Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 5, 536--598,599--604

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123803

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1910

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

7. *Zákryt* δ Scorpii (vel. 2, 3) zač. $6^h 20^m$ k $7^h 31^m$. — Měsíc zapadá v $6^h 58^m$.

10. *Merkur* v největší západní elongaci $18^0 3'$.

☽ 11.

15. *Uran* v západní kvadratuře se Sluncem. *Neptun* ve východní kvadratuře se Sluncem.

○ 18. *Konjunkce* Jupitera se Sluncem. — 19^h *Konjunkce* Saturna s Měsícem.

22. 12^h *Venuše* v konjunkci s *Martem* (Venuše o 45′ severněji). *Zákryt* 139 Tauri (vel. 5, 4) zač. $9^h 9^m$ k $10^h 1^m$. — Měsíc vychází v $7^h 17^m$.

☾ 24.

26. *Saturn* v opposici se Sluncem. — *Zákryt* η Leonis (vel. 3, 4) zač. $15^h 53^m$ k $17^h 3^m$. — Měsíc vrcholí v $19^h 49^m$.

27. 1^h *Merkur* v konjunkci s Martem — (Merkur $1^0 4'$ severněji).

28. 0^h *Venuše* v konjunkci s Jupiterem (Venuše 11′ severněji).

29. 14^h *Merkur* v konjunkci s *Jupiterem* (Merkur 21′ severněji.

31. 12^h *Konjunkce* Marta s Měsícem. — 23^h *Konjunkce* Merkura s Měsícem. *N.*

Úlohy.

Řešení úloh.

a) Z mathematiky.

Úloha 1.

Napiš si číslo mnohociferné, přelož číslice jeho z lichých míst na sudá a ze sudých na lichá a to všecky způsobem jakýmkoliv a číslo tak vzniklé přičti k původnímu. Součet napiš v obráceném pořádku číslic i utvoř rozdíl součtu původního a

tohoto obráceného. Pověz pak výsledek až na jednu dvojcifernou skupinu (dříve jej rozděliv na dvojciferné skupiny), i. povím ti dvojciferné číslo zatajené. Jak to možná?

Prof. *Ant. Jeřábek.*

Řešení p. autora úlohy.

Jak součet prvních dvou čísel tak i číslo obrácením vzniklé jsou čísla 11ti dělitelná; tedy i rozdíl obou jest 11ti dělitelný. Kromě toho jest i rozdíl obou dělitelný 9ti; tudíž také 99ti. Proto musí součet dvojciferných jeho tříd býti násobkem 99ti a tedy zatajená skupina doplňkem na 99, 198, 297 atd.

Má-li číslo lichý počet číslic, dlužno k němu připojiti v předu 0.

Je-li součet dvojciferných tříd bez třídy zatajené dělitelný 99, stává se úloha neurčitou: zatajená třída může býti 00 neb 99.

Příklad:

$$\begin{array}{rr} & 02\,97\,83\,47 \\ & \underline{34\,70\,28\,79} \\ - & 37\,68\,12\,26 \\ & \underline{62\,21\,86\,73} \\ & 24|53|74\,47. \end{array}$$

Řekneš-li 24 53 . . . 47 uhodnu 74

Úloha 2.

Řešiti jest rovnice

a) $(x+1)^6 + (x-1)^6 = a\,(x^6+1)$

b) $(x+1)^8 + (x-1)^8 = a\,(x^8+1)$.

Prof. *Rud. Hruša.*

Řešení zaslal p. *A. Kollmann*, stud. VII^a reál. na Král. Vinohradech.

Rozvineme-li dle binomické poučky, sloučíme a dosadíme za $x^2 = y$, obdržíme rovnice

a) $(2-a)\,y^3 + 30\,y^2 + 30y + (2-a) = 0$

b) $(2-a)\,y^4 + 56y^3 + 140y^2 + 56y + (2-a) = 0$,

což jsou reciproké rovnice 3. a 4. stupně, jichž řešení se známým způsobem provede.

Úloha 3.

Dvojmoci kořenů určité rovnice reciproké stupně čtvrtého jsou kořeny rovnice reciproké stupně čtvrtého identické s původní. Najděte všechny rovnice žádaných vlastností.

Jan Svoboda, úředník zem. hyp. banky v Brně.

Řešení zasílá p. *Vojtěch Krch*, stud. VII. tř. reál. v Hradci Králové.

Pišme hledanou rovnici reciprokou ve tvaru

1. $x^4 + px^3 + q\,x^2 + px + 1 = 0$

a její kořeny buďtež $x_1, x_2, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$.

Bude tedy

2. $x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -p$

3. $x_1\,x_2 + x_1\,\frac{1}{x_2} + x_1\,\frac{1}{x_1} + x_2\,\frac{1}{x_1} + x_2\,\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_2} = q.$

Rovnice 1. má však dle podmínky v úloze vyslovené míti také kořeny $x_1^2, x_2^2, \frac{1}{x_1^2}, \frac{1}{x_2^2}$, takže zároveň

4. $x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = -p$

5. $x_1^2 x_2^2 + x_1^2\,\frac{1}{x_2^2} + x_1^2\,\frac{1}{x_2^2} + x_2^2\,\frac{1}{x_1^2} + x_2^2\,\frac{1}{x_2^2} + x_1^2\,\frac{1}{x_2^2} = q.$

Porovnáním rovnic 2., 3. a 4., 5. dostaneme

6. $x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} + x_2^2 + \frac{1}{x_2^2} = x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2}$

7. $x_1^2 x_2^2 + \frac{1}{x_1^2 x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} = x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

a položíme-li

8. $x_1 + \frac{1}{x_1} = r,\ x_2 + \frac{1}{x_2} = s,\ x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} = t,$

$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = u$

9. $r^2 - 2 + s^2 - 2 = r + s$

10. $t^2 - 2 + u^2 - 2 = t + u$

a zároveň

11. $r + s = tu$
12. $rs = t + u$,

z kterýchž rovnic plyne, klademe-li

13. $r + s = \alpha$
14. $rs = \beta$
15. $\alpha^2 - 2\beta - 4 = \alpha$
16. $\beta^2 - 2\alpha - 4 = \beta$.

Odečtením rovnic 15. a 16. dostaneme

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + 1) = 0.$$

Z této rovnice plyne

buď I. $\alpha - \beta = 0$ neb II. $\alpha + \beta + 1 = 0$.

Kombinujeme-li tyto rovnice lineární s jednou z kvadratických rovnic 15. neb 16., dostaneme

$$\alpha_1 = 4,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = -2,\ \alpha_4 = 1$$
$$\beta_1 = 4,\ \beta_2 = -1,\ \beta_3 = 1,\ \beta_4 = -2.$$

Z rovnic 11. — 14. a 3., 4. plyne

$$p = -\alpha$$
$$q = \beta + 2,$$

takže úloze vyhovují rovnice

$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$ neboli $(x - 1)^4 = 0$
$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ neboli $(x^2 + x + 1)^2 = 0$
$x^4 - x^3 - x + 1 = 0$ neboli $(x - 1)^2 (x^2 + x + 1) = 0$.

Rovnice $x^2 + x + 1 = 0$ má za kořeny třetí odmocniny z 1, rovnice $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ páté odmocniny z 1.

Úloha 4.

Jest rozděliti lichoběžník příčkou se základnami rovnoběžnou na dva díly v tom poměru, v jakém rozdělen jest úhlopříčkou.

Na základě této úlohy jest rozděliti lichoběžník na dva díly v poměru $m : n$ a to opět příčkou se základnami rovnoběžnou.

Prof. *Ant. Jeřábek.*

Většina p. řešitelů vyjadřuje hledanou příčku MN pomocí základu lichoběžníku $AB = a$, $CD = b$ ve tvaru

$$MN = \sqrt{\frac{a^2 n + b^2 m}{n + m}}$$

a v případě, že rozdělen jest v tom poměru, v jakém jest dělen úhlopříčkou

$$MN = \sqrt{ab}.$$

Viz Časopis XXXVII úl. 8.

Podávám zde řešení p. autora, jemuž se nejvíce blíží řešení p. *J. Kňourka*, stud. VII. tř. r. v Jičíně.

Řešme nejprvé prvou část úkolu.

Tu má býti

$$ABNM = \triangle ABC$$
$$MNCD = \triangle ACD$$

Z rovnosti

$$\triangle ABC = ABNM$$

plyne

$$\triangle ANC = \triangle ANM.$$

Potom však

$$MC \parallel AN.$$

Odtud plyne, označíme-li S průsečík úhlopříček a K průsečík příčky MN a úhlopříčky AC,

$$AK : KC = KN : KM$$
$$AK : AC = KM : CD$$
$$AC : KC = AB : KN$$
$$AB : CD = AS : SC$$

a znásobením stejnolehlých členů

$$\overline{AK}^2 : \overline{KC}^2 = AS : SC.$$

Z toho plyne konstrukce:

Nad průměrem AC sestrojme kruh, v bodě S vztyčme kolmici na AC, protínající kružnici v bodě J, podobně ve středu O úsečky AB kolmici OL. Přímka JL nám protne úhlopříčku AC v bodě K.

Důkaz: $\sphericalangle AJL = \sphericalangle LJC$, takže v $\triangle ACJ$ jest JK symmetrálou úhlu J. Z toho plyne

$$AJ : JC = AK : KC$$

a též

$$AJ^2 : JC^2 = AK^2 : KC^2;$$

protože

$$SJ \perp AC$$

platí též úměra

$$AJ^2 : JC^2 = AS : SC$$

tudíž i

$$AK^2 : KC^2 = AS : SC$$

Druhou část úkolu rozřešíme pomocí proměňování obrazců

Na straně AB sestrojme bod P tak, aby

$$AP : PB = m : n$$

a podobně na straně CD bod Q, takový, že

$$DQ : QC = m : n.$$

I jest

$$APQD : PBCQ = m : n,$$

neb

$$ABCD : PBCQ = (m + n) : n \tag{1}$$

Naměřme

$$RP = QC;$$

i jest

$$PBCQ = RBC. \tag{2}$$

Veďme

$$RE \parallel AC;$$

i jest

$$RBC = AEB. \tag{3}$$

Je-li konečně

$$EF \parallel AB$$

zbývá ještě rozděliti lichoběžník $ABEF$ dle prvé části úkolu příčkou MN, i jest pak

$$AEB = ABNM$$

Z toho zřejmě (dle 1. a 4.) vysvítá, že

$$ABCD : ABNM = (m + n) : n$$

čili

$$MNCD : ABNM = m : n.$$

Úloha 5.

Sestrojiti trojúhelník, dány-li výška, těžnice a symmetrála úhlu, všechny vycházející z téhož vrcholu.

Rudolf Hanák, absolvent kursu zeměměřičského.

Všichni páni řešitelé použili k řešení věty, že v trojúhelníku symmetrála strany a symmetrála proti ní ležícího úhlu protínají se v tomtéž bodě na kružnici trojúhelníku opsané.

Zajímavé řešení zaslal p. *Jan Kostlivý*, stud. VIII. gymn. v Domažlicích.

V $\triangle ABC$ označme výšku $v = CD$, těžnici $t = CE$, symmetrálu úhlu vnitřního při C, $m = CF$. Sestrojme ještě symmetrálu úhlu vnějšího při C, CG. Body $ABFG$ tvoří pak harmonickou čtveřinu, jejíž jeden pár AB jest půlen v bodě E Body F, G, E můžeme snadno sestrojiti: Na přímku c vztyčme kolmici v bodě D a nanesme na ni výšku v. Tak dostaneme vrchol C. Z něho protneme stranu c úsečkami t a m a tak dostaneme body E a F. Na CF vztyčíme kolmici, protínající přímku c v bodě G. Body AB sestrojíme pomocí věty, že kružnice protínající pravoúhle kružnici sestrojenou nad danou úsečkou jako průměrem dělí tuto úsečku harmonicky. Sestrojme tedy nad průměrem FG kružnici, veďme k ní bodem E tečnu, opišme pak kol bodu E kružnici o poloměru rovném té tečně. Kružnice tato protne nám přímku C ve vrcholech A, B. Z konstrukce této plyne, že úloha jest, nepřihlížíme-li k různým polohám, jednoznačná a zároveň, že nutno, aby bylo $CE > CF$.

Poznámka. Body A, B jsou dvojné body involuce, jejíž jeden pár jest F, G a střed E.

Úloha 6.

Které jest geometrické místo dotyčných bodů dvou kružnic vzájemně se dotýkajících, z nichž jedna dotýká se současně přímky P v bodě p, a druhá přímky P_1 v bodě p_1.

Jak se změní toto geometrické místo, když $P \parallel P_1$?

Prof. *Jos. Kálal.*

(Řešení zaslal p. *Karel Jelínek*, stud. VI. tř. r. v Telči.)

Libovolný bod hledaného místa geometrického sestrojíme takto: Na kolmici v bodě p_1 ku P_1 vztyčené zvolme libovolný bod s_1, kol něhož opišme kružnici K_1 dotýkající se P_1. Přímka $xx' \perp P$ a jdoucí středem s_1 seče tuto kružnici v bodech x, resp. x', jichž spojnice s bodem p sekou kružnici K_1 v hledaných bodech dotyku t, resp. t'.

Značíme-li úhel $\sphericalangle PP_1 = \alpha$, jest pro libovolné s_1

$$\sphericalangle p_1 s_1 x = 2R - \alpha,$$
$$\sphericalangle p_1 s_1 x' = \alpha,$$

z čehož přímo plyne, že pro každou kružnici K_1 jest

$$\sphericalangle p_1 t x = R - \frac{\alpha}{2},$$

$$\sphericalangle p_1 t' x' = \frac{\alpha}{2},$$

z čehož plyne

$$\sphericalangle p_1 t p = R + \frac{\alpha}{2} = const.$$

$$\sphericalangle p_1 t' p = 2R - \frac{\alpha}{2} = const.$$

Jsou tedy hledaným místem geometrickým dvě kružnice jdoucí body p a p_1 a protínající se v nich v pravém úhlu.

Je-li $P \parallel P_1$, pak $\alpha = 0$,

$$\sphericalangle p_1 t p = R,$$
$$\sphericalangle p_1 t' p = 2R.$$

V tomto případě skládá se hledané místo geometrické z přímky pp_1 a z kružnice nad průměrem pp_1.

Úloha 7.

Na stranách rovnostranného trojúhelníka ABC zvoleny body A', B', C' tak, že $AC' = m$, $BA' = 2m$, $CB' = 3m$.

a) *Kterou hodnotu má m, je-li $\triangle A'B'C'$ pravoúhlý,*

b) *který jest ostrý úhel pravoúhlého trojúhelníka.*

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

(Řešení zaslal p. *Frant. Kornhäuser*, stud. VIIa tř. r. v Karlíně.)

Označme $\overline{AB} = s$.

Dle cosinusové věty platí:

$$\overline{A'B'}^2 = (s-2m)^2 + (3m)^2 - (s-2m)3m = s^2 - 7ms + 19m^2,$$
$$\overline{B'C'}^2 = (s-3m)^2 + m^2 - m(s-3m) = s^2 - 7ms + 13m^2,$$
$$\overline{C'A'}^2 = (s-m)^2 + (2m)^2 - 2m(s-m) = s^2 - 4ms + 7m^2.$$

Má-li býti úhel $\gamma' = 90^0$, pak musí platiti:

$$\overline{B'C'}^2 + \overline{C'A'}^2 = \overline{A'B'}^2$$

a dosadíme-li a upravíme

$$s^2 - 4ms + m^2 = 0$$

a řešíme-li dle m

$$m_{1.2} = s\frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = (2 \pm \sqrt{3})\,s.$$

Má-li býti úhel $\beta' = 90^0$, pak platí:

$$\overline{B'C'}^2 + \overline{A'B'}^2 = \overline{A'C'}^2$$

a dosadíme-li a upravíme

$$25m^2 - 10ms + s^2 = 0,$$

z čehož

$$m' = s\,\frac{10 \pm \sqrt{100-100}}{50} = \frac{1}{5}s.$$

Má-li býti $\alpha' = 90^0$, vyjde $m_{1,2}$ imaginární.

Při $m_{1,2} = (2 \pm \sqrt{3})s$ bude

$$C'A' = s\sqrt{6}(2 \mp \sqrt{3}),$$
$$B'C' = s\sqrt{\frac{3}{2}}(3\sqrt{3} \mp 5),$$
$$tg\,\beta' = \pm 1 + \sqrt{3}.$$

Při $m' = \frac{1}{5}s$ bude

$$B'C' = \frac{\sqrt{3}}{5}s,$$
$$A'B' = \frac{3}{5}s,$$
$$tg\,\alpha' = \frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$\alpha' = 30^0.$$

Úloha 8.

Dáno jest n přímek $p_1, p_2, \ldots p_n$ a dva body A, B. Jest sestrojiti dráhu světelného paprsku, který vychází z bodu A, odráží se postupně na přímkách p_1, $p_2, \ldots p_n$ a na konec prochází bodem B. Josef Papřok.

(Řešení zaslal p. *Vojtěch Krch*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

K řešení užijeme věty, že paprsek vycházející z bodu A postupuje po odrazu tak, jako by vycházel z bodu souměrně sdruženého s bodem A vzhledem k rovině zrcadla.

Sestrojme tedy bod souměrně položený k bodu A dle přímky p_1; k tomuto bodu A_1 sestrojme bod A_2 souměrně položený dle přímky p_2, k bodu A_2 bod A_3 souměrně položený dle přímky p_3 atd., až k bodu A_{n-1} bod A_n souměrně položený dle přímky p_n. Potom spojme bod B s bodem A_n, až nám spojnice protne přímku p_n v bodě B_n, bod B_n s A_{n-1}, až nám tato spojnice protne přímky p_{n-1} v bodě B_{n-1}, atd., až bod B_2 s A_1 až nám protne spojnice přímku p_1 v bodě B_1. Pak lomená čára $AB_1B_2B_3 \ldots B_{n-1}B_nB$ nám udává dráhu paprsku.

Úloha 9.

Sestrojiti kružnici, která prochází danými dvěma body A, B a protíná přímku p v úhlu α. Týž.

(Řešení zaslal p. *J. Kňourek*, stud. VII. tř. r. v Jičíně.)

Označme m osu souměrnosti bodů A, B a M průsečík její s přímkou p. Pak jest bod M středem podobnosti všech kružnic, jichž střed leží na m a jež protínají přímku p v úhlu α. Z toho plyne sestrojení: Sestrojme libovolnou z kružnic K_1, jež mají střed na O a protínají přímku p v úhlu α. To snadno provedeme, uvážíme-li, že úhel, který svírá přímka s tečnou, a úhel, který svírá s poloměrem kružnice, doplňují se na 90^0. Označme střed té kružnice S_1. Sestrojme průsečík B_1 kružnice K_1 s přímkou MB. Vedeme-li bodem B rovnoběžku s poloměrem S_1B_1, protne nám tato přímku m v bodě S, jenž jest středem hledané kružnice K. Diskusse byla by při tomto řešení dosti obtížná.

Proto uvádím ještě řešení pomocí kruhové inverse (zaslal p. *Josef Hanák*, stud. VIII. tř. g. v Prostějově).

Za střed inverse zvolme bod A, za poloměr inverse BA. Pak se bod B bude inversí transformovati v sebe. Poněvadž kružnicím jdoucím středem inverse odpovídají v obrazci transformovaném přímky, přejde hledaná kružnice inversí v přímku jdoucí bodem B. Daná přímka p přejde v jistou kružnici. Inverse jest transformace konformní (nehledíme-li ke smyslu při úhlech). I převedli jsme danou úlohu na úlohu jednodušší: Vésti daným bodem přímku, která danou kružnici protíná pod daným úhlem. Uloha tato má vždy dvě řešení.

Úloha 10.

Buďtež A_1, B_1, C_1 tři body ve stranách trojúhelníka ABC neb v jich prodloužení. Jest dokázati, že $\triangle A_1B_1C_1$ rovná se obsahem svým trojúhelníku, jehož vrcholy jsou souměrně sdruženy s vrcholy $\triangle A_1B_1C_1$ dle středů stran $\triangle ABC$.

Dr. *J. Tomáš.*

(Řešení zaslal p. *Vladimír Kořínek*, stud. VIb. tř. r. v Olomouci.)

Pro plochy $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ platí vzorec

$$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC - (\triangle A_1CB_1 + \triangle B_1AC_1 + \triangle C_1BA_1),$$
$$\triangle A_2B_2C_2 = \triangle ABC - (\triangle A_2CB_2 + \triangle B_2AC_2 + \triangle C_2BA_2).$$

Aby tedy

$$\triangle A_1B_1C = \triangle A_2B_2C,$$

musí býti

$$\triangle A_1CB_1 + \triangle B_1AC_1 + \triangle C_1BA_1$$
$$= \triangle A_2CB_2 + \triangle B_2AC_2 + \triangle C_2BA_2.$$

Položme

$$AC_1 = C_2B = m,$$
$$BA_1 = A_2C = n,$$
$$CB_1 = B_2A = p,$$

a vyjádřeme plochy oněch šesti trojúhelníků pomocí úseček m, n, p a úhlů α, β, γ.

I dostaneme, po znásobení 2,

$$n(c-p)\sin\alpha + p(a-m)\sin\beta + m(b-n)\sin\gamma$$
$$= p(b-n)\sin\alpha + m(c-p)\sin\beta + n(a-m)\sin\gamma,$$

kterážto rovnice jest skutečně správná, uvážíme-li, že dle věty sinusové platí rovnice

$$a \sin \beta = b \sin \alpha,$$
$$b \sin \gamma = c \sin \beta,$$
$$c \sin \alpha = a \sin \gamma.$$

P. *Karel Teige,* stud. VII. tř. g. v Praze-II., Žitná ul., připomíná, že lze pomocí dělicích poměrů

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \alpha_1, \quad \frac{CB_1}{AB_1} = \beta_1, \quad \frac{AC_1}{BC_1} = \gamma_1$$

vyjádřiti poměr plochy $\triangle A_1B_1C_1$ ku ploše $\triangle ABC$ vzorcem

$$\frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1 - 1}{(\alpha_1 - 1)(\beta_1 - 1)(\gamma_1 - 1)}.$$

(Odvození viz na př. ve článku A. Strnada v VI. roč. Časopisu.)

Výraz tento se substitucí

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\beta_1}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\gamma_1}$$

nemění.

Avšak $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ jsou dělicí poměry bodů A_2, B_2, C_2.

Úloha 11.

Tři příčky, procházející vrcholy trojúhelníka ABC, protínejtež se v jednom bodě S. Jsou-li A_1, B_1, C_1 průsečné body oněch příček a příslušných stran trojúhelníka, budiž dokázán vztah

$$\frac{A_1S}{A_1A} + \frac{B_1S}{B_1B} + \frac{C_1S}{C_1C} = 1.$$

Trř.

Řešení zasílá p. *Alois Pelikán,* stud. VI. tř. r. v Telči.

Vedeme-li v $\triangle ABC$ bodem S příčky $SM \| AC$, $SN \| BC$ a vyznačíme-li body M, N na straně AB, lze psáti úměry

$$\frac{A_1S}{A_2A} = \frac{BN}{BA} = \frac{NB}{AB}$$

$$\frac{B_1S}{B_1B} = \frac{AM}{AB}$$

a poněvadž v podobných trojúhelnících $\triangle ABC$ a $\triangle MNS$ jsou C^1S a C_1C příčkami stejnolehlými, platí též

$$\frac{C_1S}{C_1C} = \frac{MN}{AB}$$

Sečteme-li na obou stranách a uvážíme, že jest

$$AM + MN + NB = AB$$

obdržíme

$$\frac{A_1S}{A_1A} + \frac{B_1S}{B_1B} + \frac{C_1S}{C_1C} = 1$$

c. b. d.

Úloha 12.

Opišeme-li v úplném čtyřstranu, jehož vrcholy jsou A, B, C, D, E, F kružnice kolem trojúhelníků ABF, ADE, BCE DCF, procházejí všecky čtyři kružnice jedním bodem M. Středy těch kružnic a bod M leží na kružnici, mimo to ještě čtyři body, v nichž se vždy tři přímky protínají, spojnice to středův oněch kružnic a vrcholů čtyřstranu. Body ty leží na oněch čtyřech kružnicích. *Týž.*

Řešení p. autora.

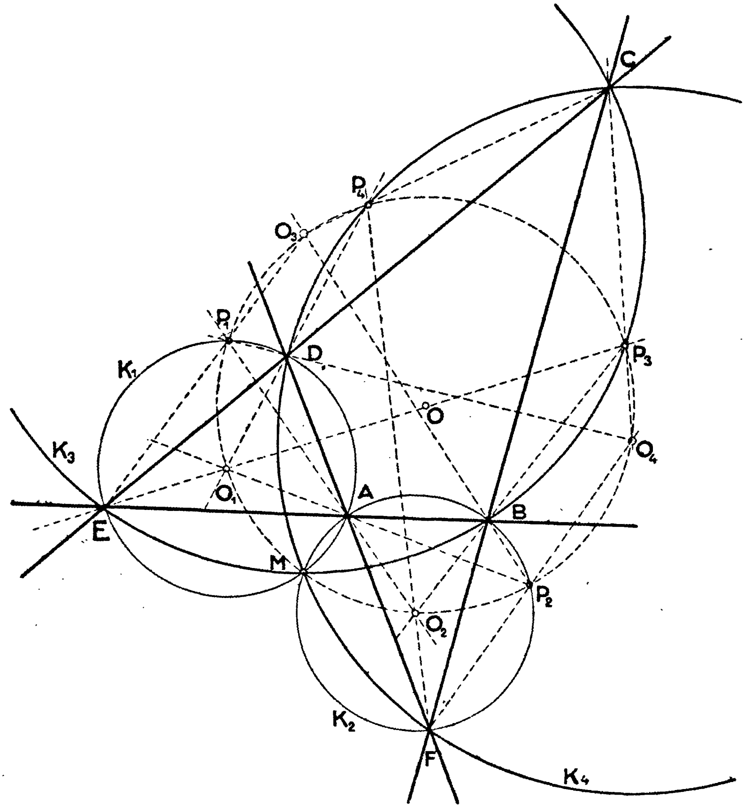
Kruhy K_1 a K_2 protínejtež se mimo v bodě A ještě i v bodě M. Pak jest $ADEM$ čtyrúhelník tetivový, pročež $\sphericalangle EMA = \delta$, $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AFB$ (úhly obvod. v kruhu K_2), $\sphericalangle AMB = \alpha + \beta - 2R$, pročež $\sphericalangle EMB = \alpha + \beta - 2R + \delta$ $= (\alpha + \beta + \delta) - 2R, \sphericalangle EMB + \gamma = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) - 2R = 2R$. Je tedy čtyrúhelník $EMBC$ tetivový a bod M leží také na kružnici K_3. Podobně se dokáže, že bodem M prochází i kružnice K_4.

Čtyrúhelník $O_1\,O_2\,O_3\,O_4$, tvořený středy kružnic K_1, K_2, K_3, K_4, je tetivový; neboť úhel $O_3\,O_1\,O_2 = \sphericalangle EMA = \delta$, protože $O_3\,O_1 \perp EM$ (centrála O_3O_1 stojí kolmo na společné tetivě kruhův K_3 a K_1).

$\sphericalangle O_2\,O_4\,O_3 = 2R - \sphericalangle CMF$; neboť $O_2O_4 \perp MF$, $O_4O_3 \perp MC$. Avšak $\sphericalangle CMF = \delta$ (obvodové nad týmž obl. $\widehat{FK_4C}$); tudíž $\sphericalangle O_2O_4O_3 = 2R - \delta$.

$\sphericalangle\ O_3O_1O_2 + \sphericalangle\ O_2O_4O_3 = 2R$. Leží tedy body O_1, O_2, O_3, O_4 na jedné kružnici. I bod M leží na této kružnici; neboť čtyrúhelník $O_1MO_2O_4$ je také tetivový.

$\sphericalangle\ O_1O_4O_2 = 2R - \sphericalangle\ DMF$, stojíť $O_1O_4 \perp DM$, $O_2O_4 \perp MF$; avšak $\sphericalangle\ DMF = 2R - \gamma$, poněvadž $CDMF$ je čtyrúhelník kruhu K_4 vepsaný. Pročež $\sphericalangle\ O_1O_4O_2 = \gamma$.



$\sphericalangle\ O_1MO_2 = \sphericalangle\ O_1AO_2 = \sphericalangle\ O_1AE + \alpha + \sphericalangle\ O_2AF$,
$\sphericalangle\ O_1AE = R - \frac{1}{2} \sphericalangle\ AO_1E = R - (2R - \delta) = \delta - R$,
$\sphericalangle\ O_2AF = R - \frac{1}{2} \sphericalangle\ AO_2F = R - (2R - \beta) = \beta - R$,
$\sphericalangle\ O_1MO_2 = \delta - R + \alpha + \beta - R = (\alpha + \beta + \delta) - 2R$,
$\sphericalangle\ O_1MO_2 + \sphericalangle\ O_1O_4O_2 = (\alpha + \beta + \delta) - 2R + \gamma$
$= (\alpha + \beta + \gamma + \delta) - 2R = 2R$.

Leží tedy bod M na kružnici $\widehat{O_1O_2O_4}$, která prochází i bodem O_3.

Body O_1, O_2, O_3, O_4, M leží na jediné kružnici, jejíž střed jest O.

NB. Na této kružnici leží ještě 4 další body, takto definované: Prodloužíme-li

O_1A, protne kružnici K_2 v bodě P_2, v témž bodě protíná tuto kružnici i O_4F a O_3B.

O_2B, jsouc prodlouženo protne kružnici K_3 v bodě P_3, v tomto bodě protínají i O_4C a O_1E.

O_3C, jsouc prodlouženo protne kružnici K_4 v bodě P_4, v tomto bodě protínají i O_1D a O_2F.

O_4D, jsouc prodlouženo protne kružnici K_1 v bodě P_1, v tomto bodě protínají i O_2A a O_3E.

Leží tedy *devatero* definovaných bodů na jedné kružnici o středu O.

Důkaz o bodech P_1, P_2, P_3, P_4: Přímka O_1A (prodloužena) protínejž přímku O_4F v bodě P_2.

Pak jest $\sphericalangle FO_4O_2$ (jakožto polovice středového $\sphericalangle FO_4M$ v kruhu K_4) $= \sphericalangle FCM = \sphericalangle FDM = \sphericalangle ADM = \frac{1}{2} \sphericalangle AO_1M = P_2O_1O_2$, tedy $\sphericalangle P_2O_4O_2 = \sphericalangle P_2O_1O_2$.

Leží tedy P_2 na kružnici $K(O)$, určené body O_1, O_2, O_4.

Přímka O_3B (prodloužená) protínejž prodlouženou přímku O_1A v bodě P_2'. Pak jest $\sphericalangle P_2'O_3O_2 \equiv \sphericalangle BO_3O_2 = \frac{1}{2} \sphericalangle BO_3M = \sphericalangle BCM = \sphericalangle FCM = \ldots = \sphericalangle P_2O_1O_2$. Máme tedy $\sphericalangle P_2'O_3O_2 = \sphericalangle P_2O_1O_2 = \sphericalangle P'_2O_1O_2$, neboť P_2' leží také na prodloužené přímce O_1A. Z toho plyne, že P_2' leží na kružnici $K(O)$, určené body O_1, O_2, O_3. Avšak P_2' leží i na prodloužené přímce O_1A, na níž leží i bod P_2, musí tedy $P'_2 \equiv P_2$, sice by prodloužená přímka O_1A protínala kružnici $K(O)$ ve třech různých bodech.

Tím jsme dokázali, že přímky O_1A (prodl.), O_3B (prodl.) a O_4F protínají se v j e d n o m bodě P_2 na kružnici $K(O)$. Bod P_2 leží však i na kružnici K_2; neboť oblouk $\widehat{MO_2} = \widehat{O_2P_2}$, poněvadž obvodový $\sphericalangle MO_1O_2 =$ obv. $\sphericalangle O_2O_1P_2$; jest totiž $\overline{O_1O_2}$ centrála kruhů K_1 a K_2, pročež $\sphericalangle MO_1O_2 = \sphericalangle O_2O_1A$.

Z rovnosti $\widehat{MO_2} = \widehat{O_2P_2}$ plyne $\overline{MO_2} = \overline{O_2P_2}$, a poněvadž M leží na kružnici K_2, musí na ní ležet i bod P_2.

Podobně se dokáže, že i body P_3, P_4, P_1 na kružnici $K(O)$ leží.

Bodem M prochází tedy patero kružnic, na kružnicích K_1, K_2, K_3, K_4 leží po pěti určitě vymezených bodech, kružnice $K(O)$ obsahuje devatero bodův.

Úloha 13.

Komolé kužele přímé, jež mají stejnou výšku a stejný obvod osového řezu, mají stejný povrch. *Týž.*

(Řešení zasílá p. *Karel Teige*, stud. VII. tř. g. v Praze II., Žitná ul.)

Označme R poloměr dolní, r horní základny, s stranu v výšku a $2p$ obvod osového řezu.

Pak jest

$$p = R + r + s \tag{1}$$

Povrch komolého kužele jest vyjádřen vzorcem

$$P = \pi\,(R^2 + r^2 + s\,(R + r)).$$

Dále máme

$$s^2 = (R - r)^2 + v^2 \tag{2}$$

Ze vzorců (1) a (2) plyne

$$\begin{aligned} R^2 + 2Rr + r^2 &= (p - s)^2 \\ R^2 - 2Rr + r^2 &= s^2 - v^2 \end{aligned}$$

a z toho sečtením

$$\begin{aligned} 2\,(R^2 + r^2) &= (p - s)^2 + s^2 - v^2 \\ &= p^2 - v^2 - 2s\,(p - s). \end{aligned}$$

Ježto dle vzorce 1. jest

$$2s\,(\mathrm{R} + r) = 2s\,(p - s),$$

bude

$$2\,(R^2 + r^2 + s\,(R + r)) = p^2 - v^2$$

$$P = \frac{\pi}{2}\,(p^2 - v^2)$$

Závisí tedy velikost povrchu komolého kužele přímého pouze na obvodě a výšce v osového řezu a tím tvrzení dokázáno.

Vzorec $P = \frac{\pi}{2}(p^2 - v^2)$ platí ovšem i pro úplný kužel přímý.

Úloha 14.

Vypočtěte povrch a krychlový obsah krystallografického dvanáctistěnu pětiúhelníkového, dány-li jsou jeho hrany a (jedna ze šesti), b (jedna ze 24). *V. Rychlík.*

Řešení: Zasílá p. *Josef Hanák*, stud. VIII. tř. g. v Prostějově.

Základem krystallografického dvanáctistěnu pětiúhelníkového jest krychle. Můžeme si tedy rozděliti celé těleso na krychli a šest shodných střechovitých těles, jichž základnou jest stěna krychle, pobočnými stěnami dva shodné lichoběžníky L a dva trojúhelníky $\triangle$.

Označme hranu krychle h a odlehlost bodu, v němž stýkají se hrany a, b, od stěny krychle v.

Promítněme potom výšku lichoběžníka v_1 a výšku trojúhelníka v_2 do stěny krychle. Oba promítací trojúhelníky $\triangle_1\ (v_1, \frac{h}{2}, v)$, $\triangle_2\ (v_2, \frac{h\text{-}a}{2}, v)$ jsou podobné, neboť odchylka lichoběžníka a odchylka trojúhelníka od stěny krychle jsou úhly doplňkové.

Z podobnosti obou trojúhelníků plyne úměra

$$2v : h = (h - a) : 2v$$

Výšku v možno vyjádřiti také z pravoúhlého trojúhelníka, v němž jest hrana b, a z trojúhelníka $\triangle_1$ nebo $\triangle_2$

$$v^2 = b^2 - \left[\left(\frac{h-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right]$$

Řešením těchto rovnic obdržíme

$$v = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{3}} \qquad (1)$$

$$h = \tfrac{1}{2}\left(a + \sqrt{\frac{16b^2 - a^2}{3}}\right), \qquad (2)$$

kdež ve výraze pro h vzato znamení $+$, poněvadž $h > a$.

Je-li známo h, vypočítáme v_1 a v_2 z pravoúhlých trojúhelníků $\triangle_1$ a $\triangle_2$.

$$v_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}\left(16b^2 - a^2 + 3a\sqrt{\frac{16b^2 - a^2}{3}}\right)} \qquad (3)$$

$$v_2 = \frac{4}{1}\sqrt{\frac{2}{3}\left(16b^2 - a^2 - 3a\sqrt{\frac{16b^2 - a^2}{3}}\right)} \qquad (4)$$

Tím je vše připraveno pro výpočet povrchu a obsahu

$$P = 12\,(L + \triangle)$$

$$P = 6\,[(a + h)\,v_1 + hv_2] = 6\,[av_1 + h\,(v_1 + v_2)],$$

kdež v_1, a_2 h určeny vzorci (3) (4) (2).

Krychlový obsah můžeme počítati na základě svrchu uvedeného rozkladu. Ono střechovité těleso můžeme pokládati za šikmo sříznutý hranol trojboký a bude tedy jeho krychlový obsah roven třetině ze součinu kolmého řezu a součtu pobočných hran. Při tomto ponětí jsou „pobočnými hranami“ hřeben střechovitého tělesa (hrana' a) a dvě hrany krychlové (h), „kolmým řezem“ rovnoramenný trojúhelník o základně h a výšce v. Jest tedy krychlový obsah střechovitého tělesa

$$\frac{1}{6}\,av\,(2h + a)$$

a krychlový obsah krystallografického dvanáctistěnu pětiúhelníkového

$$V = h^3 + 2v\,h^2 + av\,h$$

kdež h a v určeny jsou vzorci (1), (2).

Úloha 15.

Parabola $y^2 = 2px$ dotýká se kružnice $(x - a)^2 + y^2 = r^2$; který jest její parametr p a které jsou rovnice společných tečen? Jak sestrojí se tato parabola?

Prof. *Jaroslav Doležal.*

Většina p. řešitelů určuje parametr hledané paraboly tím, že vyjádří podmínku, aby průsečíky její s kružnicí splývaly. Naleznou tak

$$p = a - \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Zajímavou konstrukci udává p. A. Kollmann stud. VII*a* tř. r. na Král. Vinohradech.

Osu y, vrcholovou to tečnu paraboly P můžeme považovati za chordálu dané kružnice K a nullové kružnice určené bodem t, což jest průsečík společné tečny T obou křivek s osou paraboly x.

Jeť přímka y kolmá na centrálu obou kružnic, osu x, a dále půlí úsečku společné tečny T obsaženou mezi bodem t a společným bodem dotyčným. Vedeme-li tedy z kteréhokoliv bodu s osy y tečnu na K a opíšeme jí co poloměrem ze středu s kružnici, protne nám tato osu x v bodě t, z něhož jest potřebí vésti toliko tečnu T na K, abychom nalezli společný bod dotyčný. Subnormála v něm nám pak poskytuje parametr.

Úloha 16.

Dány jsou dvě kružnice K_1 a K_2. Jaké jest geometrické místo pólu tečny kružnice K_1 vzhledem ke kružnici K_2? Proveďte diskussi při různých poloměrech a vzájemných polohách kružnic K_1 a K_2. *Augustin Žáček*

Řešení: Zasílá p. *Boža Barták*, stud. r. v Karlíně.

Volme jednu kružnici v poloze středové a střed druhé na ose x. Pak jsou rovnice obou kružnic

$$K_1 \equiv (x-a)^2 + y^2 = r_1^2$$
$$K_2 \equiv x^2 + y^2 = r_2^2.$$

Dotyčný bod tečny kružnice K_1 označme $M(x_1, y_1)$, pol její vzhledem ke K_2 označme $P(\xi, \eta)$.

Že tečna kružnice K_1, jejíž rovnice jest

$$T_1 \equiv (x-a)(x_1-a) + yy_1 = r_1^2$$

jest zároveň polárou bodu $P(\xi, \eta)$ vzhledem ke kružnici K_2, tak že jest

$$T_1 \equiv P_1 \equiv x\xi + y\eta = r_2^2,$$

jest vyjádřeno podmínkou

$$\frac{x_1 - a}{y_1} = \frac{\xi}{\eta} \tag{1}$$

Bod M leží na K_1; jest tedy splněna podmínka

$$(x_1 - a)^2 + y_1^2 = r_1^2 \tag{2}$$

a také na poláře polu P, tak že

$$\xi x_1 + \eta y_1 = r_2^2. \tag{3}$$

Vyloučíme-li z rovnic (1)—(3) souřadnice x_1, y_1, obdržíme rovnici hledaného geometrického místa

$$(\xi^2 + \eta^2) r_1^2 = (r_2^2 - a\xi)^2, \tag{4}$$

což jest rovnice kuželosečky.

Pro $r_1 = 0$ degeneruje kuželosečka ve dvojitě čítanou přímku $\xi = \frac{r_2^2}{a}$, kteráž při $a = 0$ uniká do nekonečna.

Uvažujme dále případ, kde $r_1 = 0$.

Je-li $r_2 = 0$, redukuje se rovnice (4) na rovnici

$$\xi^2 \left(1 - \frac{a^2}{r_1^2}\right) + \eta^2 = 0,$$

která představuje

při $| a | > r_1$ dvě reálné přímky,
při $| a | = r_1$ dvě přímky splývající s osou x,
při $| a | < r_1$ dvě přímky imaginární
(při $a = 0$ jsou to přímky isotropické).

Předpokládejme tedy dále, že $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$.

Píšeme-li rovnici (4) ve tvaru

$$r_1^2 \eta^2 = (a^2 - r_1^2) \xi^2 - 2a r_2^2 \xi + r_2^4 \tag{5}$$

vidíme ihned, že pro $a = \pm r_1$ představuje parabolu.

Je-li $a \neq \pm r_1$, můžeme psáti rovnici (5) ve tvaru

$$(a^2 - r_1^2) \left(\xi - \frac{a r_2^2}{a^2 - r_1^2}\right)^2 - \eta^2 r_1^2 - \frac{r_1^2 r_2^4}{a^2 - r_1^2} = 0,$$

z čehož vidíme, že představuje

při $| a | > r_1$ hyperbolu
při $| a | < r_1$ ellipsu
(speciálně při $a = 0$ kružnici).

Úloha 17.

Řešiti soustavu rovnic

$$x^2 - xy + 2y + 3 = 0$$
$$xy - y^2 + 4x + 6 = 0.$$

Prof. *Rud. Hruša.*

(Řešení zaslal p. *Karel Zvěřina*, stud. VII. tř. gymn. v Boskovicích.)

Znásobíme-li první rovnici dvěma a upravíme-li obě rovnice, obdržíme

$$2x(x-y)+4y+6=0,$$
$$y(x-y)+4x+6=0,$$

a odečtením

$$(y-x)(y-2x)+4(y-x)=0,$$

z čehož

$$a)\quad y-x=0,\qquad b)\quad y-2x+4=0.$$

Po dosazení těchto vztahů do jedné z daných rovnic vychází

$$x_1=-\frac{3}{2},\quad y_1=-\frac{3}{2},$$
$$x_{2,3}=4\pm\sqrt{11},\quad y_{2,3}=2(2\pm\sqrt{11}).$$

Úloha 18.

V kterých mezích jsou obsaženy výrazy

$$a)\quad \sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}+\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}$$

$$b)\quad \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}+\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}}.$$

Jaký jest toho význam geometrický? *R.*

(Řešení zaslal p. *Frant. Kornhäuser*, stud. VIIa. tř. r. v Karlíně.)

a, b jest patrně pokládati za konstantní veličiny kladné a odmocniny bráti se znamením kladným.

$a)$ Položme

$$u=\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}+\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}.$$

Pak bude

$$u^2=a^2+b^2+2\sqrt{(a^4+b^4)\sin^2\varphi\cos^2\varphi+a^2b^2(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)},$$

a píšeme-li

$$\cos^4\varphi+\sin^4\varphi=1-2\sin^2\varphi\cos^2\varphi,$$
$$4\sin^2\varphi\cos^2\varphi=\sin^2 2\varphi,$$

bude

$$u^2=a^2+b^2+\sqrt{(a^2-b^2)^2\sin^2 2\varphi+4a^2b^2}.$$

Odmocninu ve výrazu tomto dlužno bráti opět se znamením kladným. Výraz pod odmocnítkem nabude největší hodnoty při $sin^2 2\varphi = 1$, $\varphi = 45^0$, totiž $(a^2 + b^2)^2$ a nejmenší hodnoty při $sin^2 2\varphi = 0$, $\varphi = 0$, totiž $4a^2b^2$.

Z toho vidíme, že y jest obsaženo v mezích

$$a + b \leqq y \leqq \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

b) Podobně při výrazu x

$$v = \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}.$$

jest

$$v^2 = \frac{a^2 + b^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)}$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)}},$$

$$\frac{v^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 2\varphi + 4a^2b^2} + \frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 2\varphi + 4a^2b^2}}.$$

Bude-li $sin^2 2\varphi$ míti největší možnou hodnotu, totiž 1 (při $\varphi = 45^0$), bude míti $\frac{v^2}{4}$ nejmenší, a bude-li míti $sin^2 2\varphi$ nejmenší hodnotu, totiž 0 (při $\varphi = 0^0$), bude míti $\frac{v^2}{4}$ hodnotu největší. Tak nalezneme

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leqq v \leqq \frac{a + b}{ab}.$$

Geometrický význam:

Zvolme si u ellipsy o poloosách a, b dva k sobě kolmé poloměry r_1 a r_2.

Koncový bod poloměru r_1 má souřadnice $(r_1 \cos \varphi, r_1 \sin \varphi)$ a poněvadž leží na ellipse, jest

$$\frac{r_1^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{r_1^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1$$

a tedy

$$\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} = \frac{ab}{r_1}$$

a vyjádříme-li podobně, že koncový bod poloměru r_2 o souřadnicích ($-r_2 \sin \varphi$, $r_2 \cos \varphi$) leží na ellipse, bude

$$\frac{r_2^2 \sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{r_2^2 \cos^2 \varphi}{b^2} = 1$$

a tedy

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} = \frac{ab}{r_2}.$$

Jest tudíž

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{u}{ab}$$

a

$$r_1 + r_2 = v\, ab.$$

Součet převratných hodnot dvou k sobě kolmých poloměrů ellipsy jest největší, když poloměry ty půlí úhel os a nejmenší, když splývají s osami.

Součet dvou k sobě kolmých poloměrů ellipsy jest největší, když poloměry ty se stotožňují s osami, nejmenší, když půlí úhel os.

Jiný výklad geometrický.

Body na ellipse lze parametricky znázorniti rovnicemi

$$x = a \cos \varphi,$$
$$y = b \sin \varphi,$$

kdež úhel φ se nazývá excentrickou anomalií.

Má-li koncový bod průměru excentrickou anomalii φ, má koncový bod průměru sdruženého excentrickou anomalii $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Poloviční délky sdružených průměrů jsou pak

$$r_1 = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi},$$
$$r_2 = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi},$$

tak že

$$u = r_1 + r_2,$$
$$v = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2},$$

a platí věty:

Součet dvou sdružených průměrů ellipsy jest největší, jsou-li oba sdružené průměry rovné délky (o excentrické anomalii 45° a 135°), a nejmenší, splývají-li s osami.

Součet převratných hodnot sdružených průměrů ellipsy jest největší, splývají-li sdružené průměry s osami a nejmenší pro sdružené průměry sobě rovné.

Úloha 19.

Stanovte veličiny x_n, y_n dané rekurrentními rovnicemi

$$x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} \sin^2 \alpha$$
$$y_n = y_{n-1} + 2x_{n-1} \cos^2 \alpha,$$

známo-li, že $x_0 = 0$, $y_0 = \cos \alpha$. Dr. *Marian Haas.*

(Řešení zaslal p. *A. Kollmann*, stud. VIIa. tř. r. na Král. Vinohradech.)

Dosaďme za $x_n = \sin \alpha \, \xi_n$, $y_n = \cos \alpha \, \eta_n$, tím promění se rovnice na

$$\xi_n = \xi_{n-1} + \eta_{n-1} \sin 2\alpha,$$
$$\eta_n = \eta_{n-1} + \xi_{n-1} \sin 2\alpha.$$

Sečtením a odečtením obdržíme

$$\xi_n + \eta_n = (\xi_{n-1} + \eta_{n-1})(1 + \sin 2\alpha),$$
$$\xi_n + \eta_n = (\xi_{n-1} - \eta_{n-1})(1 - \sin 2\alpha).$$

Dosadíme-li v těchto rovnicích za n postupně všechny hodnoty do 1 a obdržené rovnice znásobíme, dostáváme

$$\xi_n + \eta_n = (\xi_0 + \eta_0)(1 + \sin 2\alpha)^n,$$
$$\xi_n - \eta_n = (\xi_0 + \eta_0)(1 - \sin 2\alpha)^n,$$

čili

$$\frac{x_n}{\sin \alpha} + \frac{y_n}{\cos \alpha} = (1 + \sin 2\alpha)^n,$$

$$\frac{x_n}{\sin \alpha} - \frac{y_n}{\cos \alpha} = -(1 - \sin 2\alpha)^n,$$

z čehož

$$x_n = \frac{\sin \alpha}{2}((1 + \sin 2\alpha)^n - (1 - \sin 2\alpha)^n),$$

$$y_n = \frac{\cos \alpha}{2}((1 + \sin 2\alpha)^n + (1 - \sin 2\alpha)^n),$$

což můžeme také psáti, uvážíme-li, že

$$1 + \sin 2\alpha = 2 \cos^2 (45^0 - \alpha),$$
$$1 - \sin 2\alpha = 2 \sin^2 (45^0 - \alpha),$$

ve tvaru

$$x_n = 2^{n-1} \sin \alpha \left(\cos^{2n}(45^0 - \alpha) - \sin^{2n}(45^0 - \alpha)\right),$$
$$y_n = 2^{n-1} \cos \alpha \left(\cos^{2n}(45^0 - \alpha) + \sin^{2n}(45^0 - \alpha)\right).$$

Úloha 20.

Který kužel má při daném obsahu nejmenší povrch?

Týž.

(Řešení zaslal p. *Boži Barták* z karlínské reálky.)

Označíme-li obsah K a povrch P, máme rovnice

$$\pi r(r + s) = P, \quad \pi r^2 v = 3K,$$

které zavedením úhlu φ, který svírá strana se základnou, se změní v následující:

$$\pi s^2 \cos \varphi (1 + \cos \varphi) = P; \quad \pi s^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi = 3K.$$

První rovnici umocníme třemi, druhou dvěma. V podílu jejich vymizí strana s, a úhel φ určíme z rovnice

$$\pi \frac{(1 + \cos \varphi)^3}{\cos \varphi \sin^2 \varphi} = \frac{P^3}{9K^2}.$$

Dosadíme-li $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ a krátíme součtem $1 + \cos \varphi$, dostaneme pro $\cos \varphi$ rovnici kvadratickou

$$\frac{(1 + \cos \varphi)^2}{\cos \varphi (1 - \cos \varphi)} = \frac{P^3}{9\pi K^2} = p,$$

z níž vypočítáme

$$\cos \varphi = \frac{p - 2 \pm \sqrt{p(p - 8)}}{2(p + 1)}.$$

Reálné řešení žádá $p \geqq 8$ čili $P^3 \geqq 72\pi K^2$.

Minimální $p = 8$, $P^3 = 72\pi K^2$, z čehož plyne

$$\cos \varphi = \frac{1}{3}.$$

Žádaný kužel má třikrát delší stranu nežli poloměr základny.

Úloha 21.

Kružnici o poloměru $\varrho = 25\, cm$ *opsán jest rovnostranný mnohoúhelník, jehož strana měří* $a = 9\, cm$. *Kolik čítá stran a které má úhly i obsah?*

Týž.

(Řešení zaslal p. *Rudolf Šimůnek*, stud. VII. třídy akad. gymn. v Praze.)

Hledaný mnohoúhelník může býti buď licho- nebo sudoúhelníkem. Pro prvý případ plyne, že úhly středové musely by býti sobě rovné, lichoúhelník byl by tedy pravidelným a poloviční úhel středový byl by určen relací

$$tg\,\frac{180^0}{n}=\frac{a}{2\varrho}=0{\cdot}18.$$

Hledané n bylo by tedy obsaženo mezi $n=15 a n=17$, z nichž ani jedno ani druhé nevyhovuje. Může tedy vyhovovati pouze mnohoúhelník o sudém počtu stran.

Označíme-li vrcholy mnohoúhelníka $A, B, C, D, \ldots$, body dotyčné $A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots$, bude

$$\sphericalangle AOA_1=\sphericalangle B_1OC=\sphericalangle COC_1=\sphericalangle D_1OE=\sphericalangle EOE_1=\ldots=x$$
$$\sphericalangle A_1OB=\sphericalangle BOB_1=\sphericalangle C_1OD=\sphericalangle DOD_1=\sphericalangle E_1OF=\ldots=y$$

Tím vznikne u shodných $\triangle$ $ABO, BOC, COD, \ldots$, jichž úhly u vrcholu jsou $x+y$, musí tedy

$$x+y=\frac{360^0}{n}$$

a současně

$$tgx+tgy=\frac{a}{\varrho}.$$

Goniometrické rovnici dáme postupně tvar:

$$\frac{sin\,(x+y)}{cos\,x\,cos\,y}=\frac{a}{\varrho}$$

$$cos\,x\,.\,cos\,y=\frac{\varrho}{a}\,sin\,\frac{360^0}{n}$$

$$cos\,(x+y)+cos\,(x-y)=\frac{2\varrho}{a}\,sin\,\frac{360^0}{n},$$

$$cos\,(x-y)=\frac{2\varrho}{a}\,sin\,\frac{360^0}{n}-cos\,\frac{360^0}{n}.$$

Zavedeme-li sem pomocný úhel λ rovnicí

$$\frac{2\varrho}{a}=cotg\,\lambda,$$

obdržíme pro $\cos(x-y)$ vzorec výhodný pro logarithmické počítání

$$\cos(x-y)=\frac{\sin\left(\frac{360^0}{n}-\lambda\right)}{\sin\lambda}.$$

Aby řešení bylo možné, musí

$$\frac{360}{n}-\lambda<\lambda,$$

$$\text{čili } n\lambda>180^0.$$

Jelikož dále

$$x-y<x+y,\ \cos(x-y)>\cos(x+y),$$

musí býti splněna podmínka

$$\frac{2\varrho}{a}\sin\frac{360^0}{n}-\cos\frac{360^0}{n}>\cos\frac{360^0}{n},\ tg\frac{360^0}{n}>\frac{a}{\varrho}.$$

Položíme-li podobně jako dříve

$$\frac{a}{\varrho}=tg\lambda',$$

musí

$$\frac{360}{n}>\lambda'$$

$$n\lambda'<360^0.$$

Při daných hodnotách $a=9, \varrho=25$, vychází $\lambda=10^0 12' 14''$; $\lambda'=19^0 47' 56''$; vyvinutým podmínkám vyhovuje toliko $n=18$.

Obsah daného osmnáctiúhelníka

$$P=\frac{18a\varrho}{2}=2025\,cm^2.$$

K vypočtení úhlů x, y máme rovnici

$$\cos(x-y)=\frac{\sin(20^0-\lambda)}{\sin\lambda},$$

z níž plyne $x=18^0 5' 8''$, $y=1^0 54' 52''$. Úhly mnohoúhelníka pak jsou

$$\alpha_1=2(90^0-x)=143^0 49' 43'',$$
$$\alpha_2=2(90^0-y)=176^0 10' 16''.$$

Úloha 22.

Pětiúhelník z tečen má strany 9, 15, 21, 22, 13. Který je poloměr vepsané kružnice? *Týž.*

(Řešení zaslal p. *Josef Hanák*, stud. VIII. tř. gymn. v Prostějově.)

Označíme-li úhly pětiúhelníka α_k a vzdálenosti dotykových bodů od vrcholů x_k, máme obecně

$$tg\,\frac{\alpha_k}{2}=\frac{\varrho}{x_k}.$$

Délky x_K vypočítáme z rovnic

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=9\\ x_2+x_3&=15\\ x_3+x_4&=21\\ x_4+x_5&=22\\ x_5+x_1&=13.\end{aligned}$$

Dostaneme pak $x_1=3$, $x_2=6$, $x_3=9$, $x_4=12$, $x_5=10$.

Jelikož pro úhly pětiúhelníka platí

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6=540^0,$$

čili

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{2}=270^0-\frac{\alpha_4+\alpha_5}{2},$$

máme též

$$tg\,\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{2}=cotg\,\frac{\alpha_4+\alpha_5}{2}.$$

Rozvineme-li dle vzorce

$$tg\,(x+y+z)=\frac{tgx+tgy+tgz-tgx\,tgy\,tgz}{1-tgx\,tgy-tgy\,tgz-tgz\,tgx},$$

a dosadíme za $tg\,\frac{\alpha_k}{2}$ hořejší hodnotu, dostaneme rovnici

$$\frac{\frac{\varrho}{x_1}+\frac{\varrho+\varrho}{x_2\,x_3}-\frac{\varrho^3}{x_1x_2x_3}}{1-\frac{\varrho^2}{x_1x_2}-\frac{\varrho^2}{x_2x_3}-\frac{\varrho^2}{x_3x_1}}=\frac{\frac{x_4x_5}{\varrho^2}-1}{\frac{x_4}{\varrho}+\frac{x_5}{\varrho}}.$$

Při známých hodnotách xk po snadné úpravě nabývá předchozí rovnice formy

$$2\varrho^4 - 2250\varrho^2 + 972 = 0,$$

z níž vypočítáme

$$\varrho_1 = 6\sqrt{3} \qquad \varrho_2 = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Větší poloměr odpovídá pětiúhelníku prvého řádu, kdežto menší vede k pětiúhelníku řádu druhého.

Úloha 23.

Danému čtyřúhelníku opsati čtyřúhelník, jinému danému čtyřúhelníku podobný. *Jaromír Pilnáček.*

(Řešení zasílá p. *Václav Steinocher*, stud. VI. tř. gymn. v Čes. Budějovicích.)

Dané čtyřúhelníky (konvexní) označme $ABCD$ a $MNPQ$, hledaný čtyřúhelník $M'N'P'Q'$.

Mysleme si úlohu řešenu a předpokládejme, že strany $M'N'$, $N'P'$, $P'Q'$, $Q'M'$ procházejí resp. body A, B, C, D. Podmínku podobnosti obou čtyřúhelníků $MNPQ$ a $M'N'P'Q'$ můžeme si vyjádřiti, vedeme-li úhlopříčky MP, $M'P'$ těmito rovnicemi mezi úhly:

$$\begin{aligned}\sphericalangle NMP &= \sphericalangle N'M'P' \\ \sphericalangle MPN &= \sphericalangle M'P'N' \\ \sphericalangle NMQ &= \sphericalangle N'M'Q' \\ \sphericalangle QPN &= \sphericalangle Q'P'N',\end{aligned}$$

poněvadž tyto mají za následek podobnost trojúhelníků MNP, $M'N'P'$ a MPQ, $M'P'Q'$. Poněvadž známe úhly $N'M'Q'$ a $Q'P'M'$, můžeme sestrojiti nad stranami DA a BC jako tětivami dva kruhové oblouky, na nichž musí body M' a P' ležeti. Veďme úhlopříčku $M'P'$ a označme R, S body, v nichž protíná úhlopříčka ta po druhé kružnice, jimž svrchu vytčené oblouky náležejí; oblouky DR a CS jsou známy, poněvadž známe úhly $P'M'Q'$ a $Q'P'M'$. Můžeme tedy sestrojiti body R a S a tedy také M' a P' atd.

Úloha 24.

Opsána-li danému trojúhelníku soustava trojúhelníků jemu podobných, dokázati, že všechny tyto opsané trojúhelníky mají společný střed kružnic opsaných, ležící v průsečíku výšek daného trojúhelníka. Týž.

(Řešení zasílá p. *Alois Pelikán*, stud. VI. třídy reálky v Telči.)

Dán buď $\triangle ABC$, jemuž opišme trojúhelník podobný s ním $A'B'C'$.

Jelikož v $\triangle ABC$ výšky

$$v_b \perp b, \qquad v_c \perp c,$$

jest úhel BOC výplňkovým k $\sphericalangle CAB = CA'B$, což znamená, že kružnice opsaná trojúhelníku $A'BC$ prochází též průsečíkem výšek trojúhelníka ABC. Z téhož důvodu jím prochází též kružnice opsaná $\triangle AB'C$. Jelikož výšky stojí kolmo na stranách, jest $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OBC$. Avšak $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OB'C$ (poněvadž leží v téže kružnici nad touže tetivou OC) a podobně i $\sphericalangle OBC = \sphericalangle OA'C$, tudíž $\sphericalangle OA'C = \sphericalangle OB'C$ a $\triangle A'B'O$ je rovnoramenný, t. j. $OA' = OB'$.

Analogicky se dokáže, že $OA' = OC' = OB'$ i jest na základě toho bod O středem kružnice opsané $\triangle A'B'C'$, což bylo dokázati.

Úloha 25.

Nazveme-li a', b', c' rozdíly úseků, jež výšky tvoří na stranách trojúhelníka (se zřetelem na znaménka!) dokázati jest, že

$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

Dr. *Karel Čupr.*

(Řešení zaslal p. *Stanislav Šolta*, stud. VII. tř. gymn. v Praze-II., Žitná ul.)

Pro úsečky a', b', c' platí vzorec

$$a' = c \cos \beta - b \cos \gamma,$$
$$b' = a \cos \gamma - c \cos \alpha,$$
$$c' = b \cos \alpha - a \cos \beta.$$

Klademe-li

$$bc\cos\alpha = A,\quad ca\cos\beta = B,\quad ab\cos\gamma = C,$$

bude

$$aa' + bb' + cc' = (B - C) + (C - A) + (A - B) = 0.$$

(Jiné řešení zaslal p. *Viktor Dosoudil*, stud. VII. tř. r. v Prostějově.)

Označme A', B', C' paty a V průsečík výšek.

Pak jest na př.

$$a = BA' + A'C,\quad a' = BA' - A'C,$$

$$aa' = \overline{BA'}^2 - \overline{A'C}^2 = \overline{BA'}^2 + \overline{A'V}^2 - (\overline{A'V}^2 + \overline{A'C}^2)$$

a tedy

$$aa' = BV^2 - CV^2,$$

podobně

$$bb' = CV^2 - AV^2,$$
$$cc' = AV^2 - BV^2,$$

tak že skutečně

$$aa' + bb' + cc' = a,$$

. c . b . d.

Uloha 26.

Sestrojte kružnici o daném poloměru, která prochází daným bodem a jiné dva dané body odděluje harmonicky.

Josef Papřok.

(Řešení zaslal p. *Rudolf Šimůnek*, stud. VII. tř. akad. gymn. v Praze.)

K řešení užijeme věty:

Dvě kružnice, jež se protínají kolmo, stanoví na libovolném paprsku, jenž prochází středem jedné kružnice, čtveřinu harmonických bodů.

(Viz: Sobotka, Deskr. geom. § 125, neb článek p. Dra Bydžovského ve 3. čís. letošní přílohy.)

Má-li hledaná kružnice oddělovati body A, B harmonicky, sestrojme nad úsečkou AB jako průměrem kružnici. Pak středy kružnic g, které opsány poloměrem r protínají tuto kolmo, leží na soustředné kružnici s poloměrem $r^2 + \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2$. Má-li mimo to hledaná kružnice procházeti bodem C, leží střed její na kružnici poloměrem r kol bodu C opsané. Kde tyto dvě kružnice se protnou, tam jsou středy hledaných kružnic, které procházejí bodem C a body A, B oddělují harmonicky.

Pan *Frant. Kornhäuser*, stud. VIIa. tř. r. v Karlíně, užívá dále věty:

Geometrické místo středů všech kružnic, protínajících dvě dané kružnice orthogonálně, jest chordála obou daných kružnic, a udává konstrukci:

Nad úsečkou AB jako průměrem opíšeme kružnici K a sestrojíme pak chordálu c této kružnice a nullové kružnice dané bodem C. Průsečíky této chordály a kružnice L opsané kolem bodu C poloměrem r jsou středy hledaných kružnic. Dle vzájemné polohy chordály c a kružnice L má úloha 2, 1 neb žádné reálné řešení.

Úloha 27.

Sestrojte kružnici dotýkající se dvou daných kružnic, tak aby tětiva, spojující body dotyčné, měla danou délku. *Týž.*

(Řešení zaslal p. *Václav Steinocher*, stud. VI. tř. g. v Čes. Budějovicích.)

Středy daných kružnic buďte O_1 a O_2. Kružnice hledaná dotýkejž se kruhu prvého v bodě A, kruhu druhého v bodě B. Pak $\overline{AB} = a$. Přímka určená body A a B musí procházeti středem podobnosti O_I obou kružnic. $\overline{O_I B} = x$. Pak z podobnosti $\triangle O_1 O_I A$ a $O_2 O_I B$ plyne

$$\overline{O_1 O_I} : \overline{A O_I} = \overline{B O_I} : \overline{O_2 O_1}$$

čili

$$m : (x + a) = x : n$$

aneb

$$x \,.\, (x + a) = mn$$

(kdež $m = \overline{O_1 O_I}$, $n = \overline{O_2 O_I}$).

Dle toho lze lehce x a tím i bod B stanoviti. Známe-li bod B, možno hledanou kružnici sestrojiti.

Úloha 28.

Sestrojiti trojúhelník, dána-li strana c, úhel γ a poměr λ, ve kterém průsek výšek dělí výšku příslušnou ke straně c! Vypočísti strany a, b! (na př. $\gamma = 60^\circ$, $\lambda = \pm \frac{1}{4}$).

Dr. *Josef Tomáš.*

Řešení. Zasílá p. *Josef Berný*, stud. VIIa. tř. r. v Jičíně.

K sestrojení hledaného trojúhelníku užijeme vět:

Geometrické místo vrcholů trojúhelníků o stálé základně c a protějším úhlu γ jest kruhový oblouk.

Geometrické místo průsečíků výšek pro takové trojúhelníky jest kružnice L souměrně sdružená vzhledem ke straně c s kružnicí K, na níž leží vrcholy.

Horní úsek výšky jest pro všechny ty trojúhelníky stejný a rovný tětivě v kružnici K, sestrojené kolmo v koncovém bodě strany c.

Z horního úseku a poměru obou úseků snadno sestrojíme výšku a pak i celý trojúhelník.

Řešení trigonometrické.

Označme A', B', C' paty výšek, V jich průsečík a nechť

$$\lambda = \frac{C'V}{CV}.$$

Z pravoúhlého $\triangle C'BC$ plyne

$$C'B = CC' \, cotg \, \beta,$$

pravoúhlého $\triangle C'BV$, kdež úhel při V jest α, plyne

$$C'B = VC' \, tg \, \alpha$$

a tedy

$$CC' \, cotg \, \beta = VC' \, tg \, \alpha$$
$$CV + VC' = CC',$$
$$\lambda = \frac{C'V}{CV},$$

z čehož plyne

$$tg \, \alpha \, tg \, \beta = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

a zároveň

$$\alpha + \beta = 180^0 - \gamma.$$

Položme

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda} = tg \, \varphi, \qquad 180^0 - \gamma = \psi.$$

Systém rovnic

$$tg \, \alpha \, tg \, \beta = tg \, \varphi, \tag{1}$$
$$\alpha + \beta = \psi \tag{2}$$

lze snadno řešiti výhodně pro logarithmické počítání.

Z rovnice (1) plyne

$$\frac{1 + tg\,\alpha\, tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta} = \frac{1 + tg\,\varphi}{1 - tg\,\varphi},$$

neboli

$$\frac{cos\,(\alpha - \beta)}{cos\,(\alpha + \beta)} = tg\,(45^0 + \varphi)$$

a užijeme-li rovnice (2)

$$cos\,(\alpha - \beta) = cos\,\psi\, tg\,(45^0 + \varphi),$$

z čehož určíme $\alpha - \beta$. Z $\alpha + \beta$ a $\alpha - \beta$ určíme pak snadno α i β.

Nechceme-li počítati logarithmicky, užijeme identity

$$tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha\, tg\,\beta\, tg\,\gamma$$

a ježto

$$tg\,\alpha\, tg\,\beta = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

bude

$$tg\,\alpha + tg\,\beta = -\frac{1}{\lambda} tg\,\gamma,$$

tak že $tg\,\alpha$ a $tg\,\beta$ jsou kořeny rovnice kvadratické

$$\lambda t^2 + tg\,\gamma\, t + (\lambda - 1) = 0.$$

Úloha 29.

Ke dvěma kruhům zevně se dotýkajícím vedena úsečka společné vnější tangenty mezi body dotyčnými. Otáčí-li se obrazec takto sestrojený okolo přímky středné, který jest povrch rotačního tělesa, jsou-li povrchy koulí k_1, k_2? *Týž.*

Řešení. Zasílá p. *Jaroslav Kučera*, stud. VII. tř. r. v Čes. Budějovicích.

Označme poloměry obou kruhů r_1, r_2, jich středy O_1, O_2, společný bod dotyčný C, body dotyku společných tečen A, B a A', B', kdež $AB = A'B' = t$; průsečík O_1O_2 s AA' označme M, O_1O_2 s BB' označme N, $MA = \varrho_1$, $NB = \varrho_2$, $CA = s_1$, $CB = \sigma_2$.

V bodě C vztyčme kolmici na O_1O_2, protínající AB v bodě D. I bude $AD = DC = DB = \frac{t}{2}$ a tedy též $MC = CN$.

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 2CD = t.$$

Povrch pláště přímého komolého kužele, jehož strana jest $AB = t$, jest $S = \pi(\varrho_1 + \varrho_2)t$.

Dosadíme-li $\varrho_1 + \varrho_2 = t$, jest $S = \pi t^2$; avšak $t^2 = s_1^2 = \sigma_2^2$, poněvadž $\triangle ABC$ jest pravoúhlý.

Jest tedy $S = \pi(s_1^2 + \sigma_2^2) = \pi s_1^2 + \pi\sigma_2^2 = v_1 + v_2$, jsou-li v_1, v_2. povrchy vrchlíků opsaných oblouky $\widehat{AC}$ a $\widehat{CB}$.

Plášť onoho kužele komolého rovná se tedy součtu obsahů obou vrchlíků, opsaných oblouky $\widehat{AC}$ a $\widehat{CB}$. Celý povrch tělesa rotačního, jež opisuje obrazec $A\widehat{BB'}$, $\widehat{A'A}$, otáčeje se kol osy O_1O_2 jest roven součtu povrchů obou koulí o poloměrech r_1, r_2

$$p = k_1 + k_2 = 4\pi(r_1^2 + r_2^2).$$

Úloha 30.

Vedeme-li z nějakého bodu mimo kruh, ale v rovině jeho ležícího, tangenty až k bodům dotyčným, jest dokázati, že povrch tělesa vzniklého rotací onoho obrazce kol osy souměrnosti rovná se součtu povrchů všech koulí do rotačního tělesa vepsaných tak, že středy jejich leží na ose rotační a vždy dvě koule sousední zevně se dotýkají. Který jest povrch a krychlový obsah tělesa, dán-li poloměr a vzdálenost středu kruhu od průseku tečen. *Tý.*

Řešení zasílá p. *Boža Barták*, stud. v Karlíně.

Uvažujeme-li těleso skládající se z největší koule a $n - 1$ koulí následujících, můžeme na základě předešlé úlohy snadno dokázati, že povrch skládající se z pláště komolého kužele dotyčného a koncových dvou vrchlíků rovná se součtu povrchů oněch n koulí. Z toho pak plyne snadno, necháme-li n růsti do nekonečna, věta vyslovená v prvé části úlohy.

Označme O střed největší z kružnic K, onen bod mimo kružnici K ležící S, dotyčný bod jedné z tečných vedených z bodu S na K pak T. Nechť $TM \perp OS$, $OS = d$, $OM = m$, $ST = t$.

Označme povrch tělesa P a jeho krychlový obsah V.

Povrch P skládá se z kuželového pláště a z vrchlíku

$$P = \pi\varrho t + 2\pi r(r + m).$$

Poněvadž jest

$$\varrho d = rt, \quad \text{tedy} \quad \varrho = \frac{rt}{d},$$

$$r^2 = d \, . \, m, \text{ tedy } m = \frac{r^2}{d},$$

$$t^2 = d^2 - r^2,$$

bude

$$P = \pi \frac{rt^2}{d} + 2\pi r\left(r + \frac{r^2}{d}\right) = \frac{\pi r}{d}(d^2 - r^2 + 2r(d + r)).$$

$$P = \frac{\pi r(d + r)^2}{r}.$$

Krychlový obsah V skládá se z kulové úseče a dvojkužele, tak že

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2(r + m) + \frac{1}{3}\pi \varrho^2 d,$$

a poněvadž

$$m = \frac{r^2}{d}, \quad \varrho^2 = \frac{r^2 t^2}{d^2} = \frac{r^2(d^2 - r^2)}{d^2},$$

nalezneme po snadné redukci

$$V = \frac{\pi r^2 (d + r)^2}{3},$$

tedy $V = \frac{Pr}{3}$.

Úloha 31.

Které jest geometrické místo průseků tečen, vedených k ellipse koncovými body a společným vrcholem dvou tětiv ohnisky procházejících? *Tý͡ř.*

(Řešení zaslal p. *Frant. Kornhäuser,* stud. VIIa. tř. r. v Karlíně.)

Mějme dánu ellipsu osovou rovnicí $E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, zvolme na ní bod $M(\alpha, \beta)$ a veďme jím a ohnisky $F_1(e, 0)$ a $F_2(-e, 0)$ příslušné tětivy, které protínají ellipsu E v bodech N, P. V bodech M, N, P veďme tečny T_M, T_N, T_P, máme pak ustanoviti geom. místo jejich průsečíků A, B, C.

Snadno ukážeme, že geom. místo bodů A, t. j. průsečíků tečen T_M a T_N jest řídící přímka L_1 ohniska F_1. Přímka $\overline{MN}$ jde stále ohniskem F_1 a průsečík příslušných tečen v bodech M, N jest vlastně pólem přímky $\overline{MN}$. Známe však větu: prochází-li přímka jistým bodem, jest geom. místem pólů této přímky ke kuželosečce polára tohoto bodu. Polárou ohniska F_1 jest však přímka řídící L_1. Podobně jest geom. místem bodů B, t. j. průsečíků T_M a T_P řídící přímka L_2 druhého ohniska.

Zbývá určiti geom. místo bodů C, průsečíků T_N a T_P, které budeme uvažovati jako geom. místo pólů pohyblivé poláry NP.

Souřadnice bodu N nazveme x_1, y_1, bodu P nazveme x_2, y_2. Přímka $\overline{NP}$ má rovnici

$$P \equiv x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + y_2 x_1 - y_1 x_2 = 0.$$

Má-li býti přímka $Ax + By + C = 0$ polárou bodu (X, Y) k ellipse $E \equiv a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, pak platí pro souřadnice pólu známé vztahy

$$X = -\frac{a^2A}{C}, \qquad Y = -\frac{b^2B}{C}.$$

V našem případě jsou souřadnice bodu $C(X, Y)$

$$X = \frac{a^2(y_1 - y_2)}{y_1x_2 - y_2x_1}, \qquad Y = \frac{b^2(x_2 - x_1)}{y_1x_2 - y_2x_1}.$$

Abychom vyjádřili vztah mezi X a Y, vyjádříme souřadnice bodů N, P souřadnicemi bodu $M(\alpha, \beta)$.

Přímka $\overline{MN}$ jde bodem $F_1(e, 0)$. Platí tedy

$$\overline{MN} \equiv y = \frac{\beta}{\alpha - e}(x - e),$$

Vypočítáme-li průsečíky této přímky $\overline{MN}$ s ellipsou $E \equiv a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, dostaneme pro x hodnotu $x'_1 = \alpha$, $x''_1 = \dfrac{2ea^2 - \alpha(a^2 + e^2)}{a^2 + e^2 - 2e\alpha}$, x'_1 jest souřadnice bodu $M(\alpha, \beta)$, druhá souřadnice x_1 přísluší bodu N. Podobně dostaneme pro $y_1 = -\dfrac{b^2\beta}{a^2 + e^2 - 2\alpha e}$.

Použijeme-li druhého ohniska $F_2(-e, 0)$ dostaneme pro bod P souřadnice

$$x_2 = -\frac{2ea^2 + \alpha(a^2 + e^2)}{a^2 + e^2 + 2e\alpha},$$

$$y_2 = -\frac{b^2\beta}{a^2 + e^2 + 2\alpha e}.$$

Vypočtěme si výrazy

$$y_1 - y_2 = \frac{4b^2e\alpha\beta}{4e^2\alpha^2 - (a^2 + e^2)^2},$$

$$x_2 - x_1 = -\frac{4e(a^2 + e^2)(a^2 - \alpha^2)}{4e^2\alpha^2 - (a^2 + e^2)^2},$$

$$y_1x_2 - y_2x_1 = -\frac{4a^2b^2e\beta}{4e^2\alpha - (a^2 + e^2)^2}.$$

Dosadíme-li do vzorců pro X a Y, dostaneme po krátké redukci

$$X = -\alpha, \tag{1}$$

$$Y = \frac{(a^2 + e^2)(a^2 - \alpha^2)}{a^2\beta}. \tag{2}$$

Jelikož bod $M(\alpha, \beta)$ leží na ellipse E, platí

$$a^4\beta^2 = a^2b^2(a^2 - \alpha^2). \tag{3}$$

Eliminujeme-li z rovnic (1), (2), (3) α a β, obdržíme rovnici

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{a^2 + e^2}{b}\right)^2} = 1,$$

kteréž vyhovují souřadnice geometrického místa bodů C. Jest to ellipsa o poloosách a, $\frac{a^2 + e^2}{b}$. Hlavní její osa jest ve vedlejší ose ellipsy základní a vedlejší osa v ose hlavní ellipsy základní.

Úloha 32.

Které jest geometrické místo všech pólů, majících společné poláry vzhledem k ellipse a rovnoosé hyperbole, jejíž asymptotami jsou osy souřadnic? Které podmínce musí vyhovovati poloosy obou křivek, má-li býti úloha možna? Společný znak všech těch polár? *Tý^.*

(Řešení zaslal p. *A. Kollmann*, stud. VIIa. tř. r. na Král. Vinohradech.)

Budiž $E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ rovnice ellipsy, $H \equiv 2xy = c^2$ rovnice rovnoosé hyperboly, ξ a η souřadnice pólu p. Pak je $P_1 \equiv b^2x\xi + a^2y\eta = a^2b^2$ jeho polára k ellipse a $P_2 \equiv x\eta + y\xi = c^2$ k hyperbole.

Identifikováním těchto rovnic dostáváme vztahy

$$c^2\xi = a^2\eta, \quad b^2\xi = c^2\eta,$$

jež současně jen tehdy obstojí, když $c = \pm\sqrt{ab}$ a promění se tak v rovnici žádaného geometrického místa $M \equiv \eta = \frac{b}{a}\xi$.

Dosadíme-li v rovnici poláry P_1 za $\eta = \frac{b}{a}\xi$, změní se v

$$P \equiv bx + ay - \frac{a^2b}{\xi} = 0,$$

jež ukazuje, že všechny ty poláry jsou rovnoběžné o směrnici $A = -\frac{b}{a}$.

Snadno se přesvědčíme, že ellipsa E a hyperbola H dotýkají se v bodech $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ a $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$. Těmito body prochází též přímka $\eta = \frac{b}{a}\xi$, jež jest geometrickým místem pólů všech polár oběma křivkám společných.

Úloha 33.

Dokažte o ellipse větu: Kružnice nad průvodičem dotýká se kružnice nad hlavní osou. Jak mění se znění této věty při hyperbole a parabole? Prof. *Jar. Doležal.*

(Řešení zaslal p. *Alois Pelikán*, stud. VI. tř. r. v Telči.)

K libovolnému bodu B na ellipse se nacházejícímu sestrojme příslušné k němu průvodiče r_1, r_2 (o nichž platí: $r_1 + r_2 = 2a$) a rozpolme jeden z nich, ku př. r_1, bodem A. Spojnice tohoto bodu se středem O ellipsy je rovnoběžná s druhým průvodičem a protíná kružnici nad hlavní osou $= a$ v bodě C. Tu pak jest

$$AO = \frac{r_2}{2}, \qquad AC = a - \frac{r_2}{2} = \frac{r_1}{2} = AB.$$

Poněvadž spojnice OC prochází středem kružnice nad hlavní osou i kružnice nad průvodičem, jest bod C bodem dotyčným obou kružnic.

Při hyperbole, poněvadž odčítání jest výkonem alternujícím, mohou nastati případy dva: buď se kružnice nad průvodičem dotýká kružnice nad reálnou osou *vně*, anebo ji objímá; jinak zůstane věta v platnosti.

Jestiť *a*) buď

$$r_2 - r_1 = 2a,$$

$$OA = \frac{r_2}{2}, \quad AC = \frac{r_2}{2} - a = \frac{r_1}{2} = \overline{AB},$$

b) anebo

$$r_1 - r_2 = 2a,$$

$$OA = \frac{r_2}{2}, \quad OC = \frac{r_2}{2} + a = \frac{r_1}{2} = \overline{OB}.$$

Při parabole kružnice nad hlavní osou přechází ve vrcholovou tečnu a tudíž kružnice nad průvodičem dotýká se této přímky, což možná i přímo dovoditi.

Úloha 34.

Nalézti koefficient členu x^p ve výraze

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1})^2. \qquad R.$$

(Řešení zaslal p. *František Kašpar*, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře.)

$$\begin{aligned} & (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1})^2 \\ = & (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1})(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1}) \\ = & \;1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} \\ & \quad + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + x^n \\ & \qquad + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + x^n + x^{n+1} \\ & \qquad\quad + x^3 + \ldots + x^{n-1} + x^n + x^{n+1} + x^{n+2} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \qquad\qquad x^{n-1} + x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots + x^{2n-2} \end{aligned}$$

a sečteme-li, shledáme, že koefficient k při x^p jest pro $p < n - 1$, $k = p + 1$, pro $p > n - 1$, $k = 2n - (p + 1)$.

Úloha 35.

Dány jsou body P, P' uvnitř kruhu na tomtéž průměru ležící a od středu stejně vzdálené. Vésti rovnoběžky PQ a $P'Q'$ protínající obvod kruhu daného v bodech Q a Q' tak, aby plocha lichoběžníku $PQP'Q'$ byla co největší. R.

(Řešení zasílá p. *Stanislav Pavlík,* stud. VIII. tř. c. k. reál. gymn. v Praze II., Křemencová ul.)

Označme střed kruhu O, jeho poloměr r a položme

$$OP = OP' = e, \quad \sphericalangle QPO = x.$$

Prodlužme rovnoběžky PQ a $P'Q'$ na druhou stranu, až protnou obvod kruhu v bodech R a R'. Plocha lichoběžníku $L = PP'Q'Q$ rovná se pak polovině plochy obdélníku $RR'Q'Q$, tedy

$$2L = QR \,.\, QQ'.$$

Vedeme-li $P'S \perp PP'$, plyne z pravoúhlého $\triangle\, PP'S$, že

$$QQ' = SP' = 2e \sin x$$

a z pravoúhlého $\triangle\, Q'QR$

$$QR = 2\sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 x}$$

tedy

$$L = 2e \sin x \sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 x}.$$

Budeme hledati maxima a minima výrazu $\left(\frac{L}{2e}\right)^2 = y.$

$$y = \sin^2 x \, (r^2 - e^2 \sin^2 x),$$

což k vůli stručnosti provedeme pomocí počtu differenciálního.

Pro maximální a minimální hodnoty x musí býti prvá derivace y rovna nulle

$$y' = (r^2 - e^2 \sin^2 x) \frac{d \sin^2 x}{dx} + \sin^2 x \frac{d\,(r^2 - e^2 \sin^2 x)}{dn}$$

$$y' = (r^2 - e^2 \sin^2 x)\, 2\sin x \cos x) + \sin^2 x \,(- 2e^2 \sin x \cos x)$$
$$y' = \sin 2x \,(r^2 - 2e^2 \sin^2 x).$$

Rovnici $y' = 0$ vyhovují úhly

$$x = 0^0 \quad (1a) \qquad x = 90^0 \qquad (1b)$$

ostrý úhel X, pro který $\sin x = \frac{r}{e\sqrt{2}}$. (2)

(Stačí omeziti se v úloze na úhly $\leq 90^0$, poněvadž každému lichoběžníku s $x > 90^0$ odpovídá symmetrický lichoběžník s $x \leq 90^0$.)

Řešení 2. existuje jen tehdy, když $\frac{r}{e\sqrt{2}} \leq 1.$

Abychom rozhodli, zda vyskytují se maxima či minima, utvořme druhou derivaci

$$y'' = 2\cos 2x\,(r^2 - 2e^2 \sin^2 x) - 4e^2 \sin x \cos x \sin 2x$$
$$= 2\cos 2x\,(r^2 - 2e^2 \sin^2 x) - 2e^2 \sin^2 2x.$$

A tu máme

$x = 0^0$, $y'' = 2r^2 > 0$, tedy minimum. (1*a*)

Lichoběžník se redukuje na úsečku.

$x = 90^0$, $y'' = -2\,(r^2 - 2c^2)$, (1*b*)

t. j. pro $r < e\sqrt{2}$, $y'' > 0$, tedy min.

a pro $r > e\sqrt{2}$, $y'' < 0$, tedy max.

Lichoběžník se promění v obdélník.

$x = X$, $\sin X = \dfrac{r}{e\sqrt{2}}$, $y'' = -2e^2 \sin^2 2X < 0$, (2)

tedy min.

Dlužno tedy rozeznávati případy

I. $r < e\sqrt{2}$.

Plocha lichoběžníka roste, zvětšuje-li se úhel x od hodnoty $x = 0$ až do hodnoty X ($\sin X = \dfrac{r}{e\sqrt{2}}$), pro kteroužto hodnotu nastává maximum. Pak plochy lichoběžníku ubývá až k minimu, které nastává při $x = 90^0$.

II. $r \geq e\sqrt{2}$.

Plocha lichoběžníka roste od minima při $x = 0^0$ až k maximu při $x = 90^0$.

Úloha 36.

Plocha pravidelného mnohoúhelníku konvexního jest $\frac{1}{2}$ or, kdež o značí obvod a r poloměr kružnice vepsané. Vzorec tento platí i pro pravidelné mnohoúhelníky hvězdovité. Jaký význam má pak o a r? *R.*

(Řešení zasílá p. *Stanislav Pavlík*, stud. VII. tř. r. gymn. v Praze II., Křemencová ul.)

Hvězdovitý n-úhelník skládá se z malého pravidelného n-úhelníka konvexního $A'_1 A'_2 \ldots A'_n$, jenž tvoří jádro hvězdice, a k němu přiléhají stejné trojúhelníky, tvořící hroty hvězdice $A_1 A_2 \ldots A_n$.

Spojíme-li střed O s vrcholy $A'_1 A'_2$ obdržíme deltoid $OA_1 A_1 A'_2$, jehož plocha jest $\frac{1}{2}\, \overline{A'_1 A'_2} \,.\, OA_1$. Obsah pravidelného mnohoúhelníka hvězdovitého jest tedy

$$\tfrac{1}{2}\, o\, r,$$

značí-li o obvod jádra hvězdice a r poloměr kružnice procházející vnějšími hroty hvězdice.

Avšak vzorec $\frac{1}{2}\, o\, r$ připouští ještě jiný výklad. (Zasílá pan *J. Kučera,* stud. VII. tř. r. v Budějovicích.)

Uvažujme trojúhelník $OA'_1 A_1$. Jeho plocha jest $\frac{1}{2}\, \overline{A'_1 A_1}\, r$, kdež r značí poloměr kružnice dotýkající se $A'_1 A_1$ (ovšem v prodloužení). Bude tedy plocha mnohoúhelníka hvězdovitého $\frac{1}{2}\,(A'_1 A_1 + A'_1 A_2 + A_2 A'_2 + A'_2 A_3 + \ldots + A_n A'_n + A'_n A_1)\, r$ neboli $\frac{1}{2}\, o\, r$, značí-li o obvod hvězdice a r poloměr kružnice dotýkající se hvězdice.

Úloha 37.

Na stranách trojúhelníku ABC sestrojme body A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 dělící strany BC, CA, AB na třetiny (takže na př. $AC_1 = C_1 C_2 = C_2 B = \frac{1}{3} AB$). Přímky AA_1, BB_1, CC_1 utvoří trojúhelník $A'B'C'$, podobně AA_2, BB_2, CC_2 trojúhelník $A''B''C''$. Dokažte, že trojúhelníky $A'B'C'$ a $A''B''C''$ mají stejnou plochu, rovnou $\frac{1}{7}$ plochy trojúhelníku ABC. R.

(Řešení dle p. *Josefa Hanáka,* stud. VIII. tř. g. v Prostějově, a p. *C. Jakeše,* stud. VIII*b* tř. I. č. g. v Brně.)

Rozdělme stranu BC na 9 stejných dílů a veďme každým bodem rovnoběžku s příčkou AA_1. Jak patrno, rozdělí se strana AC na 6 stejných dílů, CC_1 na 7 a CC_2 na 8. Jest tedy $C_1 B' = \frac{1}{7} C_1 C$. (Totéž obdržíme, užijeme-li věty Menelaovy na trojúhelník $C_1 BC$ proťatý příčkou AA_1.) Z toho plyne, že

$$\triangle\, AC_1 B' = \tfrac{1}{7}\, AC_1 C, \quad \triangle\, AB'C = \tfrac{6}{7}\, \triangle\, AC_1 C$$

a poněvadž

$$\triangle\, AC_1 C = \tfrac{1}{3}\, \triangle\, ABC,$$

jest

$$\triangle\, AB'C = \tfrac{2}{7}\, \triangle\, ABB.$$

Podobně nalezneme

$$\triangle BC'A = \tfrac{2}{7} \triangle ABC$$
$$\triangle CA'B = \tfrac{2}{7} \triangle ABC.$$

Poněvadž pak

$$\triangle A'B'C' = \triangle ABC - \triangle AB'C - \triangle BC'A - \triangle CA'B,$$

jest skutečně

$$\triangle A'B'C' = \tfrac{1}{7} \triangle ABC,$$

a zcela podobně

$$\triangle A''B''C'' = \tfrac{1}{7} \triangle ABC.$$

Úloha 38.

Nad stranami trojúhelníku ABC jako průměru opišme polokružnice, ležící vně trojúhelníku. Sestrojme společné tečny vždy dvou z těchto polokružnic. Dokažte, že součin úseček, omezených body dotyčnými, rovná se součinu plochy trojúhelníku ABC a poloměru kružnice vepsané. *R.*

(Řešení zasílá p. *Jaroslav Beneš*, stud. VII. tř. g. v Praze II. v Žitné ul.)

Označme úsečky společných tečen obsažené mezi body dotyčnými x, y, z. Každá z těchto úseček, pak poloměry vedené k bodům dotyčným a příčky, spojující středy příslušných stran, určují pravoúhlý lichoběžník; poloměry rovnají se polovinám dvou stran, příčka polovině strany třetí.

Úsečky x, y, z lze pak snadno vypočísti:

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(\frac{c}{2} - \frac{b}{2}\right)^2}$$
$$y = \sqrt{\frac{b^2}{4} - \left(\frac{c}{2} - \frac{a}{2}\right)^2}$$
$$z = \sqrt{\frac{c^2}{4} - \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)^2},$$

a zavedeme-li známé označení $a + b + c = 2s$, bude

$$x = \sqrt{(s-b)(s-c)}$$
$$y = \sqrt{(s-c)(s-a)}$$
$$z = \sqrt{(s-a)(s-b)}.$$

Uvážíme-li, že plocha trojúhelníka jest

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

a poloměr kružnice vepsané

$$\varrho = \frac{\triangle}{s}$$

bude skutečně

$$xyz = \triangle\varrho \text{ atd.}$$

Úloha 39.

Kterak třeba pozměniti rozměry dané kruhové výseče, aby ani povrch ani obsah se nezměnil? Propočítejte případ, kdy poloměr příslušné koule měří $r = 13$ cm a šířka výseče $2\varrho = 24$ cm. Prof. dr. *Marian Haas.*

(Řešení zasílá p. *Alois Pelikán*, stud. VI. tř. r. v Telči.)

Pro povrch a krychlový obsah výseče máme vzorce

$$P = 2\pi rv + \pi r\varrho$$

$$V = \tfrac{2}{3}\pi r^2 v,$$

kdež

$$\varrho^2 = v(2r - v)$$

a v značí výšku příslušného vrchlíku.

Jedná se o to, rozhodnouti, zdali, vypočteme-li z daných hodnot r a ϱ hodnoty P a V, nedostáváme tytéž hodnoty P a V také pro jiné hodnoty r a ϱ. Za tím cílem položme

$$V = \tfrac{2}{3}\pi a, \; P = \pi b$$

a uvažujme soustavu rovnic

$$r^2 v = a \tag{1}$$

$$r(\varrho + 2v) = b \tag{2}$$

$$\varrho^2 = v(2r - v) \tag{3}$$

Vypočtěme z (1) $v = \frac{a}{r^2}$ a dosaďme do (2) a (3).

Pak obdržíme

$$r\varrho = b - \frac{2a}{r} \tag{4}$$

$$r^2\varrho^2 = 2ar - \frac{a^2}{r^2}. \tag{5}$$

Vyloučíme-li $r\varrho$ z rovnic (4) a (5), obdržíme

$$2ar^3 - b^2r^2 + 4abr - 5a^5 = 0. \tag{6}$$

Dáno-li tedy P a V, jest určeno r rovnicí stupně třetího, tak že daným hodnotám P a V odpovídají obecně 3 hodnoty r, v a ϱ jsou pak již určeny jednoznačně, v z rovnice (1), ϱ z rovnice (2). Jestliže P a V bylo vypočteno z daných hodnot r a ϱ, známe jeden kořen r rovnice (6). Jde o to, nalézti druhé dva r', r''. Pak kořeny ty platí vztahy

$$r + r' + r'' = \frac{b^2}{2a} \tag{7}$$

$$rr'r'' = \tfrac{5}{2}a. \tag{8}$$

Vztahy ty se zjednoduší, uvážíme-li, že dle (1)

$$b^2 = r^2\,(2v + \varrho)^2 = r^2\,(4v^2 + 4v\varrho + \varrho^2)$$

a užijeme-li (3)

$$b^2 = r^2v\,(3v + 4\varrho + 2r)$$

a dále

$$r^2v = a,$$

tak že soustavu (7), (8) můžeme psáti

$$r' + r'' = \tfrac{3}{2}v + \varrho$$

$$r'r'' = \tfrac{5}{2}rv,$$

r' a r'' jsou pak kořeny rovnice kvadratické.

V daném příkladě číselném jest

$$r = 13, \quad \varrho = 12, \quad v = 8$$

a z toho nalezneme

$$r' = 26, \qquad \varrho' = 2, \qquad \varrho'' = 10,$$

$$r'' = 10, \qquad \varrho'' = 9{\cdot}36, \quad v'' = 13{\cdot}52$$

(vrchlík příslušný k této druhé výseči zaujímá přes půl kulové plochy).

Úloha 40.

Na Plateau-ově síťce, která má tvar pravidelného n-bokého hranolu, ponořené do mydlin, vytvoří se systém blan, z nichž n je tvaru lichoběžníkového o společné straně a 2n shodných trojúhelníků. Vypočítejte rozměry blan ze známé věty, že tento systém má minimální plochu. *Týž.*

(Řešení zasílá p. *Jar. Kučera,* stud. VII. tř. r. v Č. Budějovicích.)

Označme stranu mnohoúhelníku podstavného s, poloměr kružnice vepsané ϱ, opsané r. Délka hrany poboční budiž h a odchylka trojúhelníků od základny φ.

Pak jest plocha trojúhelníku

$$\triangle = \frac{\varrho s}{2 \cos \varphi}$$

a plocha lichoběžníka, uvážíme-li, že jeho základny jsou h a $h - 2\varrho \, tg \, \varphi$ a výška r,

$$L = (h - \varrho \, tg \, \varphi) \, r$$

a tedy plocha všech blan

$$P = 2n \triangle + nL = n \left(hr + \varrho \left(\frac{s}{\cos \varphi} - r tg \, \varphi \right) \right).$$

Hodnota tohoto výrazu závisí pouze na dvojčlenu

$$y = \frac{s}{\cos \varphi} - r \, tg \, \varphi,$$

tak že L bude minimální, nabude-li y hodnoty minimální.

Můžeme psáti

$$y \cos \varphi = s - r \sin \varphi$$

a klademe-li

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$$

a odstraníme irracionality

$$(r^2 + y^2) \cos^2 \varphi - 2sy \cos \varphi + s^2 - r^2 = 0,$$

z čehož

$$\cos \varphi = \frac{sy \pm r \sqrt{y^2 - s^2 + r^2}}{r^2 + y^2}.$$

Může tedy nastati minimum pro

$$y^2 - s^2 + r^2 = 0$$

$$y = \sqrt{s^2 - r^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{s^2 - r^2}}{s}$$

a tedy

$$\sin \varphi = \frac{r}{s}.$$

Poněvadž musí býti $sin\,\varphi < 1$, vidíme, že musí býti $r < s$. Může býti tedy základnou pouze troj-, čtyř- neb pětiúhelník.

b) Z deskriptivní geometrie.

Úloha 1.

Trojúhelníkem abc rovnoběžným ku půdorysně proložte krychli, jejíž nejnižší vrchol jest v půdorysně a zobrazte průměty její. Prof. *Jar. Doležal.*

(Řešení zaslal p. *Frant. Kašpar*, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře.)

Poněvadž každá ze tří v jednom vrcholu v se sbíhajících hran krychle jest kolmá k rovině druhých dvou, bude geometr. místem bodu v, $v \equiv (ABC)$, při čemž hrany A, B, C procházejí body a, b, c, kolmice vztyčená k rovině abc v průsečíku výšek $\triangle abc$ (poněvadž $\varrho \| \pi$, $\varrho \equiv (abc)$). Geometr. místem vrcholů pravých úhlů v, jichž ramena procházejí body a, b, jest plocha kulová, sestrojena nad $\overline{ab}$ jakožto průměrem. Vrchol v bude tedy v průsečíku obou geom. míst. Nám vyhovuje bod vzdálenější od π (v druhém případě by trojúhelník abc byl proložen krychlí v prodloužení za vrchol v). Bod v a body a, b, c určují nám hrany A, B, C. Osa tohoto trojhranu bude tělesnou úhlopříčkou krychle. Prvá stopa této osy určuje polohu protějšího vrcholu u k vrcholu v. Máme tedy krychli určenou úhlopříčkou tělesnou co do délky i do polohy, kromě toho máme též i příslušné trojhrany o protějších vrcholech v a u, z čehož krychli snadno známým způsobem zobrazíme.

Úloha 2.

Zobrazte průměty kružnice, dána-li půdorysná stopa P^{ϱ} roviny její jakož i půdorys S_1 jejího středu a půdorysy a_1, b_1 dvou jejích bodů! *Týž.*

(Řešení zaslal p. *Vojtěch Krch*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Je-li o_1 půdorys středu o úsečky $\overline{ab}$, jest spojnice $\overline{s_1 o_1}$ průměr elliptického půdorysu K_1 kružnice K, a sice průměr sdružený se směrem $\overline{a_1 b_1}$; vedeme-li tedy bodem s_1 rovnoběžku ku $\overline{a_1 b_1}$, jest tato rovnoběžka průměrem $\overline{ku\ s_1 o_1}$ sdruženým.

Jsou-li dále body I, II (na P^ϱ) stopníky půdorysné těchto průměrů, stačí uvážiti, že půdorys K_1 se sklopenou kružnicí K v π jsou v souvislosti affinity pravoúhlé, jejíž osa jest P^ϱ.

Sklopený střed (s) jest tedy určen co průsečík kružnice L nad průměrem $\overline{I\,II}$ s kolmicí M, spuštěnou z půdorysu s_1 na P^ϱ.

Je-li dále σ průsečík kolmice $\overline{s_1 (s)}$ se stopou P^ϱ, stanoví úsečka $\overline{(s)\sigma}$ poloměr otáčení r, bod σ pak střed otáčení kruhové dráhy N bodu s; stanovíme-li posléze průsečík s_0 této dráhy N s promítacím paprskem bodu s, jest odvěsna $\overline{s_1 s_0}$ trojúhel. $\sigma s_1 s_0$ výškou (souřadnicí z) bodu s, čímž poloha středu s dokonale určena.

Úloha jest obecně dvojznačná, ježto výšku z_s lze nanésti ve dvojím směru od půdorysu s_1 na promít. paprsek bodu s.

Úloha 3.

Trojúhelník abc obsažený v rovině ϱ osvětlete geometrálně, aby stín jeho na půdorysnu měl daný tvar (na př. $\triangle$ rovnostranný)! *Týž.*

(Řešení zaslal p. *Vojtěch Krch*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Půdorys trojúhelníka abc jest v affinní příbuznosti se stínem vrženým na půdorysnu. Osou affinity jest půdorysná stopa P^ϱ roviny ϱ, směr affinity, půdorys směru hledaného osvětlení. Směry všech možných osvětlení, při nichž u stínu vrcholu a by byl úhel α, udávají povrchové přímky kužele, jehož vrchol jest a, a základnou v půdorysně kružnice, procházející průsečíky P^ϱ s prodlouženými stranami trojúhelníka, procházejícími vrcholem a, a kteráž jest zároveň geometrickým místem vrcholů úhlů, jichž ramena procházejí oněmi průsečíky a jež rovnají se α, neb $2R - \alpha$. Rovněž tak sestrojili bychom si kužel při vrcholu b, aby při stínu bodu b byl úhel β.

Abychom stanovili žádaný směr osvětlení, posuňme kužel při vrcholu b do vrcholu a. Pak průsečné povrchové přímky kužele posunutého a kužele původního při vrcholu a udávají nám směr osvětlení.

Úloha jest dvojznačná, neboť můžeme sestrojiti druhou dvojinu kuželů při vrcholech a a b, vyhovující daným podmínkám, jejichž základny jsou však souměrné s prvými dle P^o_1.

Uloha 4.

Dán je kruh k a uvnitř něho bod M. Sestrojiti nejvyšší kužel šikmý o dané základně k té vlastnosti, že spojnice bodu M vrcholem kužele protíná druhý kruhový řez ve středu.

Posl. fil. *Čeněk Nevrkla.*

(Řešení zaslal p. *František Kašpar*, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře.)

Spojnice bodu M s vrcholem V žádaného kužele má býti středovou přímkou druhých kruhových řezů. Musí tedy bod M býti středem kruhového řezu l, jehož poloměr r' jest tětiva bodem M vedena v kružnici k. Rovina hlavního řezu ϱ žádaného kužele jest kolma ke kruhu k a prochází body (O, M), kdež O jest střed k. Rovina ϱ přetne rovinu kružnice k v průměru $p = 2r$ a l v $q = 2r'$. Spojnice koncových bodů těchto průměrů stanoví nejdelší a nejkratší povrchovou přímku. Jest patrno, že pro největší výšku musí $p \perp q$.

Úloha 5.

Dán je kruh k a přímka p, která jej reálně neprotíná. Sestrojiti šikmý kužel o vrcholovém úhlu ω a dané základně k té vlastnosti, že rovina vrcholem rovnoběžně s druhým šikmým kruhovým řezem vedená protíná základnu kužele v dané přímce p.

Týž.

(Řešení zaslal p. *František Kašpar*, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře.)

Rovina hlavního řezu musí procházeti středem základny k a sice kolmo ku p. Přetne k v bodech A, B a p v bodě P, kužel pak v nejdelší a nejkratší povrchové přímce a,b. Úhel $\omega = \widehat{a,b}$. Geometr. místem vrcholů úhlu ω bude kruhový oblouk l nad tětivou $\overline{AB}$, kterýž snadno sestrojíme. Tento kruh vznikne jakožto průsek oné roviny hlavního řezu a koule žádanému kuželi opsané. Rovina druhého kruhového řezu jest rovnoběžná s rovinou tečnou k opsané kouli, sestrojené ve vrcholu kužele V. Stač tedy vésti z bodu P tečnu (v rovině hl. řezu) k oblouku l a tato tečna t a přímka p určují nám tečnou rovinu. Dotyčný bod T tečny t jest zároveň vrcholem V kužele žádaného. Kužele budou dva symetrické dle roviny ϱ kružnice k.

Úloha 6.

Sestrojte plochu, kterou obaluje koule valící se po dvou libovolných různoběžkách. Posl. techn. *Vojtěch Vysoudil.*

(Řešení zaslal p. *Jan Kňourek*, stud. VII. tř. r. v Jičíně.)

Buďtež dány dvě různoběžky A, B protínající se v průsečíku o. Poloměr koule K po nich se valící budiž r. Střed s koule K bude při pohybu koule opisovati ellipsu E, jež jest průsečnicí roviny souměrnosti obou daných různoběžek s plochou válcovou, jež jest kolem jedné z obou různoběžek poloměrem r opsána. Jelikož jsou 2 roviny souměrnosti daných různoběžek A a B, bude kromě ellipsy E též ellipsa E', jež jest průsečnicí druhé roviny souměrnosti s dříve zmíněnou plochou válcovou, geometrickým místem středů s koule K valící se po různoběžkách daných. Poloosy ellipsy E jsou r, $\dfrac{r}{\sin\frac{\omega}{2}}$; poloosy ellipsy E' pak r, $\dfrac{r}{\cos\frac{\omega}{2}}$, kdež ω značí ostrý úhel sevřený rovnoběžkami A, B. Poloosu délky r, jež jest v bodě o kolmo postavena k A i B, mají obě ellipsy společnou; druhé dvě poloosy jsou osami souměrnosti různoběžek A, B. Plochami obalovými jsou 2 prstence, jejichž osami jsou výše uvedené ellipsy, a jež rovina kolmá v kterémkoliv bodě na osu protíná v kružnici.

Úloha 7.

Sestrojte z daných orthogonálních prvních průmětů tří libovolných vrcholů pravidelného čtyřstěnu jeho oba průměty, leží-li zároveň čtvrtý vrchol v dané rovině (ku př. v půdorysně). Týž.

(Řešení zaslal p. *Alois Pelikán*, stud. VI. tř. r. v Telči.)

Odvoďme z daného orthogonálního průmětu rovnostranného trojúhelníka jeho oba průměty. Kružnice opsaná rovnostrannému trojúhelníku abc promítá se na průmětny jako ellipsa, jejíž střed jest těžiště s průmětu $a_1b_1c_1$ a v níž jest a_1c_1 tětiva sdružená ku průměru b_1t_1 ($b_1s_1 = s_1t_1$). Směr velké osy této ellipsy určuje směr P^{ϱ} průsečnice roviny ϱ rovnostranného trojúhelníka s půdorysnou. Odtud snadno určíme třetí vrchol d, jehož průmět d_1 jest stálý a pošineme-li tento čtyřstěn ve směru promítacích paprsků k první průmětně, až bod d přijde do roviny τ, pak jsme úloze vyhověli.

Úloha 8.

Ukažte, že jest možno stanoviti (oběma průměty) v prostoru krychli, jsou-li dány jedny orthogonální průměty tří jejích libovolných vrcholů a má-li jiný její vrchol určitou souřadnici. *Týž.*

(Řešení zaslal p. *Alois Pelikán*, stud. VI. tř. r. v Telči.)

Uvedenou úlohu lze převésti na následující: Odvoditi z prvého orthogonálního průmětu $\triangle abc$ druhý, dán-li jeho tvar.

Řešení provede se podobně jako v úloze předcházející. Opišme trojúhelníku abc kružnici; ta se promítá jako ellipsa, v níž dána jest tětiva a sdružený s ní průměr. Ostatně lze vésti v kružnici opsané trojúhelníku abc libovolné sdružené průměry a pomocí příček, které procházejí koncovými body jejich a dělí strany $\triangle abc$, tudíž i $\triangle a_1b_1c_1$ v poměru λ, najíti jim odpovídající body v průmětě. Směr hlavní osy ellipsy takto určené udává směr stopy roviny sečné trojúhelníku abc. Známe-li $\triangle abc$ (jsou možny tři případy), pak neposkytne konstrukce krychle nic pozoruhodného. Druhá souřadnice slouží toliko k určení polohy nárysného obrazu.

c) Z fysiky.

Úloha 1.

Dráhy dvou v přímkách se pohybujících lodí se protínají v pravém úhlu; prvá z lodí, pohybující se rychlostí 13 mil za hodinu, nachází se v jistém okamžiku ve vzdálenosti 15 mil od

bodu průseku, druhá, jejíž rychlost obnáší 20 mil za hodinu, jest v témž okamžiku vzdálena o 10 mil od téhož bodu. Pohybují-li se obě směrem k bodu, v němž se dráhy jejich protínají, jest nalézti nejmenší vzdálenost obou, a dobu, v níž nastane.

Red.

Řešení, jež zaslal p. *K. Jelínek* ze VI. tř. reálky v Telči.

Buďtež vzdálenosti lodí od průsečíku jich drah d_1 a d_2, jejich rychlosti c_1 a c_2. Po čase t bude jejich vzdálenost x nejmenší.

Pak

$$x^2 = (d_1 - c_1 t)^2 + (d_2 - c_2 t)^2.$$

Z toho plyne

$$t = \frac{1}{c_1{}^2 + c_2{}^2}(c_1 d_1 + c_2 d_2 \pm \sqrt{x^2(c_1{}^2 + c_2{}^2) - (c_1 d_2 - c_2 d_1)^2}).$$

Má-li t býti reálné, musí výraz pod odmocninou býti positivní.

Nejmenší vzdálenost x_1 podmínku tu splňující jest

$$x = \pm \frac{c_1 d_2 - c_2 d_1}{\sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2}},$$

při čemž znamení + či — volíme dle toho, je-li $c_1 d_2 - c_2 d_1 \gtrless 0$.

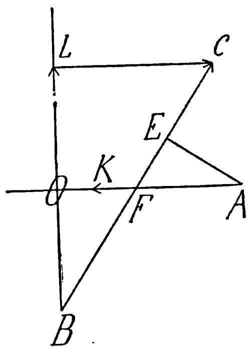
Pak jest doba

$$t = \frac{c_1 d_1 + c_2 d_2}{c_1{}^2 + c_2{}^2}.$$

V daném zvláštním případě je $t = \frac{395}{569} = 0{\cdot}6942$ hodiny = $41^{\text{min}}\ 39^{\text{sec}}$,

$$\text{a} \qquad x = \frac{170}{\sqrt{569}} = 7{\cdot}127 \text{ mil.}$$

Jiný způsob řešení. Ježto se jedná pouze o relativní pohyb obou lodí, můžeme k oběma pohybům daným přičísti nový, jejž zvolíme tak, aby prvá loď A zdánlivě stála, tedy pohyb stejné velikosti, ale opačného směru, než má A. Je-li O průsečík drah a B počáteční stanoviště druhé lodi, znázorňují-li dále délky AK a BL rychlosti obou lodí, jest směr i rychlost relativního pohybu druhé lodi vzhledem k prvé dán úhlopříčnou BC, kde $LC = AK$. Nejkratší vzdálenost jest dána kolmicí AE



na BC a čas v hodinách podílem $\frac{BE}{BC}$. Ježto $\triangle\, AEF \sim \triangle\, BLC$ lze pomocí úměr a Pythagorovy věty snadno z daných hodnot AO, BO, AK, BL obě hledané veličiny vypočísti.

Úloha 2.

Jest nalézti úhel, v němž musí býti těleso šikmým směrem vrženo, tak aby stihlo jiný bod daný, je-li rychlost vrhu C. Odpor vzduchu nebere se v počet. *Red.*

Řešení, jež zaslal *F. Kornhäuser* ze VII.ª tř. reálky v Karlíně.

Danou rychlost vrhu C rozložme na složku horizontální $C.\cos\alpha$ a vertikální $C.\sin\alpha$. Zvolíme-li bod, z něhož vrh se udál, za počátek pravoúhlého systému souřadnic, jest za t vteřin

dráha horizontální $\quad x = C.\cos\alpha.\, t$

vertikální $\quad y = C.\sin\alpha.\, t - \frac{1}{2}\, gt^2.$

Vyloučením t dostáváme rovnici parabolické dráhy vrženého tělesa

$$y = x\, tang\alpha - \frac{gx^2}{2\, C^2}\,(1 + tang^2\alpha).$$

Je-li výška bodu nad horizontální rovinou h a vzdálenost jeho průmětu v horizontální rovině od počátku souřadnic d, musí hověti této rovnici $x = d$ $y = h$.

Dosazením a výpočtem plyne pro elevaci α

$$tang\,\alpha_{1\,2} = \frac{C^2 \pm \sqrt{C^4 - 2ghC^2 - g^2d^2}}{g.\,d.}$$

Poznámka.

Je-li $g^2d^2 < C^4 - 2ghC^2$

lze stihnouti daný bod za dvou elevací.

Je-li $g^2d^2 = C^4 - 2ghC^2$ . . . . (i)
jest jediný úhel α, úlohu řešící dán vztahem

$$tang\,\alpha = \frac{C^2}{gd}.$$

Rovnice (1) jest, považujeme-li d za úsečku, h za pořadnici, rovnicí t. zv. paraboly ochranné. Body uvnitř ní ležící lze stihnouti dvěma elevacemi, na ní pouze elevací jedinou, mimo ni — ovšem za dané rychlosti C — nelze jich stihnouti vůbec.

(Analysu podobných úloh o vrhu šikmém viz *Strouhal-Kučera*: Mechanika, 2. vyd. Praha 1910, str. 337—344.)

Úloha 3.

***Žebřík** (homogenní tyč) dané délky l a váhy W stojí na drsné horizontální půdě a opírá se o hladkou vertikální stěnu tvoře daný úhel α s horizontálou. Má se nalézti reakce v bodech stykových na stěně a půdě za předpokladu, že váha žebříku je rovnocenná s jedinou silou W působící ve středu jeho délky.* *Red.*

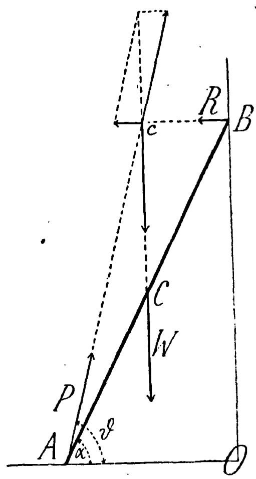
Řešení: Buď $\overline{AB} = l$ žebřík, $\overline{OA}$ půda, $\overline{OB}$ hladká stěna. Úlohou jest určiti co do velikosti i směru reakční síly R v bodě B, a P v bodě A, jimiž držena jest v rovnováze váha žebříku W působící v jeho středu C. Ježto stěna jest hladká, nemůže síla R míti složku podél ní, musí tedy státi na ni kolmo. Druhá síla reakční P svírej s horizontální půdou úhel ϑ. Neznámými jsou tedy P, R a ϑ.

Mají-li síly býti v rovnováze, musí býti v rovnováze jejich složky vertikální i horizontální.

Z toho plyne

$$W = P . \sin\vartheta \qquad R = P . \cos\vartheta \;\ldots\ldots\ldots (1)$$

Dále musí algebraický součet jejich momentů kolem libovolného bodu roviny býti nullou (věta Varignonova). Za onen „libovolný" bod zvolme vhodně bod A, neboť tak eliminujeme dvě neznámé P a ϑ.



Plyne tudíž

$$R . \overline{OB} = W . \tfrac{1}{2}\, OA$$

nebo

$$R . l \sin\alpha = \tfrac{1}{2}\, W l \cos\alpha .$$

Z toho

$$R = \tfrac{1}{2}\, W . \operatorname{cotg}\alpha .$$

Z rovnic (1) následuje

$$P^2 = W^2 + R^2$$

a tedy dosazením

$$P = W \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} \operatorname{cotg}^2\alpha} .$$

Podobně plyne z rovnic (1) dělením

$$\tan \vartheta = \frac{W}{R} = 2 \tan\alpha .$$

Jiný způsob řešení: Mají-li dvě síly P a R v rovině držeti v rovnováze sílu třetí W, musí se směry všech protínati v jediném bodě a síla W míti tutéž velikost, ale opačný směr než úhlopříčka rovnoběžníka ze sil P a R zkonstruovaného. Z toho plyne řešení grafické: Prodloužíme směr síly W a síly $R \perp \overline{OB}$, až se protnou v bodě c, který spojením s bodem A dává směr síly P. Ježto v rovnoběžníku sil jsou dány směry obou složek a směr i velikost výslednice, lze nalézti i velikosti obou složek. Vztahy početní plynou ze známých vzorců v rovnoběžníku (trojúhelníku) sil.

Úloha 4.

Válcovitá tyč zatížená na jednom konci pluje ve vodě; jest stanoviti podmínky stálé rovnováhy. Může-li tyč plovati tak, že do polovice své délky je ponořena a to v libovolném úhlu s horizontálou, jest dokázati, že přidaná zatěžovací váha rovná se váze tyče. *Red.*

Řešení, jež podal p. *J. Kostlivý* z VIII. gymn. v Domažlicích.

Budiž A spodní, B hoření konec dané tyče, její délka $\overline{AB} = l$, její střed C, váha P, závaží v bodě A pak Z. Tyč ta ponoří se do vody specifické váhy s svojí délkou l_1, tedy objemem $l_1 q$, je-li q její průřez. Aby plovala, musí $l_1 qs = P + Z$. Vztlak vody působí v bodě, jehož vzdálenost od A jest $\frac{1}{2} l_1$. Dle toho, je-li těžiště pod, nad, nebo v tomto bodě, je rovnováha tyče stabilní, labilní nebo indifferentní. Nazveme vzdálenost těžiště zatížené tyče od spodního konce l'. Tuto vzdálenost snadno empiricky podepřením tyče najdeme; při tom patrně platí

$$Z . l' = P . \left(\frac{l}{2} - l'\right)$$

Z toho plyne

$$l' = \frac{lP}{2(P + Z)}.$$

Aby byla rovnováha stabilní, musí $l' < \frac{l_1}{2}$ čili

dosazením
$$\frac{lP}{2(P + Z)} < \frac{P + Z}{2qs}$$

nebo
$$(P + Z)^2 > lqs . P.$$

Může-li tyč plovati v libovolném úhlu s horizontální rovinou, má rovnováhu indifferentní, a $l' = \frac{1}{2} l_1$; dle podmínky úkolu má býti $l_1 = \frac{l}{2}$, tedy $l' = \frac{lP}{2(P+Z)} = \frac{l}{4}$ čili

$$2P = P + Z, \text{ z čehož následuje } P = Z,$$

jak bylo dokázati.

Úloha 5.

Archimedes zvážil Hieronovu korunu a (na vzduchu) stejně s ní těžký kus zlata a stříbra pod vodou, a stanovil, že koruna ztratila $\frac{1}{14}$ své váhy, zlato $\frac{4}{77}$ a stříbro $\frac{2}{21}$. Ve kterém poměru bylo zlato a stříbro smíšeno v koruně? Red.

(Řešení, jež podal p. *J. Kostlivý* z VIII. gymn. v Domažlicích.)

Objem koruny budiž V, specifická hmota s, zlata V_1 a s_1, stříbra V_2 a s_2. Ježto všechny tři hmoty jsou stejně těžké, platí

$$Vs = V_1 s_1 = V_2 s_2.$$

Dle Archimedova zákona rovná se ztráta na váze váze vytlačené vody, a jest tedy objemu ponořeného tělesa úměrná. Plyne tudíž

$$\frac{1}{14} s = \frac{4}{77} s_1 = \frac{2}{21} s_2.$$

Je-li v koruně dle objemu x částí zlata a y stříbra, pak

$$\frac{1}{14} s = x s_1 + y s_2$$

a

$$\frac{1}{14} = x + y.$$

Z těchto rovnic plyne $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$. Byly tedy v koruně dle objemu $^2/_5$ zlata a $^3/_5$ stříbra

Specifické hmoty zlata a stříbra jsou v obráceném poměru se ztrátami na váze, tedy $\frac{s_1}{s_2} = \frac{2}{21} \cdot \frac{77}{4} = \frac{11}{6}$.

Poměr váhy zlata a stříbra v koruně jest tedy

$$\frac{V_1 s_1}{V_2 s_2} = \frac{11}{9}.$$

Úloha 6.

Jakési tuhé těleso váží 29·9 grammů v kapalině hustoty 1·210 za 10° C, 30·4 grammů v téže kapalině za 95° C, když hustota její je 1·170. Jest vypočítati koefficient objemové roztažlivosti onoho tělesa, které váží ve vzduchu 45·6 grammů.
Red.

(Řešení, jež zaslal p. *V. Berný* z VII. reálky v Jičíně.)

Označme koefficient objemové roztažlivosti daného tělesa 3α, objem za 0°, 15°, 95° postupně V_0, V_{15}, V_{95}. Pak platí rovnice

$$V_{10} = V_0 \, (1 + 3\alpha \, . \, 10) \qquad V_{95} = V_0 \, (1 + 3\alpha \, . \, 95).$$

Dle zákona Archimedova získáme další rovnice

$$V_0 \, (1 + 3\alpha \, . \, 10) . \, 1\cdot21 = 45\cdot6 - 29\cdot9 = 15\cdot7$$
$$V_0 \, (1 + 3\alpha \, . \, 95) . \, 1\cdot17 = 45\cdot6 - 30\cdot4 = 15\cdot2$$

Z obou těchto rovnic vyloučíme V_0 a vypočteme 3α. Výsledkem jest

$$3\alpha = 0\cdot0000147.$$

Úloha 7.

Mosazné konkávní zrcadlo (sférické) jest postaveno tak, že jeho osa Ox je horizontální. Jakýmsi zařízením můžeme uvésti je na teplotu vyšší, při čemž jeho vrchol O zůstane na svém místě. Ve vzdálenosti a od vrcholu, větší, než je dálka ohnisková, a nezměnitelné, nachází se reálný bod A. Nazvemež vzdálenost jeho reálného obrazu B od vrcholu b_0, je-li teplota zrcadla 0° C, b_t je-li teplota jeho $+ t^0$. Jak závisí pošinutí obrazu $\delta = b_t - b_0$ od teploty? Zveme-li pošinutí δ kladným, když se obraz vzdaluje od vrcholu zrcadla, která podmínka musí být splněna, má-li δ býti vždy kladným (při zahřátí zrcadla)? Jest diskutovati podmínky možnosti a ukázati, že zařízení popsané může býti velmi citlivým thermoskopem. Applikace numerická: Ohnisková vzdálenost za teploty 0° C buď $f_0 = 50$ cm, a lineární koefficient roztažlivosti mosazi $\alpha = 0\cdot00002$; jaké jest pošinutí δ obrazu, stoupne-li teplota na $t = 100^0$, je-li $a = 51$ cm? Z franc. otázek maturitních, Toulouse 1902. *Red.*

(Řešení, jež zaslal p. *Lad. Staněk* ze VI. reálky v Litovli.)

Plocha kulová roztahuje se zahříváním rovnoměrně ve všech směrech, tak že $r_t = r_o (1 + \alpha t)$, kde r jest jejím poloměrem, α lineární koefficient roztažlivosti a t zvýšení teploty. Platí tudíž u konkávního zrcadla, kde vzdálenost ohnisková $f = \frac{r}{2}$ podobně $f_t = f_0 (1 + \alpha t)$.

Dle rovnice pro zrcadla plynou tudíž vztahy

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b_0} = \frac{1}{f_0}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b_t} = \frac{1}{f_0 (1 + \alpha t)}.$$

Výpočtem plyne pro pošinutí obrazu

$$b_t - b_0 = \delta = \frac{a^2 f_0 \alpha t}{(a - f_0)(a \quad f_0 (1 + \alpha t))}$$

Ježto $a - f_0 > 0$; zůstává pošinutí δ kladným pokud $a > f_0 (1 + \alpha t)$, to jest, pokud vzdálenost předmětu a zůstává větší než dálka ohnisková f_t, jak již bez výpočtu přímo lze usouditi. Při $a = f_t$ přejde obraz do nekonečna, za $a < f_t$ se stane virtuálným.

Citlivost našeho zařízení jest měřena poměrem vzrůstu pošinutí δ a vzrůstu teploty, tedy differenciálním poměrem

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{a^2 . \alpha f_0}{a - f_0} . \frac{a - f_t + \alpha f_0}{(a - f_t)^2}.$$

Citlivost ta jest tedy tím větší, čím jest $a - f_t$ menším; v krajním případě $a = f_t$ se stává theoreticky nekonečně velikou. Totéž nahlédneme, všimneme-li si, že vztah mezi δ jakožto pořadnicí a t jakožto úsečkou jest v pravoúhlých souřadnicích znázorněn hyperbolou, jež má asymptotu rovnoběžnou s osou pořadnic a danou vztahem $t = \frac{a - f_0}{f_0 \alpha}$.

Ovšem nesměli bychom při praktické applikaci užíti příliš vysoké citlivosti, ježto při značném b jest těžko určiti správně místo, v němž obraz se nachází.

Daným řešením jest zároveň rozřešena úloha, jak se změní vzdálenost reálného obrazu v dalekohledu zrcadlovém, změní-li se teplota. Ježto potom jest vzdálenost předmětu a prakticky nekonečná, plyne

$$\frac{d\delta}{dt} = \alpha f_0.$$

V numerické applikaci plyne dosazením zvláštních hodnot $\delta = 289\ cm$ při původní vzdálenosti obrazu $b_0 = 2550\ cm$. Hraničnou teplotou pro kladné δ jest $t = 1000^0$, kdyby koëfficient roztažlivosti až do této temperatury zůstával stálým.

Úloha 8.

Dva magnety A a B kývají v témž poli magnetickém tak, že vykoná A 15 kyvů za minutu, B pak 10 kyvů za minutu. Magnet A vykoná v jiném poli 5 kyvů za minutu, magnet B v poli třetím 20 kyvů za minutu. Jest nalézti poměr intensit druhého a třetího pole a poměr magnetických momentů obou magnetů. *Red.*

Řešení, jež podal p. *Fr. Kašpar* ze VII. reál. v Kutné Hoře.

Doba kyvu t magnetu jest dle analogie s fysickým kyvadlem dána vzorcem

$$t = \pi \sqrt{\frac{K}{MH}},$$

kde K jest moment setrvačnosti, M magnetický moment magnetu a H intensita magn. pole v rovině kyvů.

Buďtež intensity daných tří polí H_1, H_2 a H_3, dále magnetický moment a moment setrvačnosti prvého a druhého magnetu M_A, K_A resp. M_B, K_B. Počty kyvů za stejnou dobu jsou dobám kyvů obráceně úměrny.

Z toho plynou vztahy

$$\frac{M_A H_1}{K_A} : \frac{M_B H_1}{K_B} = 15^2 : 10^2$$

$$\frac{M_A H_1}{K_A} : \frac{M_A H_2}{K_A} = 15^2 : 5^2$$

$$\frac{M_B H_1}{K_B} : \frac{M_B H_3}{K_B} = 10^2 : 20^2$$

Z druhého a třetího plyne $H_1 : H_2 : H_3 = 9 : 1 : 36$

a z prvého $\frac{M_A}{M_B} = \frac{9}{4}\frac{K_A}{K_B}.$

Kdyby rozdíl obou magnetů spočíval pouze v různě silné magnetisaci, bylo by $K_A = K_B$ a $\frac{M_A}{M_B} = \frac{9}{4}.$

Úloha 9.

Drát odporu r spojuje A a B, dva body proudového kruhu, jehož ostatní odpor je R. Spojíme-li A a B dalšími n — 1 dráty, z nichž každý má odpor r, aniž by se jiná změna v ostatním kruhu stala, bude teplo ve všech n drátech mezi A a B dohromady vznikající větší nebo menší než ono, v prvém drátě původně vznikající dle toho, je-li r větší či menší než $R\sqrt{n}$. Tuto větu jest dokázati. *Red.*

(Řešení, jež zaslal p. *Fr. Kornhäuser* ze VII^a reálky v Karlíně.)

Dle zákona Ohmova jest intensita proudu v případě, když jest mezi A a B vepiat jediný drát odporu r

$i_1 = \frac{E}{R+r}$, kde E značí stálou elektromotorickou sílu v celém kruhu proudovém působící.

Je-li místo jediného drátu n stejných drátů vedle sebe spojených mezi A a B vepiato, jest jich odpor $\frac{r}{n}$ a intensita proudu

$$i_2 = \frac{E}{R + \frac{r}{n}} = \frac{nE}{nR + r}$$

Dle zákona Jouleova jest množství tepla v jedničce časové ve vedení mezi A a B vyvinutého úměrno součinu z kvadrátu intensity proudové a odporu mezi A a B, tedy v prvém případě

$$Q_1 = Const. \frac{E^2}{(R+r)^2} \cdot r$$

v druhém

$$Q_2 = Const. \frac{n^2E^2}{(nR+r)^2} \cdot \frac{r}{n}.$$

Poměr $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{n(R^2+r)^2}{(nR+r)^2}$ jest větší, roven nebo menší než jednička

dle toho, je-li $nR^2 + 2n\,Rr + nr^2 \gtreqless n^2R^2 + 2n\,Rr + r^2$

t. j. je-li $r \gtreqless R\,.\sqrt{n}$ což bylo dokázati.

Úloha 10.

Severní pól magnetu (jehož jižní pól se nachází ve velmi veliké vzdálenosti), jenž obsahuje 250 jednotek náboje, jest umístěn na ose závitu kruhového o poloměru 40 cm, a odporu 10^{-3} Ohm ve vzdálenosti 20 cm od jeho středu. Jest najíti střední hodnotu proudu vzniklého v závitu, když pól během 1 vteřiny se vzdálí do vzdálenosti 200 cm od středu. *Red.*

Řešení, jež podal p. *Fr. Kašpar* ze VII. reál. v Kutné Hoře.

Průměrná elektromotorická síla indukovaného proudu v absolutních jedničkách elektromagnetických rovná se počtu magnetických silokřivek vodičem za sekundu prosečených nebo, což jest totéž, sekundové změně počtu silokřivek vodičem procházejících, tedy (až na znamení)

$$e = \frac{N_1 - N_2}{T},$$

kde N_1 a N_2 značí tento počet na začátku a na konci doby T.

Počet silokřivek N_1, jež posílá magnetické množství m ležící na ose kruhu o poloměru r ve vzdálenosti d od jeho roviny skrze jeho plochu, vypočteme následovně: Celým povrchem koule o poloměru $R = \sqrt{r^2 + d^2}$ prochází silokřivek $4\pi\, m$, tedy jedničkou plošnou $\frac{m}{R^2}$. Vrchlíkem, jenž je omezem kruhem radia r ve vzdálenosti d od středu koule, jde tedy silokřivek

$$N = \frac{m}{R^2}\,.\,2\pi R\,(R - d) = 2\pi m\left(1 - \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}}\right).$$

Jest tudíž v našem případě elektromot. síla e v abs. jedničkách

$$e = \frac{2\pi m}{T}\left[\frac{d_2}{\sqrt{r^2 + d_2^2}} - \frac{d_1}{\sqrt{r^2 + d_1^2}}\right].$$

Dosadíme-li za $m = 250$, $T = 1$, $d_2 = 200$ a $d_1 = 20$, vyjde

$e = 8{\cdot}378 \,.\, 10^2$ abs. jedn. elmag. $= 8{\cdot}378 \,.\, 10^{-6}$ Volt.

Proud, jejž vzbudí e v odporu 10^{-3} Ohm, má dle zákona Ohmova intensitu $8{\cdot}378 \,.\, 10^{-3}$ Ampère.

Řešení úloh zaslali:

P. *Boža Barták*, r. v Karlíně
m. 2., 4.—39., f. 1.—9., d. 1.—8.,
p. *Antonín Benda*, VII. g v Praze-II., v Žitné ul.
m. 13., f. 1 , 3., 5.—8.,
p. *Jaroslav Beneš*, VII. g. v Praze-II., v Žitné ul.
m. 1., 2., 4 , 6., 7., 9., 13., 15., 21., 34.—40., f. 1.—10.,
p. *Josef Berný*, VII*a* r. v Jičíně
m. 1.—40., f. 1.—10., d. 1.—8.,
p. *Jan Brada*, VI. r. v Telči
m. 5 ,
p. *Jan Brož*, g. v Klatovech
m. 9., 14., 17., 19 , 22., 26., 29.,
p. *K. Doskočil*, Král. Vinohrady
f. 6., 8.
p. *Viktor Dosoudil*, VII. r. v Prostějově
m. 1.—6., 11.—13., 15.—33., 34., 37., 39.,
p. *Vlastimil Fiala*, VI*a* r. v Pardubicích
m. 17., 21., f. 2. d. 1.—3 , 5.—7.,
p. *František Francouz*. VII g. v Příbrami
m. 17. f. 1., 5., 6.,
p. *František Frydrych*, VI. r. v Hradci Král.
m. 21., 22., 27., d. 2.,
p. *František Gloser*, VII*a* I. r. v Brně
m. 2., 3., 5., 7., 10., 13., 15., 17 , 24 , 33.—35 , 38., d. 1.—3., 5., 6.,
p. *Josef Hanák*, VIII. g. v Prostějově
m. 1.—40 , f. 1.—3., 5.—8., 10.,
p. *Oldřich Hanuš*, VI. r. v Lounech
m. 21., 26 , f. 1., 5., 6 , d 2.
p. *Bedřich Hausdorf*, VI. r. v Jičíně
m. 30.,
p. *Václav Hlaváček*, VI. g. v Praze-II., v Žitné ul.
m. 1., 2., 7., 11., 13 , 17., f. 5., 6 , d. 1. 2.,

p. *Josef Hoščálek*, VII. g. ve Val. Meziříčí.
m. 21.,
p. *C. Jakeš*, VIII*b* I. g v Brně
m. 2.—7., 10., 11., 13., 15., 17., 20., 24.—26., 28.—30., 32.—34., 36.—40.,
p. *Karel Jelínek*, VI. r. v Telči
m. 2., 4.—8., 10., 13., 15, 16., 21., 24.—34., 36.—38., 40., f. 1.—3., 5., 6.,
p. *Václav Jíra*, VI. g. v Praze-II., v Žitné ul.
m. 1., 2., 7., 17., f. 6.,
p. *Břetislav Juráš*, VII. g. v Kroměříži
m. 2., 4., 7., 9., 13., 17., 20., 25., 30., 33.,
p. *Karel Kastel*, VI. r. v Hradci Králové
m. 2., 4, 7., 8., 15., 29., 30, 34., 38.,
p. *František Kašpar*, VII. r. v Kutné Hoře
m. 2.—11., 13., 15.—18., 20., 25.—33., 34.—40., f. 1—10., d. 1.—8.,
p. *J. Kňourek*, VII. r. v Jičíně
m. 1.—40., f. 1., 2., 5.—10., d. 1.—8,
p. *František Kofránek*, VI. r. v Olomouci
m. 4., 7., 10., 38., f. 2.,
p. *Arnošt Kollmann*, VII*a* r. na Král. Vinohradech
m. 1.—11., 13., 15.—30., 32.—35., 38.—40., f. 1.—10, d. 1.—3., 5.—8.,
p. *Frant. Kornhäuser*, VII*a* r. v Karlíně
m. 2.—40., f. 1., 2., 5.—7., 9., d. 1.—8,
p. *Vladimír Kořínek*, VI*b* r. v Olomouci
m. 4., 5., 7., 10., 25.,
p. *Jan Kostlivý*, VIII. g. v Domažlicích
m. 1.—5., 7., 10., 15., 17., 22., 25.—27., 29., 30., 34., 36.—38., f. 1.—10.,
p. *František Kostrouch*, VI. g. v Praze-II., v Žitné ul.
2., 17., 21.,
p. *Vojtěch Krch*, VII. r. v Hradci Králové
m. 1.—17., 25., 26., 29., 30., 32.—36., 38, f. 1. 3, 5.—10., d. 1.—8.,
p. *Jaroslav Kučera*, VII. r. v Čes. Budějovicích
m. 1.—23., 25.—40., f. 1.—8.,
p. *Karel Kučera*, VI. g. v Praze-II., v Žitné ul.
m. 1., 2., 6, 7., 11., 13., 17., f. 5.,
p. *Theodor Mastný*, VI. g. v Praze-II., v Žitné ul.
m. 1.—3., 7.—10., 13., 15, 17., 21., 25., 31., 36., 40., f. 1., 5., 7.,

p. *Antonín Mendl*, VII. r. v Bučovicích
d. 1.—5,
p. *B. Mendl*, VII. g. v Praze-II., v Žitné ul.
m 1.—7., 9.—11., 13., 15., 17., 18., 21., 22, 25, 34.—40.,
f. 1.—10.,
p. *Gustav Měska*, VII. g. v Příbrami
m. 2., 4., 7., 9.—11., 17, 25, 28., 30., f. 1.—8.,
p. *L. Miškovský*, VI. r. v Nymburce
m. 1.—40., f. 1.—3., 5., 6., d. 1.—8,
p. *Bedřich Neumann*, VII. g. ve Slaném
m. 2., 4., 7., 13., 15., 17, 19., 20., 29., 30., 34., 38.,
f. 1.—3., 5., 6, 8.—10,
p. *Karel Neumann*, VII*b* r. v Praze-II.
f. 1.—3., 5.—9.,
p. *Alois Okleštěk*, VII. r. v Prostějově
m. 1.—5., 7., 8, 17., 21., 24., 25., 33.—35., 39.,
p. *Jan Páleník*, VII. g v Kyjově
m. 34.,
p. *Josef Papež*, VIII. g., v Benešově u Prahy
m. 2.—5., 7., 13., 17., 20.—22., 29., 34., 36.—38.,
p. *Stanislav Pavlík*, VIII. r. g. v Praze, v Křemencově ul.
m. 4, 5., 7, 13., 17., 21., 29, 30., 33., 38., 40., f. 2., 5.,
7., 9., 10.,
p. *Josef Pazourek*, VII. g. v Praze-II., v Žitné ul.
m 20., 25., f. 2., 4, 5., 8,
p. *V. Pelant*, VI r. v Jičíně
m. 30.,
p. *Alois Pelikán*, r. v Telči
m. 1.—40., f. 1.—8., d. 1.—8.,
p. *Adolf Plaček*, VI. r. na Král. Vinohradech
m. 4., 5, 22., 23., f. 5., 6.,
p. *Josef Podhajský*, VIII. g. v Benešově u Prahy
m. 1.—5., 7., 15., 17., 20., 21., 29., 36,
p. *František Pohořský*, VII*b* r. v Písku
m. 37.,
p. *K. Průša*, VII. g. ve Slaném
m. 2., 4., 5, 7.,
p. *Josef Rejsek*, VII. g. v Praze-II., v Žitné ul.
m. 1.—3., 7., f. 1., 2., 5., 6.,
p. *Rudolf Rychtařík*, VIII. g. v Praze-II., v Žitné ul.
m. 1., 10., 11., 17., 29., f. 1., 6., 7.,
p. *Arnošt Rubín*, r. v Karlíně
d. 1.—3., 5.—8,

p. *J. Řeháček*, VII. r. v Kutné Hoře
d. 1., 2.,
„gymnasista z Čes. Budějovic"
m. 2., 4, 5., 7., 11., 13., 25.—27, 29,
p. *Jaromír Schauer*, VIII. g v Praze-II., v Žitné ul.
m. 3., 9, 11., f. 1, 4.—6,
p. *Ladislav Staněk*, VI. r. v Litovli
m. 2., 3., 5., 7, 17., 20.—22., 25., 35.—39., f. 1.—10.,
d. 1.—8,
p. *Václav Steinocher*, VI. g. v Čes. Budějovicích
m. 2.—5., 7., 9.—18., 20., 23., 25.—29., 31., 33.—40.,
f. 2., 5., 6.,
p. *Ladislav Stumpf*, VII. r. v Nymburce
m 4., 5., 7., 9., 11., 13., 29.,
p. *František Svoboda*, VI. r. v Telči
m. 2., 4.—9., 17., 18., 22., 23., 25., 28.—30., 33., 35.—39.,
p. *Rudolf Šimůnek*, VII. g. akademického Praze
m. 1., 2.—10., 13., 15.—26, 31., 33.—35., 38.
p. *Stanislav Šolta*, VII. g. v Praze-II., v Žitné ul.
m. 1.—4., 7, 15., 25., 29., f. 1—3., 5.-8., 10,
p. *Karel Teige*, VII. g. v Praze-II., v Žitné ul.
m. 1.—40., f. 1.—10.,
p. *Karel Teissig*, VIII g. v Praze-II., v Žitné ul.
m. 1., 2., 5., 11., 13., 17., f. 1., 2., 5., 6.,
p. *Josef Vaněk*, VIII. g. v Domažlicích
m. 1.—5., 7., 10., 11., 15., 17., 20., 25., 27.—30., 34.—40.,
f. 1.—9.,
p. *Al. K. Wangler*, VIII. g. v Čáslavi
m. 1.—7., 9.—11., 13.—17., 20.—31., 33.—36., 38.,
p. *Alois Zlámalík*, VIII. g. ve Val. Meziříčí
m. 4, 5., 9., 17.,
p. *Jan Zlatník*, VII., g. v Hradci Král.
m. 2., 13., 17., 20., 24.,
p. *Jan Zubík*, V*b* r. v Praze-III.
m. 2., 3., 6., 16., 20., 24., 29., 30., 35.,
p. *Karel Zvěřina*, VIII. g v Boskovicích
m. 2., 5., 7., 8., 10., 11., 13., 17., 18., 20., 25., 26., 29.,
30., 34.—40., f. 1., 2., 6.—10.,
p. *Václav Žák*, VII. g. v Praze-II., v Žitné ul.
m 25., f. 5., 6., 8.,
p. *K. Žídek*, VIII. g. v Mor. Ostravě.
m. 2., 5., 17, 21., 30., 37., 38., f. 1., 2., 5.

Udělení cen.

Z mathematiky:

Redakce úloh, přihlížejíc nejen k počtu, ale i k jakosti řešení, přisoudila těmto pp. řešitelům ceny vypsané výborem „Jednoty českých mathematiků".

Ceny první:

1. *Boža Barták*, r. v Karlíně.
2. *Josef Berný*, VIIa r. v Jičíně.
3. *Josef Hanák*, VIII. g. v Prostějově.
4. *J. Kňourek*, VII. r. v Jičíně.
5. *Arnošt Kollmann*, VIIa r. na Král. Vinohradech.
6. *Frant. Kornhäuser*, VIIa r. v Karlíně.
7. *Jaroslav Kučera*, VII. r. v Čes. Budějovicích.
8. *Alois Pelikán*, r. v Telči.
9. *Václav Steinocher*, VI. g. v Čes. Budějovicích.
10. *Karel Teige*, VII. g. v Praze II., v Žitné ul.

Ceny druhé:

1. *Viktor Dosoudil*, VII. r. v Prostějově.
2. *C. Jakeš*, VIIIb I. g. v Brně.
3. *Karel Jelínek*, VI. r. v Telči.
4. *Frant. Kašpar*, VII. r. v Kutné Hoře.
5. *Jan Kostlivý*, VIII. g. v Domažlicích.
6. *Vojtěch Krch*, VII. r. v Hradci Králové.
7. *B. Mendl*, VII. g. v Praze II. v Žitné ul.
8. *L. Miškovský*, VI. r. v Nymburce.
9. *Rudolf Šimůnek*, VII. g. akademického v Praze.
10. *Josef Vaněk*, VIII. g. v Domažlicích.
11. *Al. K. Wangler*, VIII. g. v Čáslavi.
12. *Karel Zvěřina*, VIII. g. v Boskovicích.

Ceny třetí:

1. *Jaroslav Beneš*, VII. g. v Praze II. v Žitné ul.
2. *Frant. Gloser*, VIIa I. r. v Brně.
3. *Theodor Mastný*, VI. g. v Praze II. v Žitné ul.
4. *Gustav Měska*, VII. g. v Příbrami.
5. *Bedřich Neumann*, VII. g. ve Slaném.
6. *Josef Papež*, VIII. g. v Benešově u Prahy.

7. *Stanislav Pavlík*, VIII. r. g. v Praze v Křemencové ul.
8. *Josef Podhájský*, VIII. g. v Benešově u Prahy.
9. *Ladislav Staněk*, VI. r. v Litovli.
10. *František Svoboda*, VI. r. v Telči.
11. *Stanislav Šolta*, VII. g. v Praze II. v Žitné ul.
12. *Karel Teissig*, VIII. g. v Praze II. v Žitné ul.
13. *Jan Zubík*, Vb r. v Praze III
14. *K. Žídek*, VIII. g. v Mor. Ostravě.
15. *K. Žídek*, gymnasista z Čes. Budějovic.

Spis: Dr. F. J. Studnička: Úvod do analytické geometrie v rovině (Sborník J. Č. M. č. VII.) obdrží pp.: *Josef Hanák*, *Frant. Kornhäuser*, *Alois Pelikán.*

Z deskriptivní geometrie:

Spisy: Machovec: Zobrazování tečen a středů křivosti a Jarolímek: Deskriptivní geometrie pro vyšší školy reálné. Díl I., II., III. obdrží p. *Alois Pelikán.*

Spis: Jarolímek: Deskriptivní geometrie pro vyšší školy reálné. Díl I., II., III. obdrží pp.: *Boža Barták*, *Frant. Kašpar*, *Frant. Kornhäuser.*

Z fysiky:

Spis: Strouhal-Kučera, Mechanika, 2. vyd. (Sborník J. Č. M. č. XII.), obdrží pp.:

1. *František Kašpar*, VII. r. v Kutné Hoře,
2. *Ladislav Staněk*, VI. r. v Litovli.

Spisy: Briot-Pšenička: Mechanická theorie tepla, Strouhal: Ocel a její vlastnosti magnetické a galvanické, obdrží pp.:

1. *Jaroslav Beneš*, VII. g. v Praze II., v Žitné ul.
2. *Josef Berný*, VII. r. v Jičíně.
3. *Jan Kostlivý*, VIII. g. v Domažlicích.
4. *B. Mendl*, VII. g. v Praze II., v Žitné ul.
5. *Josef Vaněk*, VIII. g v Domažlicích.