cdot \frac{1}{16}.$$

Odstraníme-li zlomky a provedeme příslušný počet, máme

408	− 916	423	− 16	4
408	− 408	15	1	*3*
408	0	15	*14*	

. . . .

odkudž vyplývá, že v intervallu $\left(0 \ldots \frac{1}{2}\right)$ není reálných kořenů. Pro intervall $\left(\frac{1}{2} \ldots 1\right)$ použijeme k výpočtu příslušné Descartesovy řady koefficientů svrchu vypočtených (16, 32, 407, ...) a sestrojíme Hornerovo schema pro 1 a pro řadu

$$101, \quad -390 \cdot \frac{1}{2}, \quad 407 \cdot \frac{1}{4}, \quad -32 \cdot \frac{1}{8}, \quad 16 \cdot \frac{1}{16},$$

i dostáváme odstranivše zlomky

404,	− 780,	407,	− 16,	4
404,	− 376,	31,	+ 15,	+ *19*
404,	28,	59,	+ *74*	

. . . . ,

z čehož opět jest patrno ihned, že ani v intervallu $\left(\frac{1}{2} \ldots 1\right)$ rovnice daná nemá reálných kořenů. Nemá tudíž rovnice daná vůbec reálných kořenů.