Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Libický

Úvod do vektorové analyse. [XIII.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 5, 460--488

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123809`

uvésti krásné výsledky, jež v pojednáních Pelzových o axonometrii jsou uloženy, a učiniti je přístupny také těm, již nejsou ještě obeznámeni s geometrií projektivní. Cíl tento Pelz skutečně po dlouhá léta sledoval ve svých přednáškách, konaných před posluchači prvního roku studijního na technice, takže řečené dílo v mnohém až do jednotlivostí připomíná Pelzovy výklady a též ve volbě a v uspořádání obrazců namnoze jest tu patrný vliv Pelzův, vedle toho ovšem i Staudiglův.

Úvod do vektorové analyse.

Napsal řed. Ant. Libický.

(Pokračování.)

Zmíníme se na tomto místě o významu, jaký mají druhý mnohočlen Φ_2 a třetí skalár Φ_3 daného mnohočlenu dyadického Φ v theorii deformace.

Určuje-li $\Phi = \mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn}$ stejnorodou deformaci, při níž vektor $\mathbf{r}$ se změní v $\mathbf{r}' = \Phi \,.\, \mathbf{r}$, stanovena jest mnohočlenem Φ_2 změna, kterou při tom dozná nějaká plocha. Neboť mnohočlen Φ přetvoří vektory $\mathbf{l}^{-1}, \mathbf{m}^{-1}, \mathbf{n}^{-1}$, reciproké ku $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$, po řadě ve vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, ježto na př.

$$\begin{aligned}\Phi \,.\, \mathbf{l}^{-1} &= \mathbf{al} \,.\, \mathbf{l}^{-1} + \mathbf{bm} \,.\, \mathbf{l}^{-1} + \mathbf{cn} \,.\, \mathbf{l}^{-1} \\ &= \mathbf{a}\,(\mathbf{l} \,.\, \mathbf{l}^{-1}) + \mathbf{b}\,(\mathbf{m} \,.\, \mathbf{l}^{-1}) + \mathbf{c}\,(\mathbf{n} \,.\, \mathbf{l}^{-1}),\end{aligned}$$

což se vzhledem k rovnicím (165) rovná $\mathbf{a}$. Tudíž roviny dané po řadě vektory $\mathbf{m}^{-1}$ a $\mathbf{n}^{-1}$, $\mathbf{n}^{-1}$ a $\mathbf{l}^{-1}$, $\mathbf{l}^{-1}$ a $\mathbf{m}^{-1}$ přecházejí v roviny určené vektory $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}$ a $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Takovou změnu může způsobiti jen dyadický mnohočlen

$$\Phi_2 = [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]\,[\mathbf{m} \times \mathbf{n}] + [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]\,[\mathbf{n} \times \mathbf{l}] + [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]\,[\mathbf{l} \times \mathbf{m}],$$

poněvadž na př.

$$\Phi_2 \,.\, [\mathbf{m}^{-1} \times \mathbf{n}^{-1}] = \mathbf{b} \times \mathbf{c};$$

neboť z rovnic (163ᵃ) plyne

$$\mathbf{m} \times \mathbf{n} = (\mathbf{lmn})\, \mathbf{m}^{-1}$$

a z rovnic (163ᵇ)

$$\mathbf{m}^{-1} \times \mathbf{n}^{-1} = (\mathbf{l}^{-1}\, \mathbf{m}^{-1}\, \mathbf{n}^{-1})\, \mathbf{m},$$

tudíž

$$[\mathbf{m} \times \mathbf{n}] \,.\, [\mathbf{m}^{-1} \times \mathbf{n}^{-1}] = (\mathbf{l}\mathbf{m}\mathbf{n}) \,.\, (\mathbf{l}^{-1}\, \mathbf{m}^{-1}\, \mathbf{n}^{-1})\, \mathbf{m}^{-1} \,.\, \mathbf{m}$$

čili vzhledem ke vzorcům (166) a (165)

$$[\mathbf{m} \times \mathbf{n}] \,.\, [\mathbf{m}^{-1} \times \mathbf{n}^{-1}] = 1,$$

a podobně dokážeme, že

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{l}] \,.\, [\mathbf{m}^{-1} \times \mathbf{n}^{-1}] = 0 \text{ a též } [\mathbf{l} \times \mathbf{m}] \,.\, [\mathbf{m}^{-1} \times \mathbf{n}^{-1}] = 0.$$

Tudíž vektor **p**, který dle (7) představuje na př. součin $[\mathbf{m}^{-1} \times \mathbf{n}^{-1}]$, transformací Φ proměňuje se ve vektor

$$\mathbf{p}' = \Phi_2 \,.\, \mathbf{p},$$

určující deformovanou plochu $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ *).

Význam třetího skaláru Φ_3 poznáme touto úvahou: Ježto mnohočlen Φ přeměňuje vektory $\mathbf{l}^{-1}$, $\mathbf{m}^{-1}$, $\mathbf{n}^{-1}$ po řadě ve vektory **a**, **b**, **c**, mění se při tom skalární součin $(\mathbf{l}^{-1}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{n}^{-1})$ v $(\mathbf{abc})$. Avšak

$$\Phi_3 = (\mathbf{abc})\,(\mathbf{lmn}) = \frac{(\mathbf{abc})}{(\mathbf{l}^{-1}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{n}^{-1})}$$

vzhledem k rovnici (166); tudíž také

$$\Phi_3\, (\mathbf{l}^{-1}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{n}^{-1}) = (\mathbf{abc}).$$

Jest však známo, že skalárním součinem

$$(\mathbf{l}^{-1}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{n}^{-1}) = [\mathbf{l}^{-1} \times \mathbf{m}^{-1}] \,.\, \mathbf{n}^{-1}$$

vyjádřen jest obsah rovnoběžnostěnu o hranách $\mathbf{l}^{-1}$, $\mathbf{m}^{-1}$. $\mathbf{n}^{-1}$; pročež Φ_3 stanoví poměr obsahu deformovaného rovnoběžnostěnu k obsahu rovnoběžnostěnu původního. Jelikož každý objem prostorového útvaru představiti lze rovnoběžnostěnem, můžeme též říci: Třetím skalárem Φ_3 dán jest poměr objemu kterékoli části deformovaného útvaru k objemu části původní **).

Ježto

$$\Phi \,.\, \mathbf{l}^{-1} = \mathbf{a}, \quad \Phi \,.\, \mathbf{m}^{-1} = \mathbf{b}, \quad \Phi \,.\, \mathbf{n}^{-1} = \mathbf{c},$$

lze třetímu skaláru dáti tvar

$$\Phi_3 = \frac{(\Phi \,.\, \mathbf{l}^{-1} \quad \Phi \,.\, \mathbf{m}^{-1} \quad \Phi \,.\, \mathbf{n}^{-1})}{(\mathbf{l}^{-1}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{n}^{-1})}$$

*) Viz Seydler: »Theoretická mechanika«, pag. 179.

**) Ibid. pag. 180.

aneb, píšeme-li místo $\mathbf{l}^{-1}$, $\mathbf{m}^{-1}$, $\mathbf{n}^{-1}$ kratčeji po řadě $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$

$$\Phi_3 = \frac{(\Phi . \mathbf{a} \quad \Phi . \mathbf{b} \quad \Phi . \mathbf{c})}{(\mathbf{abc})}. \tag{182}$$

Uvádíme tuto bez důkazu některé věty platící o výrazech Φ_2 a Φ_3, jež obsaženy jsou v těchto vzorcích

$$(\Phi_2)_C = (\Phi_C)_2 \qquad \Phi_3 = (\Phi_C)_3, \tag{183}$$

$$(\Phi^{-1})_2 = (\Phi_2)^{-1} \qquad (\Phi^{-1})_3 = (\Phi_3)^{-1}, \tag{184}$$

$$(\Phi . \Psi)_2 = \Phi_2 . \Psi_2 \quad (\Phi . \Psi)_3 = \Phi_3 . \Psi_3. \tag{185}$$

Zvláště však budiž vytčena věta:

Skalární součin druhého mnohočlenu Φ_2 a dyadického mnohočlenu Φ_C, sdruženého s Φ, rovná se součinu třetího skaláru Φ_3 a idemfaktoru.

Je-li totiž

$$\Phi = \mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn},$$

jest

$$\Phi_C = \mathbf{la} + \mathbf{mb} + \mathbf{nc}$$

a

$$\Phi_2 = [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] [\mathbf{m} \times \mathbf{n}] + [\mathbf{c} \times \mathbf{a}] [\mathbf{n} \times \mathbf{l}] + [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] [\mathbf{l} \times \mathbf{m}];$$

tudíž

$$\begin{aligned}\Phi_2 . \Phi_C &= ([\mathbf{b} \times \mathbf{c}] [\mathbf{m} \times \mathbf{n}] + [\mathbf{c} \times \mathbf{a}] [\mathbf{n} \times \mathbf{l}] \\ &\quad + [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] [\mathbf{l} \times \mathbf{m}]) . (\mathbf{la} + \mathbf{mb} + \mathbf{nc}) \\ &= [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] [\mathbf{m} \times \mathbf{n}] . \mathbf{la} + [\mathbf{c} \times \mathbf{a}] [\mathbf{n} \times \mathbf{l}] . \mathbf{la} \\ &\quad + [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] [\mathbf{l} \times \mathbf{m}] . \mathbf{la} + \ldots\end{aligned}$$

čili dle vzorce [153]

$$\begin{aligned}\Phi_2 . \Phi_C &= ([\mathbf{m} \times \mathbf{n}] . \mathbf{l}) [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] \mathbf{a} + ([\mathbf{n} \times \mathbf{l}] . \mathbf{l}) [\mathbf{c} \times \mathbf{a}] \mathbf{a} \\ &\quad + ([\mathbf{l} \times \mathbf{m}] . \mathbf{l}) [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \mathbf{a} + \ldots\end{aligned}$$

Skalární součinitelé $[\mathbf{m} \times \mathbf{n}] . \mathbf{l}$, $[\mathbf{n} \times \mathbf{l}] . \mathbf{l}$ atd. dyad na pravé straně této rovnice jsou skalární součiny tří vektorů; dle relací dokázaných o těchto součinech jest

$$[\mathbf{m} \times \mathbf{n}] . \mathbf{l} = [\mathbf{n} \times \mathbf{l}] . \mathbf{m} = [\mathbf{l} \times \mathbf{m}] . \mathbf{n} = (\mathbf{lmn}).$$

a ježto víme, že skalární součin tří vektorů konplanárních se rovná nulle, jest na př.

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{l}] . \mathbf{l} = 0, \quad [\mathbf{l} \times \mathbf{m}] . \mathbf{l} = 0 \text{ atd.}$$

Na tom základě vyjádříme skalární součin $\Phi_2 \,.\, \Phi_C$ výrazem

$$(\mathbf{lmn})\,([\mathbf{b} \times \mathbf{c}]\,\mathbf{a} + [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]\,\mathbf{b} + [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]\,\mathbf{c});$$

zavedeme-li v něm soustavu reciprokálních vektorů $\mathbf{a}^{-1}$, $\mathbf{b}^{-1}$, $\mathbf{c}^{-1}$ k vektorům $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, obdržíme přihlížejíce k rovnicím (163ª)

$$\Phi_2 \,.\, \Phi_C = (\mathbf{lmn})\,(\mathbf{abc})\,(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{b}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{c}^{-1}\mathbf{c}).$$

Avšak dle (179) $(\mathbf{lmn})\,(\mathbf{abc}) = \Phi_3$ a dle (164ᵇ)

$\mathbf{a}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{b}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{c}^{-1}\mathbf{c} = \mathbf{I}$ rovná se idemfaktoru $\mathbf{I}$,
pročež

$$\Phi_2 \,.\, \Phi_C = \Phi_3 \mathbf{I}. \tag{186}$$

Použijeme-li tohoto vzorce odvodíme snadno analytický výraz pro reciprokální dyadický mnohočlen Φ^{-1}. Neboť z rovnice té plyne, ježto Φ_3 jest skalárem,

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_3} \,.\, \Phi_C = \mathbf{I},$$

t. j. mnohočleny $\frac{\Phi_2}{\Phi_3}$ a Φ_C jsou reciprokální, jak vyplývá z definice takových mnohočlenů Tudíž dle (167)

$$\Phi_C^{-1} = \frac{\Phi_2}{\Phi_3};$$

je-li však Φ^{-1} sdružený mnohočlen ku $\frac{\Phi_2}{\Phi_3}$, jest také naopak $\frac{\Phi_2}{\Phi_3}$ sdružený k Φ^{-1}, t j.

$$\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_3}\right)_C = \Phi^{-1},$$

z čehož vyplývá

$$\Phi^{-1} = \frac{(\Phi_2)_C}{\Phi_3},$$

ježto Φ_3 jest skalárem.

Analytické výrazy pro $(\Phi_2)_C$ a Φ_3 dány jsou vzorci (180ᵇ) a (181); pročež

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Phi^{-1} = A_{11}\mathbf{ii} + A_{21}\mathbf{ij} + A_{31}\mathbf{ik} + A_{12}\mathbf{ji} + A_{22}\mathbf{jj} + A_{32}\mathbf{jk} + A_{13}\mathbf{ki} + A_{23}\mathbf{kj} + A_{33}\mathbf{kk}, \tag{187}$$

kde součinitelé A_{11}, A_{21}, A_{31} atd. jsou známé subdeterminanty.

Konečně zde budiž připojeno, že skalární součin dvou dyadických mnohočlenů

$$\Phi = \begin{matrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{matrix} \quad \text{a} \quad \Psi = \begin{matrix} b_{11}, b_{12}, b_{13} \\ b_{21}, b_{22}, b_{23} \\ b_{31}, b_{32}, b_{33} \end{matrix}$$

vyjádříme analyticky vzorcem

$$\begin{aligned} \Phi \,.\, \Psi = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31},\ & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}, \\ & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}, \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31},\ & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}, \\ & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}, \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31},\ & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}, \\ & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}, \end{aligned} \tag{188a}$$

jak se snadno přesvědčíme znásobením příslušných mnohočlenů, uvážíce, že dle (153) a (5)

$$\mathbf{ii} \,.\, \mathbf{ii} = (\mathbf{i} \,.\, \mathbf{i})\, \mathbf{ii} = \mathbf{ii},\ \mathbf{ij} \,.\, \mathbf{ii} = (\mathbf{j} \,.\, \mathbf{i})\, \mathbf{ii} = 0, \text{ atd.}$$

Invarianty dyadického mnohočlenu. Důležité skalární invarianty dyadického mnohočlenu

$$\begin{aligned} \Phi = & a_{11}\mathbf{ii} + a_{12}\mathbf{ij} + a_{13}\mathbf{ik} \\ & + a_{21}\mathbf{ji} + a_{22}\mathbf{jj} + a_{23}\mathbf{jk} \\ & + a_{31}\mathbf{ki} + a_{32}\mathbf{kj} + a_{33}\mathbf{kk} \end{aligned}$$

jsou:

1. *první skalár,* totiž skalární část daného mnohočlenu

$$\Phi_s = a_{11}\mathbf{i} \,.\, \mathbf{i} + a_{12}\mathbf{i} \,.\, \mathbf{j} + a_{13}\mathbf{i} \,.\, \mathbf{k} + a_{21}\mathbf{j} \,.\, \mathbf{i} + \ldots$$

Vzhledem k rovnicím (5) jest hodnota jeho

$$\Phi_s = a_{11} + a_{22} + a_{33}; \tag{189}$$

2. *druhý skalár,* totiž skalární část druhého mnohočlenu Φ_2. Jest to dle (180a) výraz

$$(\Phi_2)_s = A_{11}\mathbf{i} \,.\, \mathbf{i} + A_{12}\mathbf{i} \,.\, \mathbf{j} + A_{13}\mathbf{i} \,.\, \mathbf{k} + A_{21}\mathbf{j} \,.\, \mathbf{i} + \ldots$$

čili, užijeme-li opět rovnic (5)

$$\begin{aligned} (\Phi_2)_s &= A_{11} + A_{22} + A_{33} \\ &= a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}a_{32} - a_{31}a_{13} - a_{12}a_{21}; \end{aligned} \tag{190}$$

3. zmíněný již *třetí skalár*

$$\Phi_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{*)}. \tag{181}$$

Rovnice Hamilton-Cayley-ova. Každý dyadický mnohočlen Φ vyhovuje rovnici kubické, jejíž součinitelé jsou invarianty Φ_s, $(\Phi_2)_s$, Φ_3, totiž

$$\Phi^3 - \Phi_s \Phi^2 + (\Phi_2)_s \Phi - \Phi_3 \mathbf{I} = 0.$$

Důkaz. Správnost této rovnice dokážeme, ukážeme-li, že

$$\Phi^3 \,.\, \mathbf{r} - \Phi_s \Phi^2 \,.\, \mathbf{r} + (\Phi_2)_s \Phi \,.\, \mathbf{r} - \Phi_3 \mathbf{I} \,.\, \mathbf{r} = 0.$$

Čtyři vektory, v rovnici té se vyskytující, $\mathbf{I} \,.\, \mathbf{r} = \mathbf{r}$, $\Phi \,.\, \mathbf{r}$, $\Phi^2 \,.\, \mathbf{r}$, $\Phi^3 \,.\, \mathbf{r}$, které obecně nejsou konplanární, vyhovují rovnici (19):

$$(\mathbf{bcd})\,\mathbf{a} + (\mathbf{cad})\,\mathbf{b} + (\mathbf{abd})\,\mathbf{c} - (\mathbf{abc})\,\mathbf{d} = 0$$

čili

$$(\mathbf{bcd})\,\mathbf{a} - (\mathbf{acd})\,\mathbf{b} + (\mathbf{abd})\,\mathbf{c} - (\mathbf{abc})\,\mathbf{d} = 0.$$

Položíme-li tu za **a**, **b**, **c**, **d** po řadě $\Phi^3 \,.\, \mathbf{r}$, $\Phi^2 \,.\, \mathbf{r}$, $\Phi \,.\, \mathbf{r}$, $\mathbf{r}$, obdržíme

$$(\Phi^2.\mathbf{r} \quad \Phi.\mathbf{r} \quad \mathbf{r})\, \Phi^3.\mathbf{r} - (\Phi^3.\mathbf{r} \quad \Phi.\mathbf{r} \quad \mathbf{r})\, \Phi^2.\mathbf{r}$$
$$+ (\Phi^3.\mathbf{r} \quad \Phi^2.\mathbf{r} \quad \mathbf{r})\, \Phi.\mathbf{r} - (\Phi^3.\mathbf{r} \quad \Phi^2.\mathbf{r} \quad \Phi.\mathbf{r})\, \mathbf{r} = 0,$$

aneb

$$\Phi^3 \,.\, \mathbf{r} - \frac{(\Phi^3.\mathbf{r} \quad \Phi.\mathbf{r} \quad \mathbf{r})}{(\Phi^2.\mathbf{r} \quad \Phi.\mathbf{r} \quad \mathbf{r})}\, \Phi^2 \,.\, \mathbf{r} + \frac{(\Phi^3.\mathbf{r} \quad \Phi^2.\mathbf{r} \quad \mathbf{r})}{(\Phi^2.\mathbf{r} \quad \Phi.\mathbf{r} \quad \mathbf{r})}\, \Phi \,.\, \mathbf{r}$$
$$- \frac{(\Phi^3.\mathbf{r} \quad \Phi^2.\mathbf{r} \quad \Phi.\mathbf{r})}{(\Phi^2.\mathbf{r} \quad \Phi.\mathbf{r} \quad \mathbf{r})}\, \mathbf{r} = 0. \tag{φ}$$

Součinitelům u $\Phi^2 \,.\, \mathbf{r}$, $\Phi \,.\, \mathbf{r}$ a $\mathbf{r}$ lze však dáti jiný tvar; za tou příčinou zaveďme v dyadickém mnohočlenu

$$\Phi = \mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn}$$

*) *Jaumann* v citovaném již spise »Die Grundlagen der Bewegungslehre« (pag. 44) uvádí mimo Φ_s a Φ_3 ještě první skalár druhého řádu

$$[\Phi]_s^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + {}^1|_2\,(a_{12} + a_{21})^2 + {}^1|_2\,(a_{23} + a_{32})^2 + {}^1|_2\,(a_{31} + a_{13})^2$$

a druhý skalár druhého řádu

$$\{\Phi\}_s^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2.$$

soustavu vektorů reciprokálních a^{-1}, b^{-1}, c^{-1} k předním členům a, b, c. Přihlížejíce k rovnicím (163^b) dostaneme pak

$$\Phi = \frac{b^{-1} \times c^{-1}}{(a^{-1} b^{-1} c^{-1})} I + \frac{c^{-1} \times a^{-1}}{(a^{-1} b^{-1} c^{-1})} m + \frac{a^{-1} \times b^{-1}}{(a^{-1} b^{-1} c^{-1})} n \qquad (\chi)$$

a pro skalární část tohoto mnohočlenu

$$\Phi_s = \frac{[b^{-1} \times c^{-1}] \,.\, I}{(a^{-1} b^{-1} c^{-1})} + \frac{[c^{-1} \times a^{-1}] \,.\, m}{(a^{-1} b^{-1} c^{-1})} + \frac{[a^{-1} \times b^{-1}] \,.\, n}{(a^{-1} b^{-1} c^{-1})}$$

čili

$$\Phi_s = \frac{(b^{-1} c^{-1} I)}{(a^{-1} b^{-1} c^{-1})} + \frac{(c^{-1} a^{-1} m)}{(a^{-1} b^{-1} c^{-1})} + \frac{(a^{-1} b^{-1} n)}{(a^{-1} b^{-1} c^{-1})}.$$

Položme nyní za c^{-1}, b^{-1}, a^{-1} po řadě vektory r, $\Phi \,.\, r$, $\Phi \,.\, (\Phi \,.\, r) = \Phi^2 \,.\, r$ a za n, m, I po řadě $\Phi \,.\, r$, $\Phi^2 \,.\, r$, $\Phi^3 \,.\, r$; tím nabývají druhý a třetí člen na pravé straně hodnoty rovné nulle, ježto v čítatelích jejich dva činitelé se sobě rovnají, i obdržíme

$$\Phi_s = \frac{(\Phi \,.\, r \quad r \quad \Phi^3 \,.\, r)}{(\Phi^2 \,.\, r \quad \Phi \,.\, r \quad r)}$$

aneb, vyměníme-li v čítateli náležitě činitele, též

$$\Phi_s = \frac{(\Phi^3 \,.\, r \quad \Phi \,.\, r \quad r)}{(\Phi^2 \,.\, r \quad \Phi \,.\, r \quad r)},$$

čímž určena jest hodnota součinitele u $\Phi^2 \,.\, r$ v rovnici (φ).

Podobně ustanovíme součinitel u $\Phi \,.\, r$. Z rovnice (χ) vyplývá pro skalární část druhého mnohočlenu Φ_2 výraz

$$(\Phi_2)_s = \frac{[c^{-1} \times a^{-1}] \times [a^{-1} \times b^{-1}]}{(a^{-1} b^{-1} c^{-1})^2} \,.\, [m \times n]$$
$$+ \frac{[a^{-1} \times b^{-1}] \times [b^{-1} \times c^{-1}]}{(a^{-1} b^{-1} c^{-1})^2} \,.\, [n \times I]$$
$$+ \frac{[b^{-1} \times c^{-1}] \times [c^{-1} \times a^{-1}]}{(a^{-1} b^{-1} c^{-1})^2} \,.\, [I \times m].$$

Jest však dle vzorce (18^a) na př.

$$[c^{-1} \times a^{-1}] \times [a^{-1} \times b^{-1}] = (c^{-1} a^{-1} b^{-1})\, a^{-1}$$
$$- (a^{-1} a^{-1} b^{-1})\, c^{-1} = (c^{-1} a^{-1} b^{-1})\, a^{-1},$$

ježto skalární součin $(a^{-1} a^{-1} b^{-1})$ roven jest nulle; pročež

$$(\Phi_2)_s = \frac{(\mathbf{c}^{-1}\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1})\,\mathbf{a}^{-1}\,.\,[\mathbf{m}\times\mathbf{n}]}{(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1})^2}$$
$$+\frac{(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1})\,\mathbf{b}^{-1}\,.\,[\mathbf{n}\times\mathbf{I}]}{(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1})^2}$$
$$+\frac{(\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1}\mathbf{a}^{-1})\,\mathbf{c}^{-1}\,.\,[\mathbf{I}\times\mathbf{m}]}{(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1})^2}.$$

Ježto

$$(\mathbf{c}^{-1}\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}) = -\,(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{c}^{-1}\mathbf{b}^{-1}) = (\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1})$$

a

$$(\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1}\mathbf{a}^{-1}) = -\,(\mathbf{b}^{-1}\mathbf{a}^{-1}\mathbf{c}^{-1}) = (\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1}),$$

bude

$$(\Phi_2)_s = \frac{\mathbf{a}^{-1}\,.\,[\mathbf{m}\times\mathbf{n}]}{(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1})} + \frac{\mathbf{b}^{-1}\,.\,[\mathbf{n}\times\mathbf{I}]}{(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1})} + \frac{\mathbf{c}^{-1}\,.\,[\mathbf{I}\times\mathbf{m}]}{(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1})}$$
$$= \frac{(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{m}\mathbf{n})}{(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1})} + \frac{(\mathbf{b}^{-1}\mathbf{n}\mathbf{I})}{(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1})} + \frac{(\mathbf{c}'^{-1}\,\mathbf{I}\mathbf{m})}{(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^{-1})}.$$

Položíme tu opět za $\mathbf{c}^{-1}$, $\mathbf{b}^{-1}$, $\mathbf{a}^{-1}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{I}$ po řadě výše uvedené hodnoty

$$\mathbf{r},\ \Phi\,.\,\mathbf{r},\ \Phi^2\,.\,\mathbf{r},\ \Phi\,.\,\mathbf{r},\ \Phi^2\,.\,\mathbf{r},\ \Phi^3\,.\,\mathbf{r},$$

vychází

$$(\Phi_2)_s = \frac{(\mathbf{r}\quad \Phi^3.\mathbf{r}\quad \Phi^2.\mathbf{r})}{(\Phi^2.\mathbf{r}\quad \Phi\,.\,\mathbf{r}\quad \mathbf{r})},$$

ježto první dva sčítanci na pravé straně, mající v čítatelích dva stejné činitele, se rovnají nulle.

Provedouce ve skalárním součinu $(\mathbf{r}\quad \Phi^3.\mathbf{r}\quad \Phi^2.\mathbf{r})$ náležitou změnu v pořádku činitelů nabudeme

$$(\Phi_2)_s = \frac{(\Phi^3.\mathbf{r}\quad \Phi^2.\mathbf{r}\quad \mathbf{r})}{(\Phi^2.\mathbf{r}\quad \Phi.\mathbf{r}\quad \mathbf{r})}.$$

Konečně třetí součinitel v rovnici (φ) rovná se dle vzorce (182) třetímu skaláru Φ_3.

Substitucí nalezených hodnot za součinitele vyskytující se v rovnici (φ) změní se tato v

$$\Phi^3.\mathbf{r} - \Phi_s\,\Phi^2.\mathbf{r} + (\Phi_2)_s\,\Phi.\mathbf{r} - \Phi_3\mathbf{r} = 0;$$

z této rovnice pak plyne, píšeme-li ve čtvrtém členu $\mathbf{I}.\mathbf{r}$ za $\mathbf{r}$, vzhledem k definici rovnosti dvou dyadických mnohočlenů

$$\Phi^3 - \Phi_s\,\Phi^2 + (\Phi_2)_s\,\Phi - \Phi_3\,\mathbf{I} = 0. \qquad (191^a)$$

Rovnice ta může býti nazvána *rovnicí Hamilton-Cayley-ovou*, ježto Hamilton ukázal nejprve, že podobná rovnice platí o kvaternionech a Cayley odvodil obecnější rovnici n-tého stupně platnou pro matrice n-tého řádu*).

Geometrické znázornění dyadického mnohočlenu. Jako lineární funkce vektorová $\Phi . \mathbf{r}$ určena jest třemi hodnotami $\Phi . \mathbf{a}$, $\Phi . \mathbf{b}$, $\Phi . \mathbf{c}$ pro vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, jež nejsou konplanární, tak i dyadický mnohočlen Φ, který lineární funkci vektorovou definuje, jest úplně stanoven takovými třemi vektory (tedy devíti určovacími částkami). Abychom jej geometricky znázornili, vyšetřme, jaké jest místo koncových bodů všech vektorů $\Phi . \mathbf{r}_1$, z jednoho bodu vycházejících, zaujme-li proměnlivý vektor jednotkový $\mathbf{r}_1$ všechny možné polohy v prostoru (o témž počátku). Z rovnice

$$\mathbf{r}'_1 = \Phi . \mathbf{r}_1$$

plyne

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{\Phi} . \mathbf{r}'_1 = \Phi^{-1} . \mathbf{r}'_1$$

čili vzhledem k rovnicím (187) a (56)

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{\Phi_3}(A_{11}x + A_{21}y + A_{31}z)\mathbf{i} + \frac{1}{\Phi_3}(A_{12}x + A_{22}y + A_{32})\mathbf{j}$$
$$+ \frac{1}{\Phi_3}(A_{13}x + A_{23}y + A_{33}z)\mathbf{k},$$

kde značí x y, z souřadnice koncového bodu vektoru $\mathbf{r}'_1$ a Φ_3 známý determinant (181).

Násobíme-li tuto rovnici skalárně stejnou rovnicí (zdvojmocníme-li ji), nabudeme

$$\Phi_3^2 \mathbf{r}_1 . \mathbf{r}_1 = (A_{11}x + A_{21}y + A_{31}z)^2 \mathbf{i} . \mathbf{i}$$
$$+ (A_{12}x + A_{22}y + A_{32}z)^2 \mathbf{j} . \mathbf{j} + (A_{13}x + A_{23}y + A_{33}z)^2 \mathbf{k} . \mathbf{k};$$

ostatní členy dvojmoci na pravé straně odpadnou, ježto dle (5) $\mathbf{i} . \mathbf{j} = \mathbf{j} . \mathbf{k} = \mathbf{k} . \mathbf{i} = 0$. Avšak dle týchž rovnic $\mathbf{i} . \mathbf{i} = \mathbf{j} . \mathbf{j} = \mathbf{k} . \mathbf{k}$ rovná se 1 a také $\mathbf{r}_1 . \mathbf{r}_1 = 1$; tudíž obdržíme rovnici hledané

*) Sluší tu poukázati na analogii mezi theorií dyadických mnohočlenů a theorií matric; dyadický mnohočlen lze totiž pokládati za matrici třetího řádu a naopak.

plochy ve tvaru:

$$(A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2)x^2 + (A_{21}^2 + A_{22}^2 + A_{23}^2)y^2 + (A_{31}^2 + A_{32}^2 + A_{33}^2)z^2 + 2(A_{11}A_{21} + A_{12}A_{22} + A_{13}A_{23})\,xy + 2(A_{11}A_{31} + A_{12}A_{32} + A_{13}A_{33})xz + 2(A_{21}A_{31} + A_{22}A_{32} + A_{23}A_{33})yz = \Phi_3^2. \qquad (192)$$

Plocha ta jest ellipsoid, jak již z toho vyplývá, že všechny vektory $\mathbf{r}'_1$ jsou konečné velikosti.

Mění-li tedy vektor $\mathbf{r}_1$ nepřetržitě svou polohu vycházeje stále z téhož počátku (při čemž tedy koncový bod jeho opisuje plochu kulovou o poloměru rovném jednotce), mění se také vektor $\mathbf{r}'_1$ nepřetržitě a koncový bod jeho leží na ellipsoidu.

K podobnému výsledku dospějeme, béřeme-li v úvahu vektory

$$\mathbf{r}''_1 = \mathbf{r}_1 . \Phi;$$

koncové body jejich opisují opět ellipsoid, jehož rovnici dle předešlého snadno stanovíme.

Mnohočlen Φ lze tedy obecně představiti dvěma ellipsoidy, jak jsme již poznali výše, když jsme pojednávali o geometrickém znázornění differenciálního poměru $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$.

Je-li mnohočlen dyadický ve zvláštním případě samosdružený, sjednocují se oba ellipsoidy v jediný.

Připojme k tomuto geom. znázornění dyadického mnohočlenu řešení úlohy: Ustanoviti vektory $\mathbf{x}$, jichž běhy se transformací $\Phi . \mathbf{x}$ nemění. Podmínečná rovnice jest tedy

$$\Phi . \mathbf{x} = x\mathbf{x}$$

čili, připojíme-li na pravé straně idemfaktor $\mathbf{I}$, též

$$(\Phi - x\mathbf{I}) . \mathbf{x} = 0. \qquad (\psi)$$

Z toho jde, že dyadický mnohočlen $\Phi - x\mathbf{I}$ nemůže býti mnohočlenem úplným, ježto takový mnohočlen neredukuje nikdy vektor (jehož délka se nerovná nulle) v nullu; může to býti jen mnohočlen planární, tvaru na př. $\mathbf{bo} + \mathbf{cp}$, který, je-li praefaktorem, annulluje vektor $\mathbf{x}$, kolmý k rovině zadních členů $\mathbf{o}$ a $\mathbf{p}$. Neboť pak

$$(\mathbf{bo} + \mathbf{cp}) . \mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{o} . \mathbf{x}) + \mathbf{c}(\mathbf{p} . \mathbf{x}) = 0.$$

Bylo však řečeno, že třetí skalár planárního mnohočlenu rovná se nulle, tudíž

$$(\Phi - x\mathbf{I})_3 = 0$$

čili, píšeme-li

$$\Phi = \begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, \end{matrix} \qquad \mathbf{I} = \begin{matrix} 1, & 0, & 0, \\ 0, & 1, & 0, \\ 0, & 0, & 1, \end{matrix}$$

též

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x \end{vmatrix} = 0.$$

Rovnici tu lze snadno přetvořiti ve

$$x^3 - x^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + x(a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}a_{32} - a_{31}a_{13} - a_{12}a_{21}) - (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}) = 0,$$

anebo přibližujíce k rovnicím (189), (190) a (181)

$$x^3 - \Phi_s x^2 + (\Phi_2)_s x - \Phi_3 = 0. \qquad (191^b)$$

Kořeny této rovnice, která má tvar rovnice Hamilton-Cayley-ovy, určeno jest x, načež rovnicí (ψ) dány jsou hledané vektory $\mathbf{x}$. Jest zřejmo, že obdržíme tři vektory, jež podržují týž běh, užijeme-li vzhledem k nim operatoru Φ; jsou to osy pošinutí deformace *).

Normální tvar dyadického mnohočlenu. V oddíle pojednávajícím o součinu dyadickém bylo ukázáno, že každý dyadický mnohočlen lze vyjádřiti trojčlenem

$$\Phi = \mathbf{il} + \mathbf{jm} + \mathbf{kn},$$

kde přední členy **i**, **j**, **k** jsou tři jednotkové vektory, jichž běhy stojí na sobě vzájemně kolmo. Témuž mnohočlenu lze však dáti také tvar

$$\Phi = \mathbf{oi} + \mathbf{pj} + \mathbf{qk},$$

kde zadní členy **i**, **j**, **k** tvoří soustavu jednotkových vektorů pravoúhelných. Přesvědčíme se o tom snadno, vyjádříme-li Φ

*) Viz Seydler »Theoretická mechanika«, § 54.

ve tvaru nonionu (13[a]) a vytkneme-li v prvním sloupci **i**, ve druhém **j** a ve třetím **k**; pak položíme $a_{11}\mathbf{i} + a_{21}\mathbf{j} + a_{31}\mathbf{k} = \mathbf{o}$ atd.

Poznáváme i tu výše uvedenou dvojznačnost dyadického mnohočlenu: tvaru **oi** + **pj** + **qk** přísluší jeden ellipsoid, který nazveme *prvním*, a tvaru **il** + **jm** + **kn** ellipsoid *druhý*.

Užijeme-li mnohočlenu Φ v obojím tvaru jako operátoru vzhledem k vektorům **i**, **j**, **k**, obdržíme pro první tvar **oi** + **pj** + **qk** (dle rovnic (20[a]) a (5))

$$\Phi . \mathbf{i} = \mathbf{o}, \quad \Phi . \mathbf{j} = \mathbf{p}, \quad \Phi . \mathbf{k} = \mathbf{q},$$

a pro druhý tvar **il** + **jm** + **kn** (dle rovnic (20[b]) a (5))

$$\mathbf{i} . \Phi = \mathbf{l}, \quad \mathbf{j} . \Phi = \mathbf{m}, \quad \mathbf{k} . \Phi = \mathbf{n},$$

čili

$$\Phi_C . \mathbf{i} = \mathbf{l}, \quad \Phi_C . \mathbf{j} = \mathbf{m}, \quad \Phi_C . \mathbf{k} = \mathbf{n},$$

značí-li Φ_C mnohočlen sdružený ku Φ.

Z analytické geometrie jest známo, že lineární transformací souřadnic plocha kulová přechází v ellipsoid, při čemž ze tří poloměrů koule, na sobě vzájemně kolmo stojících, vznikají tři sdružené poloměry ellipsoidu. Položme poloměr koule roven jednotce a označme **i**, **j**, **k** tři poloměry její, jež jsou na sobě vzájemně kolmo postaveny; i přetvoří se dle uvedené věty tyto poloměry transformací $\Phi . \mathbf{r}$ ve vektory **o**, **p**, **q**, jež jsou tedy sdruženými poloměry ellipsoidu prvního. Tytéž poloměry **i**, **j**, **k** přetvoří se pak transformací $\mathbf{r} . \Phi$, neb, což jest totéž, transformací $\Phi_C . \mathbf{r}$, ve vektory **l**, **m**, **n**, které jsou sdruženými poloměry ellipsoidu druhého.

Vyjádříme-li tudíž dyadický mnohočlen trojčlenem $\left\{ \begin{matrix} \mathbf{oi} + \mathbf{pj} + \mathbf{qk} \\ \mathbf{il} + \mathbf{jm} + \mathbf{kn} \end{matrix} \right\}$, tvoří $\left\{ \begin{matrix} \text{přední} \\ \text{zadní} \end{matrix} \right\}$ členy $\left\{ \begin{matrix} \mathbf{o}, & \mathbf{p}, & \mathbf{q} \\ \mathbf{l}, & \mathbf{m}, & \mathbf{n} \end{matrix} \right\}$ soustavu sdružených poloměrů v ellipsoidu $\left\{ \begin{matrix} \text{prvním} \\ \text{druhém} \end{matrix} \right\}$.

Z toho poznáváme také, že první (druhý) ellipsoid mnohočlenu Φ se sjednocuje s druhým (prvním) ellipsoidem sdruženého mnohočlenu Φ_C.

Mezi trojicemi sdružených poloměrů ellipsoidu jest jedna, jejíž poloměry na sobě vzájemně kolmo stojí; jsou to hlavní poloosy této plochy. Označme je v ellipsoidu prvním $a\mathbf{i}'$, $b\mathbf{j}'$, $c\mathbf{k}'$

($\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ jsou příslušné vektory jednotkové vzájemně na sobě kolmé, a, b, c jsou skaláry); je-li $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ soustava poloměrů plochy kulové, z nichž lineární transformací $\Phi . \mathbf{r}$ tyto hlavní osy vznikly, můžeme psáti za Φ výraz

$$\Phi = a\mathbf{i}'\mathbf{i} + b\mathbf{j}'\mathbf{j} + c\mathbf{k}'\mathbf{k}. \qquad (193^a)$$

Kdybychom zavedli hlavní osy $a'\mathbf{i}''$, $b'\mathbf{j}''$, $c'\mathbf{k}''$ druhého ellipsoidu, obdrželi bychom

$$\Phi = a'\mathbf{i}\mathbf{i}'' + b'\mathbf{j}\mathbf{j}'' + c'\mathbf{k}\mathbf{k}''. \qquad (193^b)$$

V obou případech vyjádřili jsme dyadický mnohočlen trojčleny, v nichž i trojice předních členů i trojice zadních členů jsou soustavy pravoúhelných vektorů. Takové tvary dyadických mnohočlenů nazýváme *normálními*.

Normální tvar dyadického mnohočlenu samosdruženého jest

$$\Phi = a\mathbf{i}\mathbf{i} + b\mathbf{j}\mathbf{j} + c\mathbf{k}\mathbf{k}. \qquad (194)$$

Neboť jen pak jest

$$\Phi . \mathbf{i} = \mathbf{i} . \Phi = \Phi_C . \mathbf{i}, \quad \Phi . \mathbf{j} = \mathbf{j} . \Phi = \Phi_C . \mathbf{j}, \quad \Phi . \mathbf{k} = \mathbf{k} . \Phi = \Phi_C . \mathbf{k},$$

tudíž také

$$\Phi . (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \Phi_C . (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

čili

$$\Phi . \mathbf{r} = \Phi_C . \mathbf{r},$$

z čehož plyne

$$\Phi = \Phi_C,$$

což jest podmínkou, aby dyadický mnohočlen byl samosdružený.

Mnohočlen planární vznikne, jak víme, jestliže v trojčlenu $\mathbf{o}\mathbf{i} + \mathbf{p}\mathbf{j} + \mathbf{q}\mathbf{k}$ přední členy $\mathbf{o}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ (nebo v trojčlenu $\mathbf{i}\mathbf{l} + \mathbf{j}\mathbf{m} + \mathbf{k}\mathbf{n}$ zadní členy $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$) jsou konplanární; tudíž v tom případě sdružené poloměry ellipsoidu prvního $\mathbf{o}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ mají ležeti v téže rovině (a podobně sdružené poloměry ellipsoidu druhého $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ v jiné rovině). To jest však jen tenkráte možno, degenerují-li jeden i druhý ellipsoid v část roviny omezenou ellipsou; pak totiž jedna hlavní osa každého z nich rovná se nulle a obě ostatní osy nalézají se v rovině příslušné ellipsy.

Podobnou úvahou shledáme, že pro mnohočlen lineární (nebo pro pouhou dyadu $\mathbf{u}\mathbf{v}$) oba příslušné ellipsoidy přecházejí v úsečky (ovšem různé). Neboť pak přední nebo zadní členy uvedených trojčlenů jsou kolineárné; tudíž sdružené poloměry každého ellipsoidu mají míti týž běh. I musí dvě hlavní osy této plochy rovnati se nulle a třetí osy spadati do příslušné přímky.

Některé zvláštní druhy mnohočlenů dyadických. V theoretické mechanice mají zvláštní důležitost některé mnohočleny dyadické, z nichž buďtež tuto uvedeny hlavně tyto dva druhy:

I. **Versory** slovou mnohočleny, jež jako operátory představují rotaci nepromënného útvaru geometrického.

Budiž $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ pravoúhelná soustava jednotkových vektorů (v pravo točivá); otočením přechází tato soustava v jinou $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ o témž počátku. Libovolný vektor

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

přijde tímto pohybem do polohy

$$\mathbf{r}' = x\mathbf{i}' + y\mathbf{j}' + z\mathbf{k}';$$

zaujímáť totiž v otočené soustavě $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ tutéž polohu jako v soustavě původní $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Souřadnice x, y, z, jež se tudíž rotací nezměnily, jsou délky průmětů vektoru $\mathbf{r}$ na osy, dané vektory $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$; lze je tudíž dle (3) vyjádřiti po řadě skalárními součiny $\mathbf{i}.\mathbf{r}$, $\mathbf{j}.\mathbf{r}$, $\mathbf{k}.\mathbf{r}$. Tím obdržíme

$$\mathbf{r}' = \mathbf{i}'(\mathbf{i}.\mathbf{r}) + \mathbf{j}'(\mathbf{j}.\mathbf{r}) + \mathbf{k}'(\mathbf{k}.\mathbf{r})$$

čili vzhledem k (20[a])

$$\mathbf{r}' = \mathbf{i}'\mathbf{i}.\mathbf{r} + \mathbf{j}'\mathbf{j}.\mathbf{r} + \mathbf{k}'\mathbf{k}.\mathbf{r} = (\mathbf{i}'\mathbf{i} + \mathbf{j}'\mathbf{j} + \mathbf{k}'\mathbf{k}).\mathbf{r}.$$

Dyadický mnohočlen, v závorce se vyskytující, nazýváme *versorem* a znamenáme jej

$$\Omega = \mathbf{i}'\mathbf{i} + \mathbf{j}'\mathbf{j} + \mathbf{k}'\mathbf{k}. \tag{195}$$

I bude dán otočený vektor $\mathbf{r}'$ vzorcem

$$\mathbf{r}' = \Omega.\mathbf{r};$$

i jest zřejmo, že versor Ω jako operátor způsobuje rotaci libovolného vektoru $\mathbf{r}$ a tudíž i celého nepromënného útvaru.

Tomuto dyadickému mnohočlenu lze dáti ještě jiný tvar. Předpokládejme nejprve, že osa rotace splývá s osou, danou vektorem $\mathbf{i}$; otočení pak děj se o úhel α (ve směru kladném). Pak se patrně vektory

i, **j**, **k** změní ve vektory **i**′, **j**′, **k**′, dané rovnicemi

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i},$$
$$\mathbf{j}' = \cos\alpha\,\mathbf{j} + \sin\alpha\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{k}' = -\sin\alpha\,\mathbf{j} + \cos\alpha\,\mathbf{k}.$$

Neboť jednotkový vektor **j** otočený o úhel α lze rozložiti ve dva sčítance ve směrech vektorů **j** a **k**, z nichž jeden má délku $\cos\alpha$ a druhý $\sin\alpha$.

Vložíme-li tyto hodnoty do rovnice

$$\mathbf{r}' = \mathbf{i}'(\mathbf{i}\,.\,\mathbf{r}) + \mathbf{j}'(\mathbf{j}\,.\,\mathbf{r}) + \mathbf{k}'(\mathbf{k}\,.\,\mathbf{r}),$$

obdržíme

$$\mathbf{r}' = \mathbf{i}(\mathbf{i}\,.\,\mathbf{r}) + \cos\alpha\,\mathbf{j}(\mathbf{j}\,.\,\mathbf{r}) + \cos\alpha\,\mathbf{k}(\mathbf{k}\,.\,\mathbf{r}) - \sin\alpha\,\mathbf{j}(\mathbf{k}\,.\,\mathbf{r}) + \sin\alpha\,\mathbf{k}(\mathbf{j}\,.\,\mathbf{r})$$

čili dle (20^a)

$$\mathbf{r}' = \mathbf{ii}\,.\,\mathbf{r} + \cos\alpha\,\mathbf{jj}\,.\,\mathbf{r} + \cos\alpha\,\mathbf{kk}\,.\,\mathbf{r} - \sin\alpha\,\mathbf{jk}\,.\,\mathbf{r} + \sin\alpha\,\mathbf{kj}\,.\,\mathbf{r},$$

z kteréž rovnice plyne vzhledem k $\mathbf{r}' = \Omega\,.\,\mathbf{r}$ vzorec

$$\Omega = \mathbf{ii} + \cos\alpha\,(\mathbf{jj} + \mathbf{kk}) + \sin\alpha\,(\mathbf{kj} - \mathbf{jk}). \qquad (196^a)$$

Výraz na pravé straně lze přetvořiti ještě takto: Ježto idemfaktor

$$\mathbf{I} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}, \text{ jest } \mathbf{jj} + \mathbf{kk} = \mathbf{I} - \mathbf{ii};$$

zaveďme dále

$$\mathbf{I} \times \mathbf{i} = \mathbf{ii} \times \mathbf{i} + \mathbf{jj} \times \mathbf{i} + \mathbf{kk} \times \mathbf{i},$$

což lze dle (22^a) psáti

$$\mathbf{I} \times \mathbf{i} = \mathbf{i}\,[\mathbf{i} \times \mathbf{i}] + \mathbf{j}\,[\mathbf{j} \times \mathbf{i}] + \mathbf{k}\,[\mathbf{k} \times \mathbf{i}] = -\mathbf{jk} + \mathbf{kj}$$

majíce zřetel k rovnicím (10). Pročež obdržíme

$$\Omega = \mathbf{ii} + \cos\alpha\,(\mathbf{I} - \mathbf{ii}) + \sin\alpha\,[\mathbf{I} \times \mathbf{i}] \qquad (196^b)$$

Má-li osa rotace libovolnou polohu, danou jednotkovým vektorem $\mathbf{a}_1$ (místo vektorem **i**), má příslušný versor tvar

$$\Omega = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \cos\alpha\,(\mathbf{I} - \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1) + \sin\alpha\,[\mathbf{I} \times \mathbf{a}_1]. \qquad (196^c)$$

Neboť kterýkoli vektor **r** lze rozložiti ve dva sčítance, jeden $a\mathbf{a}_1$ jest rovnoběžný s osou otáčení a druhý $b\mathbf{b}_1$ leží v rovině kolmé k této ose ($\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{b}_1$). Je-li tedy

$$\mathbf{r} = a\mathbf{a}_1 + b\mathbf{b}_1,$$

jest především

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 \cdot (a\mathbf{a}_1 + b\mathbf{b}_1) = a\mathbf{a}_1 (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1) + b\mathbf{a}_1 (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1);$$

poněvadž v tomto případě $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1$, $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = 0$, obdržíme

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{r} = a\mathbf{a}_1.$$

Dále jest

$$[\mathbf{I} \times \mathbf{a}_1] \cdot \mathbf{r} = [\mathbf{I} \times \mathbf{a}_1] \cdot (a\mathbf{a}_1 + b\mathbf{b}_1)$$
$$= a [\mathbf{I} \times \mathbf{a}_1] \cdot \mathbf{a}_1 + b [\mathbf{I} \times \mathbf{a}_1] \cdot \mathbf{b}_1;$$

ale z rovnice (159^a) vychází

$$[\mathbf{I} \times \mathbf{a}_1] \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{I} \cdot [\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_1] = 0$$

(jelikož $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_1 = 0$,) kdežto

$$[\mathbf{I} \times \mathbf{a}_1] \cdot \mathbf{b}_1 = \mathbf{I} \cdot [\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1] = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1.$$

Dle definice vektoriálního součinu (7) rovná se $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1$ vektoru jednotkovému $\mathbf{c}_1$, který stojí kolmo na rovině určené osou $\mathbf{a}_1$ a průmětem vektoru $\mathbf{r}$ na rovinu kolmou k této ose ($\mathbf{c}_1 \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{c}_1 \perp \mathbf{b}_1$), tudíž

$$[\mathbf{I} \times \mathbf{a}_1] \cdot \mathbf{r} = b\mathbf{c}_1$$

a

$$\Omega \cdot \mathbf{r} = a\mathbf{a}_1 + \cos\alpha\, (\mathbf{r} - a\mathbf{a}_1) + b \sin\alpha\, \mathbf{c}_1,$$

poněvadž $\mathbf{I} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r}$. Avšak $\mathbf{r} - a\mathbf{a}_1 = b\mathbf{b}_1$, pročež

$$\Omega \cdot \mathbf{r} = a\mathbf{a}_1 + b \cos\alpha\, \mathbf{b}_1 + b \sin\alpha\, \mathbf{c}_1.$$

Snadno se přesvědčíme, že $b \cos\alpha\, \mathbf{b}_1 + b \sin\alpha\, \mathbf{c}_1$ představuje složku $b\mathbf{b}_1$ vektoru $\mathbf{r}$, otočenou o úhel α; označíme li ji v té poloze $b\mathbf{b}'_1$, jest

$$\Omega \cdot \mathbf{r} = a\mathbf{a}_1 + b\mathbf{b}'_1.$$

Z toho poznáváme, že $\Omega \cdot \mathbf{r}$ jest otočený vektor $\mathbf{r}$ kolem osy $\mathbf{a}_1$ o týž úhel α; způsobuje tedy versor Ω skutečně rotaci neproměnného útvaru.

Ve zvláštním případě může $\sphericalangle\, \alpha = 90^0$; příslušný versor má pak tvar $\Omega = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{I} \times \mathbf{a}_1$ a slove *kvadrantálním versorem*. Je-li $\sphericalangle\, \alpha = 180^0$, jest $\Omega = 2\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 - \mathbf{I}$, kterýžto versor nazývá se *bikvadrantálním*.

Vyšetřme ještě, jaký význam mají skalární část Ω_s a vektoriální část Ω_v versoru Ω. Abychom ustanovili Ω_s, pišme Ω ve tvaru

$$\Omega = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \cos\alpha\, (\mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk} - \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1)$$
$$+ \sin\alpha\, [(\mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}) \times \mathbf{a}_1]$$

čili dle (22ª)

$$\Omega = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \cos\alpha\,(\mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk} - \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1) + \sin\alpha\,(\mathbf{i}\,[\mathbf{i}\times\mathbf{a}_1] + \mathbf{j}\,[\mathbf{j}\times\mathbf{a}_1] + \mathbf{k}\,[\mathbf{k}\times\mathbf{a}_1]); \qquad (\omega)$$

tudíž jest skalární část

$$\Omega_s = \mathbf{a}_1 \,.\, \mathbf{a}_1 + \cos\alpha\,(\mathbf{i}\,.\,\mathbf{i} + \mathbf{j}\,.\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\,.\,\mathbf{k} - \mathbf{a}_1\,.\,\mathbf{a}_1) + \sin\alpha\,(\mathbf{i}\,.\,[\mathbf{i}\times\mathbf{a}_1] + \mathbf{j}\,.\,[\mathbf{j}\times\mathbf{a}_1] + \mathbf{k}\,.\,[\mathbf{k}\times\mathbf{a}_1]).$$

Poněvadž $\mathbf{i}\,.\,\mathbf{i} = \mathbf{j}\,.\,\mathbf{j} = \mathbf{k}\,.\,\mathbf{k} = 1$ a též $\mathbf{a}_1\,.\,\mathbf{a}_1 = 1$, dále dle (14)

$\mathbf{i}\,.\,[\mathbf{i}\times\mathbf{a}_1] = [\mathbf{i}\times\mathbf{i}]\,.\,\mathbf{a}_1 = 0$ atd., obdržíme

$$\Omega_s = 1 + 2\cos\alpha. \qquad (197^a)$$

Jest tudíž skalární částí versoru určen úhel rotace; pro úhel ten platí vzorec

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{2}\,(\Omega_s - 1). \qquad (197^b)$$

Pro vektoriální část Ω_v vychazí z rovnice (ω)

$$\Omega_v = \mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_1 + \cos\alpha\,(\mathbf{i}\times\mathbf{i} + \mathbf{j}\times\mathbf{j} + \mathbf{k}\times\mathbf{k} - \mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_1) + \sin\alpha\,(\mathbf{i}\times[\mathbf{i}\times\mathbf{a}_1] + \mathbf{j}\times[\mathbf{j}\times\mathbf{a}_1] + \mathbf{k}\times[\mathbf{k}\times\mathbf{a}_1]);$$

v tomto výraze $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0$, též $\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_1 = 0$, dále dle (16ᵇ)

$$\mathbf{i}\times[\mathbf{i}\times\mathbf{a}_1] = (\mathbf{i}\,.\,\mathbf{a}_1)\,\mathbf{i} - (\mathbf{i}\,.\,\mathbf{i})\,\mathbf{a}_1$$

čili dle definice skalárního součinu (2)

$$\mathbf{i}\times[\mathbf{i}\times\mathbf{a}_1] = \mathbf{i}\cos\widehat{\mathbf{a}_1\mathbf{i}} - \mathbf{a}_1 \text{ atd.}$$

Pročež

$$\Omega_v = \sin\alpha\,(\mathbf{i}\cos\widehat{\mathbf{a}_1\mathbf{i}} + \mathbf{j}\cos\widehat{\mathbf{a}_1\mathbf{j}} + \mathbf{k}\cos\widehat{\mathbf{a}_1\mathbf{k}} - 3\mathbf{a}_1)$$

anebo, poněvadž $\mathbf{i}\cos\widehat{\mathbf{a}_1\mathbf{i}} + \mathbf{j}\cos\widehat{\mathbf{a}_1\mathbf{j}} + \mathbf{k}\cos\widehat{\mathbf{a}_1\mathbf{k}} = \mathbf{a}_1$, konečně

$$\Omega_v = -2\sin\alpha\;\mathbf{a}_1. \qquad (198)$$

Jednotkový vektor $\mathbf{a}_1$ určující osu rotace dán jest tudíž vektoriální částí versoru; běh jeho jest protivný k běhu vektoru Ω_v.

Pro úhel rotace α vyvodíme ještě jiný výraz, použijeme-li známého vzorce trigonometrického.

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Ze vzorce (198) plyne

$$\Omega_v \,.\, \Omega_v = 4\, sin^2\alpha\; \mathfrak{a}_1 \,.\, \mathfrak{a}_1 = 4\, sin^2\alpha,$$

odkud

$$2\, sin\, \alpha = \sqrt{\Omega_v \,.\, \Omega_v}\,;$$

substitucí této hodnoty, jakož i hodnoty (197[b]) pro $cos\, \alpha$ nabudeme

$$tg\, \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\Omega_v \,.\, \Omega_v}}{1 + \Omega_s}\,. \tag{199}$$

I může býti každá rotace útvaru o úhel α představena vektorem $\mathfrak{q}$ majícím běh osy rotace, jehož velikost jest

$$q = \sqrt{\mathfrak{q} \,.\, \mathfrak{q}} = tg\, \frac{\alpha}{2},$$

Pak bude

$$\mathfrak{q} \,.\, \mathfrak{q} = tg^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\Omega_v \,.\, \Omega_v}{(1 + \Omega_s)^2},$$

z čehož plyne

$$\mathfrak{q} = \frac{\Omega_v}{1 + \Omega_s}\,.$$

Tento vektor stanoví versor Ω úplně.

Jest vlastností versoru, že jeho mnohočlen sdružený rovná se mnohočlenu reciprokálnímu. Je-li totiž

$$\Omega = \mathfrak{i}'\mathfrak{i} + \mathfrak{j}'\mathfrak{j} + \mathfrak{k}'\mathfrak{k},$$

jest

$$\Omega_C = \mathfrak{i}\mathfrak{i}' + \mathfrak{j}\mathfrak{j}' + \mathfrak{k}\mathfrak{k}'$$

a skalární součin $\Omega \,.\, \Omega_C$ rovná se idemfaktoru, jak se přesvědčíme znásobením obou těchto trojčlenů, používajíce vzorce (153).

Z toho vyplývá vzhledem k (167)

$$\Omega_C = \Omega^{-1}.$$

Tudíž pro druhý symmetrický mnohočlen versoru dostaneme

$$\{\Omega\}^2 = \Omega \,.\, \Omega_C = \mathrm{I}.$$

Konečně hodnota třetího skaláru versoru jest 1, jsouť totiž ve výraze

$$\Omega_3 = [\mathbf{i}'\mathbf{j}'\mathbf{k}'] [\mathbf{ijk}]$$

oba činitelé $[\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}]$ i $[\mathbf{ijk}]$ rovny jednotce*).

II. **Tensory.** Zvláště jednoduchou deformací stejnorodou jest, jak známo, deformace prostá**). Deformace ta představena jest dyadickým mnohočlenem samosdruženým (viz vzorec (185))

$$\Theta = a\mathbf{ii} + b\mathbf{jj} + c\mathbf{kk}, \tag{201}$$

který slove *pravým tensorem.*

Je-li vektor $\mathbf{r}$ rovnoběžný s osou, danou jednotkovým vektorem $\mathbf{i}$, tedy $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$, jest

$$\Theta \,.\, \mathbf{r} = ax\,\mathbf{ii}\,.\,\mathbf{i} + bx\,\mathbf{jj}\,.\,\mathbf{i} + cx\,\mathbf{kk}\,.\,\mathbf{r}$$

čili vzhledem k (20ª) a (5)

$$\Theta \,.\, \mathbf{r} = ax\mathbf{i} = a\mathbf{r};$$

tudíž vektor $\mathbf{r}$ nezmění svého běhu, ale délka jeho zvětší se v poměru $a : 1$. Podobných změn doznávají vektory rovnoběžné s $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$.

Pročež vektor $\mathbf{r}$ v obecné poloze transformuje se pravým tensorem tak, že složky jeho, rovnoběžné ke třem k sobě kolmým vektorům $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$, zvětší se v poměrech $a : 1$, $b : 1$, $c : 1$.

Jednotlivými vektory $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ dány jsou hlavní osy deformace, jež jsou zároveň osami pošinutí (přímkami, jichž směr se deformací nemění).

Je-li ve zvláštním případě ve vzorci (201) $a = b = c$, pak $\Theta' = a\,(\mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}) = a\mathbf{I}$. Tímto operátorem složky každého

*) Obecnější mnohočlen dyadický než versor (píšeme-li jej ve tvaru (196ª) jest

$$\Gamma = \mathbf{aa}^{-1} + \cos\alpha\,(\mathbf{bb}^{-1} + \mathbf{cc}^{-1}) + \sin\alpha\,(\mathbf{cb}^{-1} - \mathbf{bc}^{-1}), \tag{200}$$

kde $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ a $\mathbf{a}^{-1}$, $\mathbf{b}^{-1}$, $\mathbf{c}^{-1}$ jsou dvě soustavy vektorů reciprokálních. Mnohočlen takový zoveme *cyklickým*. Jako operátor způsobuje pohyb geom. útvaru, který můžeme nazvati elliptickým. Pohyb ten podobá se pohybu rotačnímu s tím rozdílem, že jednotlivé body útvaru probíhají ellipsy místo kružnic. Viz Gibbs-Wilson »Vector Analysis« pag. 349.

**) Seydler »Theoretická mechanika« pag. 180.

vektoru **r** zvětší se v týchž poměrech; tudíž běhy všech vektorů **r** se nemění a délka každého zvětší se v poměru $a : 1$. Deformace ta slove *expansí* čili *roztažením* prostorového útvaru.

Mějme mnohočlen dyadický vyjádřený ve tvaru normálním

$$\Phi = a\,\mathbf{i}\,\mathbf{i} \times b\,\mathbf{j}'\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}'\mathbf{k};$$

za tento tvar lze také psáti buď

$$\Phi = (\mathbf{i}'\mathbf{i} + \mathbf{j}'\mathbf{j} + \mathbf{k}'\mathbf{k}) \cdot (a\,\mathbf{i}\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}\mathbf{k})$$

aneb

$$\Phi = (a\,\mathbf{i}'\mathbf{i}' + b\,\mathbf{j}'\mathbf{j}' + c\,\mathbf{k}'\mathbf{k}') \cdot (\mathbf{i}\,\mathbf{i} + \mathbf{j}'\mathbf{j} + \mathbf{k}'\mathbf{k}),$$

jak se přesvědčíme, provedeme-li skalární násobení a použijeme-li rovnic (20^a) a (5).

Trojčlen $\mathbf{i}'\mathbf{i} + \mathbf{j}'\mathbf{j} + \mathbf{k}'\mathbf{k}$ v obou těchto výrazech jest versor, trojčlen $a\,\mathbf{i}\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}\mathbf{k}$ aneb $a\,\mathbf{i}'\mathbf{i}' + b\,\mathbf{j}'\mathbf{j}' + c\,\mathbf{k}'\mathbf{k}'$ jest pravý tensor; tudíž lze vysloviti větu:

Dyadický mnohočlen lze vyjádřiti skalárním součinem versoru a pravého tensoru (v tomto nebo v obráceném pořádku).

V theoretické mechanice zní tato věta takto:

Deformaci stejnorodou můžeme si mysliti složenou z deformace prosté a z pohybu otáčecího, při čemž pořádek těchto pohybů jest libovolný*).

Pole dyadické. Část prostoru, v níž každému bodu přísluší určitý dyadický mnohočlen, který se mění nepřetržitě, postupujeme-li spojitě od jednoho bodu ke druhému, slove *polem dyadickým*.

---

*) Obecnější mnohočleny než pravý tensor jsou: mnohočlen *tonický* tvaru

$$\Theta = a\,\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1} + b\,\mathbf{b}\mathbf{b}^{-1} + c\,\mathbf{c}\mathbf{c}^{-1} \tag{202}$$

a mnohočlen *cyklotonický*

$$\Gamma_\vartheta = a\,\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1} + p\cos\alpha\,(\mathbf{b}\mathbf{b}^{-1} + \mathbf{c}\mathbf{c}^{-1}) + p\sin\alpha\,(\mathbf{c}\mathbf{b}^{-1} - \mathbf{b}\mathbf{c}^{-1}). \tag{203}$$

První z nich mění jako operátor všechny vektory **r** tak, že složky jejich, mající běh tří libovolných vektorů **a**, **b**, **c** (jež ovšem nejsou komplanární), podržují tyto směry, ale prodlužují se v poměrech $a : 1$, $b : 1$, $c : 1$.

Mnohočlen cyklotonický lze psáti ve tvaru

$$\Gamma_\vartheta = (a\,\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1} + \mathbf{b}\mathbf{b}^{-1} + \mathbf{c}\mathbf{c}^{-1}) \cdot (\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1} + p\,\mathbf{b}\mathbf{b}^{-1} + p\,\mathbf{c}\mathbf{c}^{-1}) \cdot \left\{\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1} + \cos\alpha\,(\mathbf{b}\mathbf{b}^{-1} + \mathbf{c}\mathbf{c}^{-1}) + \sin\alpha\,(\mathbf{c}\mathbf{b}^{-1} - \mathbf{b}\mathbf{c}^{-1})\right\},$$

jak se přesvědčíme, provedeme-li naznačené násobení. První činitel nemění

Příklady takových polí jsou: rozvržení pružných deformací v prostředí libovolně se pohybujícím, rozvržení dielektrických vlastností v prostředí nestejnorodém, jako na př. v krystalu nestejnoměrně zahřátém atd.

Pišme obdobně k vektoru

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z$$

dyadický mnohočlen Φ ve tvaru

$$\Phi = \mathbf{v}_1\mathbf{i} + \mathbf{v}_2\mathbf{j} + \mathbf{v}_3\mathbf{k} = \Phi_x + \Phi_y + \Phi_z \qquad (m)$$

(kde však $\mathbf{v}_1$ není nyní vektor jednotkový); aby tedy pole dyadické bylo určeno, musíme v každém bodě jeho znáti tři vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. Poněvadž lze pokládati tyto tři vektory za sdružené poloměry ellipsoidu, stanovíme pole dyadické také tím způsobem, že v každém bodě jeho myslíme si sestrojený určitý ellipsoid (první).

Týž dyadický mnohočlen můžeme psáti ve tvaru

$$\Phi = \mathbf{i}\mathbf{u}_1 + \mathbf{j}\mathbf{u}_2 + \mathbf{k}\mathbf{u}_3; \qquad (n)$$

tudíž příslušné pole dyadické stanoviti lze také jinými třemi vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, z každého bodu jeho vycházejícími, anebo soustavou druhých ellipsoidů, jichž sdružené poloměry jsou tyto tři vektory.

Pole dyadické, příslušející reciprokálnímu mnohočlenu Φ_C, dáno jest týmiž dvěma soustavami ellipsoidu, jenom že druhé ellipsoidy pole původního stávají se v poli reciprokálním ellipsoidy prvními a naopak.

---

vektorů rovnoběžných k **b** a **c**, ale prodlužuje vektory rovnoběžné k **a** v poměru $a:1$. Druhý činitel nemění vektorů rovnoběžných k **a**, ale zvětšuje všechny vektory ležící v rovině **b** a **c** v poměru $p:1$. Třetí činitel způsobuje pohyb eliptický; vektory rovnoběžné k **a** se nemění, ale koncové body vektorů položených v rovině **b** a **c** pohybují se po ellipsách.

Lze ukázati, že má-li rovnice Hamilton-Cayley-ova

$$x^3 - x^2\,\Phi_s + x(\Phi_2)_s - \Phi_3 = 0$$

tři kořeny reální, může býti příslušný dyadický mnohočlen Φ převeden na tvar tonický; má-li rovnice ta jeden kořen reální, může býti Φ převeden na tvar cyklotonický. Viz Gibbs-Wilson »Vector analysis« str. 356 a násl.

Jedno pole dyadické jsme již poznali v oddíle pojednávajícím o poli vektorovém; jest to pole úplných differenciálních poměrů proměnlivého vektoru **v** dle **r**. Příslušný dyadický mnohočlen má tvar nonionu, daného vzorcem (69).

Differenciální poměr mnohočlenu Φ dle skaláru t dán jest výrazem

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{d\mathbf{v}_1}{dt}\,\mathbf{i}+\frac{d\mathbf{v}_2}{dt}\,\mathbf{j}+\frac{d\mathbf{v}_3}{dt}\,\mathbf{k}\,; \tag{205a}$$

tudíž tento differenciální poměr jest opět dyadickým mnohočlenem.

Jiný výraz pro $\frac{d\Phi}{dt}$ jest

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}\,; \tag{205b}$$

oba tyto vzorce jsou obdobou vzorců (57) a (58) pro differenciální poměr vektoru **v** dle skaláru *t*.

Redukuje-li se ve zvláštním případě dyadický mnohočlen Φ na jednoduchou dyadu **uv**, obdržíme

$$\frac{d\mathbf{uv}}{dt}=\frac{d\mathbf{u}}{dt}\,\mathbf{v}+\mathbf{u}\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}, \tag{206}$$

aneb, nahradíme-li v součinu **uv** vektor **v** výrazem $v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}+v_z\mathbf{k}$, tudíž

$$\mathbf{uv}=v_x\mathbf{ui}+v_y\mathbf{uj}+v_z\mathbf{uk},$$

dle (205a) též

$$\frac{d\mathbf{uv}}{dt}=\frac{d(v_x\mathbf{u})}{dt}\,\mathbf{i}+\frac{d(v_y\mathbf{u})}{dt}\,\mathbf{j}+\frac{d(v_z\mathbf{u})}{dt}\,\mathbf{k}. \tag{207}$$

Differenciální poměr mnohočlenu Φ dle vektoru **r**. Jest třeba rozeznávati dva takové úplné differenciální poměry, jež pokládáme za sdružené. První definujeme součinem $d\Phi\,\frac{1}{d\mathbf{r}}$ a označujeme jej $\frac{d\Phi}{d\mathbf{r}}$, aneb, použijeme-li opět Hamiltonova symbolu, též $\nabla\,\Phi$; jeho sdružený differenciální poměr jest dán vzorcem

$$\left(\frac{d\Phi}{d\mathbf{r}}\right)_C=\nabla_C\Phi=\frac{1}{d\mathbf{r}}\,d\Phi.$$

Vedle těchto úplných differenciálních poměrů zavádíme také částečné differenciální poměry, pro něž platí základní vzorec, analogický k (59[a]), totiž

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}} = \frac{d\Phi}{ds}\,\mathbf{s}_1\,. \tag{208}$$

Vzhledem k rovnici (m) obdržíme především

$$\frac{d\Phi}{d\mathbf{r}} = \nabla\,\Phi = \frac{d\Phi_x}{d\mathbf{r}} + \frac{d\Phi_y}{d\mathbf{r}} + \frac{d\Phi_z}{d\mathbf{r}} \tag{209^a}$$

a pro sdružený differenciální poměr

$$\left(\frac{d\Phi}{d\mathbf{r}}\right)_c = \nabla_c\Phi = \left(\frac{d\Phi_x}{d\mathbf{r}}\right)_c + \left(\frac{d\Phi_y}{d\mathbf{r}}\right)_c + \left(\frac{d\Phi_z}{d\mathbf{r}}\right)_c, \tag{209^b}$$

jež jsou obdobné k rovnicím (68[a]) a (68[b]).

Kladouce $\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$ můžeme též psáti

$$\nabla\,\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} \tag{210^a}$$

a

$$\nabla_c\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}\right)_c + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{y}}\right)_c + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}}\right)_c, \tag{210^b}$$

z nichž první rovnice jest obdobou rovnice (63[c]).

Konečně třetí výrazy pro differenciální poměry mnohočlenu Φ, analogické k (63[b]) a (65), dostaneme, vložíme-li do (210[a]) za $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{y}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}}$ hodnoty, plynoucí ze vzorce (208); i bude

$$\nabla\,\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\mathbf{k} \tag{211^a}$$

a

$$\nabla_c\Phi = \mathbf{i}\,\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{211^b}$$

Ježto dle (205[a])

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x}\,\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial x}\,\mathbf{k} \text{ atd.,}$$

jest též

$$\begin{aligned}\nabla \Phi = \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x}\mathbf{ii} + \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial y}\mathbf{ij} + \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial z}\mathbf{ik} \\ + \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x}\mathbf{ji} + \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial y}\mathbf{jj} + \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial z}\mathbf{jk} \\ + \frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial x}\mathbf{ki} + \frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial y}\mathbf{kj} + \frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial z}\mathbf{kk},\end{aligned} \tag{212}$$

a podobný výraz obdržíme pro $\nabla_C \Phi$.

Že differenciální poměr mnohočlenu Φ dle $\mathbf{r}$ jest triadickým mnohočlenem, jest z těchto hodnot jeho bezprostředně zřejmo. Tudíž tvořením differenciálních poměrů dyadických mnohočlenů přecházíme (podobně jako u vektorů) k vyšším útvarům vektorové analyse.

Jako pro pole vektorové jsou důležity skalární a vektoriální část differenciálního poměru vektoru $\mathbf{v}$ dle $\mathbf{r}$, tak i pro pole dyadické sluší zvláště vytknouti skalární a vektoriální část differenciálního poměru mnohočlenu Φ dle $\mathbf{r}$. Pro první z nich, kterou označíme $\frac{d \,.\, \Phi}{d\mathbf{r}}$ čili $\nabla \,.\, \Phi$ plyne ze vzorce (211ª) výraz

$$\nabla \,.\, \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \,.\, \mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \,.\, \mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \,.\, \mathbf{k}, \tag{213ª}$$

pro druhou z téhož vzorce

$$\frac{d \times \Phi}{d\mathbf{r}} = \nabla \times \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \times \mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \times \mathbf{k}. \tag{214ª}$$

Poznáváme vzhledem k (20ª), že $\nabla \,.\, \Phi$ jest vektorem a vzhledem k (22ª), že $\nabla \times \Phi$ jest dyadickým mnohočlenem.

Vložíme-li do vzorce (213ª) hodnoty

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial x}\mathbf{k} \text{ atd.},$$

obdržíme přihlížejíce k rovnicím (20ª) a (5)

$$\nabla \,.\, \Phi = \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial z}. \tag{213ᵇ}$$

Touž substitucí do (214ª) zjednáme si majíce zření k rovnicím (22ª) a (10)

$$\begin{aligned}\nabla \times \Phi = \left(\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} \\ + \left(\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x}\right)\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{214ᵇ}$$

Podobnost těchto vzorců s obdobnými vzorci (78[b]) a (79[a]) pro $\nabla \cdot \mathbf{r}$ a $\nabla \times \mathbf{r}$ jest zřejmá *).

Jest se zmíniti ještě o skalárních součinech $\frac{d\Phi}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1$ a $\mathbf{s}_1 \cdot \frac{d\Phi}{d\mathbf{r}}$, jež jsou analogické součinům $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1$ a $\mathbf{s}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$. Především jest

$$\frac{d\Phi}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_1 \cdot \left(\frac{d\Phi}{d\mathbf{r}}\right)_c . \tag{215}$$

Součin $\frac{d\Phi}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1$ vyjádříme dle (211[a]) takto

$$\frac{d\Phi}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, \mathbf{i} \cdot \mathbf{s}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, \mathbf{j} \cdot \mathbf{s}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\, \mathbf{k} \cdot \mathbf{s}_1 ;$$

položme nyní obdobně ke vzorci (20[a]) za součin jakékoli triady **abc** s vektorem **r** dyadu **ab** (**c** . **r**), pak obdržíme

$$\frac{d\Phi}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial z} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{s}_1) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{s}_1) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}_1).$$

Dle vzorce (4) značí $\mathbf{i} \cdot \mathbf{s}_1$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{s}_1$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}_1$ cosiny úhlů, jež tvoří běh jednotkového vektoru $\mathbf{s}_1$ s osami souřadnými; za tyto cosiny lze též klásti po řadě hodnoty

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds},$$

pročež

$$\frac{d\Phi}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{dz}{ds},$$

čili vzhledem k (205[b])

$$\frac{d\Phi}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1 = \frac{d\Phi}{ds}, \tag{216}$$

analogický vzorec ke vzorci (70) pro $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1$.

---

*) Také částečné differenciální poměry vektorů i dyadických mnohočlenů $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}$ a $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}}$ mají své části skalární $\frac{\partial \cdot \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}$, $\frac{\partial \cdot \Phi}{\partial \mathbf{r}}$ a vektoriální $\frac{\partial \times \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}$, $\frac{\partial \times \Phi}{\partial \mathbf{r}}$; mnohé vzorce o nich uvádí V. Fischer ve své »Vektordifferentiation und Vektorintegration« na str. 14, 17, 42 a j.

Ve zvláštním případě může se dyadický mnohočlen redukovati na pouhou dyadu $\mathbf{uv}$; pro tu platí

$$\frac{d(\mathbf{uv})}{d\mathbf{r}} = \nabla(\mathbf{uv}) = (\mathbf{u}\,d\mathbf{v} + (d\mathbf{u})\,\mathbf{v})\frac{1}{d\mathbf{r}} = \mathbf{u}\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} + \frac{(d\mathbf{u})\,\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}, \quad (217)$$

kde jest třeba objasniti význam posledního členu na pravé straně této rovnice.

Dle (211^a) jest také

$$\frac{d(\mathbf{uv})}{d\mathbf{r}} = \frac{\partial(\mathbf{uv})}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial(\mathbf{uv})}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial(\mathbf{uv})}{\partial z}\mathbf{k}$$

čili, poněvadž

$$\frac{\partial(\mathbf{uv})}{\partial x} = \mathbf{u}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\mathbf{v} \text{ atd.},$$

též

$$\frac{d(\mathbf{uv})}{d\mathbf{r}} = \mathbf{u}\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}\mathbf{k}\right) + \left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\mathbf{vi} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y}\mathbf{vj} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}\mathbf{vk}\right).$$

Srovnáme-li tuto rovnici s rovnicí (217), při čemž použijeme rovnice (63^b), totiž

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}\mathbf{k},$$

nabudeme

$$\frac{(d\mathbf{u})\,\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\mathbf{vi} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y}\mathbf{vj} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}\mathbf{vk}. \quad (218)$$

Pro skalární a vektoriální část differenciálního poměru $\frac{d(\mathbf{uv})}{d\mathbf{r}}$ obdržíme snadno vzorce

$$\frac{d\,.\,(\mathbf{uv})}{d\mathbf{r}} = \nabla\,.\,(\mathbf{ur}) = \mathbf{u}\frac{d\,.\,\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}\,.\,\mathbf{v} \quad (219^a)$$

$$= \mathbf{u}\,(\nabla\,.\,\mathbf{v}) + (\nabla\mathbf{u})\,.\,\mathbf{v}$$

$$\frac{d\times(\mathbf{uv})}{d\mathbf{r}} = \nabla\times(\mathbf{ur}) = \mathbf{u}\frac{d\times\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}\times\mathbf{v} \quad (219^b)$$

$$= \mathbf{u}\,(\nabla\times\mathbf{v}) + (\nabla\mathbf{u})\times\mathbf{v}.$$

Částečný differenciální poměr dyady dle vektoru dán jest pak vzhledem k (208) výrazem

$$\frac{\partial(\mathbf{uv})}{\partial\mathbf{r}} = \frac{d(\mathbf{uv})}{dr}\mathbf{r}_1 = \mathbf{u}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{r}} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial r}\mathbf{vr}_1. \quad (220)$$

Je-li jeden z činitelů, na př. $\mathbf{u}$, stálým, jest patrně $d\mathbf{u} = 0$; tudíž vychází z (217)

$$\frac{d(\mathbf{uv})}{d\mathbf{r}} = \mathbf{u}\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}},$$

a podobně pro stálé $\mathbf{v}$

$$\frac{d(\mathbf{uv})}{d\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}\,\mathbf{v}.$$

Na základě této rovnice dostaneme differenciací výrazu

$$\Phi = \mathbf{v}_1\mathbf{i} + \mathbf{v}_2\mathbf{j} + \mathbf{v}_3\mathbf{k}$$

pro úplný differenciální poměr dyadického mnohočlenu dle vektoru ještě hodnotu

$$\frac{d\Phi}{d\mathbf{r}} = \nabla\,\Phi = \frac{d\mathbf{v}_1}{d\mathbf{r}}\,\mathbf{i} + \frac{d\mathbf{v}_2}{d\mathbf{r}}\,\mathbf{j} + \frac{d\mathbf{v}_3}{d\mathbf{r}}\,\mathbf{k}, \tag{221}$$

ježto jednotkové vektory $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ jsou stálé.

Pročež skalární část tohoto differenciálního poměru

$$\frac{d\,.\,\Phi}{d\mathbf{r}} = \frac{d\,.\,\mathbf{v}_1}{d\mathbf{r}}\,\mathbf{i} + \frac{d\,.\,\mathbf{v}_2}{d\mathbf{r}}\,\mathbf{j} + \frac{d\,.\,\mathbf{v}_3}{d\mathbf{r}}\,\mathbf{k}$$

čili

$$\nabla\,.\,\Phi = (div\;\mathbf{v}_1)\,\mathbf{i} + (div\;\mathbf{v}_2)\,\mathbf{j} + (div\;\mathbf{v}_3)\,\mathbf{k}, \tag{213^c}$$

a jeho vektoriální část

$$\frac{d\times\Phi}{d\mathbf{r}} = \frac{d\times\mathbf{v}_1}{d\mathbf{r}}\,\mathbf{i} + \frac{d\times\mathbf{v}_2}{d\mathbf{r}}\,\mathbf{j} + \frac{d\times\mathbf{v}_3}{d\mathbf{r}}\,\mathbf{k}$$

čili

$$\nabla\times\Phi = (curl\;\mathbf{v}_1)\,\mathbf{i} + (curl\;\mathbf{v}_2)\,\mathbf{j} + (curl\;\mathbf{v}_3)\,\mathbf{k}. \tag{214^c}$$

Integrály dyadických mnohočlenů. Důležitost mají hlavně tyto dva druhy integrálů:

$$\int \Phi\,.\,d\mathbf{r} \quad \text{a} \quad \int\!\!\int \Phi\,.\,d\mathbf{p},$$

kde značí $d\mathbf{r}$ prvek průvodiče a $d\mathbf{p}$ prvek plošný.

Vztahuje-li se u prvního z těchto integrálů integrál ke křivce uzavřené, lze dokázati, že platí vzorec

$$\int \Phi\,.\,d\mathbf{r} = \int\!\!\int [\nabla\times\Phi]\,.\,d\mathbf{p}, \tag{222}$$

obdobný ke vzorcům (44^c) a (196^b); vzorec ten představuje *větu Stokesovu* rozšířenou na mnohočleny dyadické.

Podobně platí rovnice

$$\int\int \Phi : d\mathbf{p} = \int\int\int (\nabla . \Phi) . dS, \qquad (223)$$

analogická k rovnicím (48) a (124^c), kde integrace na levé straně se vztahuje ku ploše uzavřené; rovnice ta vyjadřuje *větu Gaussovu* vzhledem k dyadickým mnohočlenům.

Konečně jest poznamenati že k integrálům, jež jsme poznali v oddílech o polích skalárních a vektorových, totiž k potenciálu, integrálu Newtonovu, Laplace-ovu a Maxwellovu, druží se obdobné integrály, vztahující se k mnohočlenům dyadickým. Definujeme je pak výrazy

$$\begin{aligned} Pot\ \Phi &= \int\int\int \frac{\Phi(x_n, y_n, z_n)}{r_{on}}\, dx_n\, dy_n\, dz_n \\ &= \int\int\int \frac{\Phi_n}{r_{on}}\, dS_n \end{aligned} \qquad (224)$$

$$New\ \mathbf{w} = \int\int\int \frac{\mathbf{r}_{on}\,\mathbf{w}(x_n, y_n, z_n)}{\mathbf{r}_{on}^3}\, dS_n \qquad (225)$$

$$Lap\ \Phi = \int\int\int \frac{\mathbf{r}_{on} \times \Phi_n}{\mathbf{r}_{on}^3}\, dS_n. \qquad (226)$$

$$Max\ \Phi = \int\int\int \frac{\mathbf{r}_{on} . \Phi_n}{\mathbf{r}_{on}^3}\, dS_n. \qquad (227)$$

Přestávajíce na těchto definicích podotýkáme jen ještě, že analytickou theorii uvedených integrálů mohli bychom založiti na tom, že vyjádříme v příslušných hodnotách jejich dyadický mnohočlen Φ trojčlenem $\mathbf{v}_1\mathbf{i} + \mathbf{v}_2\mathbf{j} + \mathbf{v}_3\mathbf{k}$ (se stálými členy zadními $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) aneb vektor $\mathbf{w}$ trojčlenem $x_n\mathbf{i} + y_n\mathbf{j} + z_n\mathbf{k}$.

Pojednávajíce o třech polích: skalárním, vektorovém a dyadickém, jež v theoretické fysice často se vyskytují, shledali jsme téměř úplnou shodu hlavních vět a vzorců sem náležejících, která se jeví tím, že z rovnic pro jedno pole platných obdržíme rovnice druhých dvou polí, provedeme-li v nich záměnu příslušného skaláru, vektoru a dyadického mnohočlenu. Že lze dáti rovnicím těm tvar nejjednodušší, při čemž také tato shoda náležitě vyniká, jest nepopíratelně předností vektorové analyse.

Poznamenání. Na IV. mezinárodním kongresu mathematiků, který se konal v dubnu r. 1908 v Římě, bylo též rokováno o potřebě zavésti jednotné označení operací, vyskytujících se ve vektorové analysi, aspoň pokud jde o tak zvaný minimální rozsah její; konečná rozhodnutí o tom stanou se snad na příštím kongresu, jenž se má odbývati r. 1912 v Cambridge. Zatím přijímá všechny v té příčině učiněné návrhy časopis „L'enseignement mathématique"; z návrhů, až dosud v časopise tom uveřejněných, zasluhují pozornosti návrhy C. Burali-Fortiho a R Marcolonga (jichž bylo použito též ve spise od obou těchto autorů právě vydaném: „Elementi di calcolo vettoriale"), dle nichž označoval by se skalární součin dvou vektorů $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (místo Hamiltonova označení $- S\,(\mathbf{ab})$ nebo Grassmannova $\mathbf{a} \mid \mathbf{b}$ nebo Gibbsova $\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}$) a vektoriální součin $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ (místo Hamiltonova označení $V(\mathbf{ab})$ nebo Grassmannova $\mathbf{(ab)}$ nebo Gibbsova $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$). Dosti obvyklé jest již další navrhované jimi označení: *grad v* místo $\nabla\, v$ a *rot* **u** místo *curl* **u**. Vzhledem k tomu, že užívání počtu vektorového vždy více se šíří (zvláště ve vědách applikovaných), bylo by takové usjednocení se na základních symbolech žádoucí.

O plochách vytvořených rotací imaginárné přímky nebo kuželosečky.

Podává prof. **Vinc. Jarolímek.**

V theorii paprskových kongruencí a komplexů brány dosud v úvahu toliko paprsky reálné. Ve svém pojednání „O speciálním kvadratickém komplexu tetraedrálním" (Věstník král. České společnosti nauk, 1906) poukázal jsem k významu imaginárných paprsků komplexových. Ukázalo se totiž, že komplex uvažovaný obsahuje netoliko rotační hyperboloidy sborcené, nýbrž i nepřímkové, t. j. konvexní plochy druhého stupně. Existenci jejich lze vysvětliti jedině komplexními paprsky imaginárnými, jimiž jsou vyplněny, což také analytické vyšetření v řečeném pojednání potvrdilo. Důkaz synthetický, že imaginárná přímka jednobodová (t. j. která má jeden bod reálný) při určité poloze k ose vytvořuje rotací reálnou plochu 2. stupně, podal v III. čísle t. ročníku pan Fr. Kadeřávek, assistent č. techniky, v článku nadepsaném „Příspěvek k plochám rotačním 2. stupně". Podávám tuto přímý důkaz jednoduchý a konstrukci vlastní.

Důkaz opírá se o větu, že kuželosečka vytvoří plochu druhého stupně netoliko rotací okolo jedné své osy, nýbrž: