Výpočty jsou provedeny v obr. 4. a 5., kde je pupila vstupní označena P_1 a pupila výstupní P_2. Při symetrických systemech vidíme, že pupily a hlavní roviny spadají do jednoho místa, to však je jen výminkou. Je-li system nesymetrický, jsou pupily a hlavní roviny vždy na jiných místech. O pořadu pupil ve směru paprsků platí totéž co bylo řečeno o hlavních rovinách. I zde záleží na vzdálenosti obou čoček od sebe a mohli bychom si průběh toho znázorniti graficky, což by vedlo k podobným výsledkům jako nahoře.

Podobným způsobem dá se počítati průběh paprsků i u systemů velmi složitých a myslím, že uvedené příklady stačí jako návod tomu, kdo by se propočítáním systémů optických chtěl zabývati.

Nové partikulární integrály asteroidického problému tří těles.

Vladimír Václav Heinrich v Praze.

Navazuji bezprostředně na poslední práci (odstavec I. p. 320—24 Časop. XLVIII), kdež je na základě mých předchozích vyšetřování v novém tvaru formulována základní otázka (l. c. p. 324 dole) moderní theoretické astronomie. I jedná se o konečné řešení problému prastarého.

Uvedeny tam až dotud známé dva pokusy řešení.

I. (Cesta první.) Voliti jako první přiblížení Poincarého periodická řešení první sorty, jichž je množství dosti kompaktní. Uvedeno analogon: Lagrangeův kruh, dif. rovnice s kontantními coeficienty a druhým rušivým členem

II. (Cesta druhá.) Voliti za východisko řešení druhé sorty, jichž je sotva několik. Analogon Lagrangeova ellipsa, dif. rovnice s periodickými coeficienty a bez druhého členu.

Perioda řešení obou druhů I., II. obnáší pokaždé nejvýše několik oběhů rušivé planety. Z důvodů hustoty center užívána skoro výhradně cesta I. Ale její výhody narazily na nemožnost praktickou, jíž jsem vysvětlil nalezením křivek divisorů.

Rovnice těchto křivek znovu zjednána v cit. pojednání. Průseky jejich se synodickými drahami vedou k nalezení singulárních bodů rozvojů — jež působí divergenci řad.

Referát o přednášce v Hamburce ukončil jsem následovně Časop. XLVIII. p. 324.

„Vizme nyní positivní stránku věci. Jak zachrániti ona hustá centra (cesta I.) a tím moderní metody. Odpověď zatím není.

Nevzdal jsem se posud mínění o možnosti důkazu a konstrukce jistých periodických řešení, jež chci zváti sekulárními a která dle všeho souvisí s oněmi, jež Poincaré nazývá du deuxième genre.“

Poznámka učiněna proto, že jsem se již od doby quantitativního vyčíslení křivek 1914 zanášel konstrukcí řešení druhého genru pro daný případ. (Poincaré Meth. nouv. III. p. 201 et. seq.) Pokusy zůstaly marny. Po podrobném rozboru příslušných determinantů shledáno, že neexistují tak zv. body rozvětvovací, pro ona řešení potřebné.

Proti tomu předpověď uvedená v první části poznámky potvrdila se v nejobecnějším slova smyslu. Projednav l. c. spíše negativní stránku problému obrátil jsem se ku míněné „positivnější stránce“. Pochod úsudkový byl asi ten: Co je příčinou divergence variačních rovnic s druhým členem (cesta I.). Jistě saekulární změny, to je členy amplitud velmi velikých, zaviněné novou rušivou silou. Všechna řešení cesty II. vykazují až na oscillace, pevné perihely planetoidy. Řešení tato byla studována velmi podrobně (Hill, Poincaré a j.).

I snažil jsem se překlenouti propast tím, že nutno zachovati rotaci porihelů místo oscillace také pro případ nových rušivých sil (od e!).

Opíraje se pak o křivky divisorů před tím výpočtem pracně získané, činil jsem podél křivky $k = 2$ hypothésy o excentricitě řešení. Několik operací à la Delaunay — které jsou v podstatě variací stálých — odstranilo staré předsudky.

Připraviv takto počáteční prvky, jal jsem se studovati celý problém s volbou excentricity rušivé dráhy jako parametru rušivého. Křivka $k = 2$ vedla ku zjištění celé spousty nových řešení, jichž perioda určena nejdříve. Byla konstruována tak, aby se vyhýbala cestě uvedené křivky, i volil jsem pro ně název semisaekulární neb longaevalní.

Dle analytických výrazů pro saekulární pohyb perihelu, jakož i dle průběhu křivek pouštěl jsem se po té ku periodám delším a delším, staletým a tisíciletým.

Po těchto quantitativních výsledcích bylo snadno projednati stránku qualitativní pomocí tak zv. calcul des limites, dokázati existenci nových řešení přímým dosazením, jakož i studovati otázky stability.

Tímto způsobem objevil jsem zcela obecně pro každý typ kommensurability nízké i vyšší $\frac{p+q}{p}$ *pokaždé mnohonásobně nekonečné komplexy periodických řešení v sousedství křivek resonančních.*

Zovu je obecně saekulárně periodická řešení, kterýž název volen dříve, než byly nalezeny l. c. 324. I rozeznávám pro každý typ $\frac{p+q}{p}$ dvě třídy řešení a tři kategorie.

Dle doby trvání jedné periody jedná se o řešení (kategorie):

1. saekulární dlouhoperiodická s periodou mnoha tisíciletí,
2. saekulární krátkoperiodická s periodou několiha staletí,
3. semisaekulární, longaevelní s periodou do sta let.

Dle toho, obsahuje-li perioda saekulárního řešení jeden nebo více oběhů (rotací) přímky apsid (spojnice perihelu a aphelu), rozeznávám pak řešení třídy prvé a druhé.

Kdežto řešení třídy prvé jsou rozeseta prostorem asi s hustotou obdobnou jako uvedená řešení první sorty (cesta I.) Poincarého — t. j. dosti kompaktně — zaujímají nekonečné komplexy druhé třídy všech typů $\frac{p+q}{p}$ rozdělení pokaždé analogické onomu, jež Cantor zove abzählbare unendliche Menge poměry celých čísel $\sim$ denních úhlových rychlostí.

Poněvadž nemožno v rámci časopisu podati všechny výsledky studií, tím méně jich podrobné důkazy, odkazuji čtenáře na svá pojednání, uveřejňovaná ve spisech Král. Čes. Spol. Nauk, jakož i v Bulletin astronomique. V dalším zmiňuji jen některých věcí zajímavých i pro toho. kdo nebude studií dále podrobně sledovati.

Nejbohatší rozmanitostí periodických řešení saekulárních ukázala se zejména křivka $k = 2$.

Z uvedených drah typu $\frac{2}{1}$ jsou některé v mechanice velmi neobvyklé.

Představme si planetoidu typu $\frac{2}{1}$ (Hecuba 108), která má střední denní pohyb (úhlovou rychlost) dvakrát větší než rušivá planeta 300″ ♃. 600″, (108). V celkovém pohybu rušeném i nerušeném hmotou planety (Jupitera) připadá na dvě revoluce planetoidy kolem slunce toliko jedna revoluce Jupiterova, t. j. celková perioda 12 let Julianských (okrouhle).

Nalézají-li se na počátku pohybu všechna tři tělesa na přímce (pořadí slunce, planetoida, Jupiter, zove se symetrická konjunkce — pořadí planetoida, slunce, Jupiter, symetrická opposice) — pak po označené době vrátí se všechna tři tělesa do téže konfigurace.

Analyse pro $e' = o$ (excentricita dráhy rušivé planety) ukazuje, že elliptická dráha planetoidy sama jako celek se otáčí. takže přímka apsid (spojnice perihelu s aphelem) rotuje dokola opisujíc — zpravidla po staletích celých 360°.

Tyto pohyby (rotace perihelů) zovou se saekulární, neboť je pochopitelno, že všeobecně takový perihel sám rychle se neotáčí.

Po uplynutí periody pohybů nezaujímá arciť uvedená přímková spojnice všech tří těles tutéž polohu v prostoru. nýbrž je posunuta o úhel celkové rotace perihelu planetoidy během jedné periody pohybu. Na perihel planety rušivé (♃) netřeba bráti zřetele, pokud předpokládáme ($e' = o$ dráhu Jupiterovu kruhovitou).

Věci se změní docela, předpokládá-li se, že Jupiter sám má dráhu elliptickou $e' \lessgtr o$ s perihelem samozřejmě pevným neboť vliv planetoidy hmoty nullové pohybu takového vynutiti nemůže. — V případě tomto po uplynutí celé periody Jupiter není více v téže relativní poloze ku svému fixnímu perihelu.

I ukázala dosavadní analyse Poincarého, Hilla a j., že nutno pokládati saekulární rotace přímky apsid o celých 360°

za vyloučené v případě $e' \gtrless 0$, nejvýše nalezena řešení vykazující saekulární oscillace (kyvadlové) kolem polohy základní na určitý i dosti značný počet stupňů 60° (II. sorta Poincarého, cesta II.).

Ve přítomné práci nalezeny však mnohonásobně nekonečná množství, vždy znovu se opakující pro každý typ $\frac{p+q}{p}$ pro každou kategorii (resp. každou třídu) periodických drah, pro něž saekulární rotace přímky apsid (perihelu) je základní charakteristickou vlastností.

Pro laiky zvláště budou zajímavými pohybové formy ná sledující.

Vedle drah s pomalou saekulární rotací perihelu, existují také dráhy longuaeválni (semisaekulární) viz tabulku (třída I., kategorie III.) s abnormálními rychlostmi rotace perihelu. (Př. $f = 299'' 13$, $99'' 71$ atd. mají periody jen 12, resp. 35·58 let Julianských.) I zacházejí některé z nich až do bizarností následujících:

Mezitím co asteroida postupuje ve dráze elliptické, rotuje perihel směrem souhlasným neb opačným tak, že během jediného oběhu rušivé planety Jupitera opíše 360°.

Oběhne-li planeta jednou, oběhne perihel dvakráte zpět.

Oběhne-li planeta dvakráte, perihel otočí se pětkráte zpět.

Asteroida jakoby byla nucena doháněti svůj perihel neb týž jí přicházel vstříc. Rychlost perihelu roste dále enormně, až nabývá rychlostí nekonečných, což značí v praxi patrně instabilitu mechanickou.

Periodické řešení, na něž bude nutno navázati pohyb planetoidy Hecuby, má asi periodu 1500 Julianských let, (při tom realný pohyb v přírodě odhadován dle machanické quadratury Schulhofovy, objímající arciť jen asi 30 let).

Jiný z výsledků zní následovně: Planetoida původně obíhající *dvakráte* za dobu jedné revoluce planety Jupitera, doznává tak enormních poruch v délce a délce perihelu, že místo toho oběhne *třikráte* i vykazuje pak kritické členy (termy) typu Hecuba.

Jako ukázku sestavujeme jenom výsledky týkající se typu $\frac{2}{1}$. V tabulce značí:

f rychlost rotace perihelu za jeden sluneční střední den,
C počet oběhů planety během jedné periody,
C' dobu trvání celé periody v létech Julianských,
e excentricitu dráhy planetoidy,
n úhlovou rychlost (střední denní pohyb planetoidy),
n' úhlovou rychlost Jupitera.

Typ Hecuba $\frac{2}{1}$ třída prvá:

f	C	C'	Symetr. konjunkce směr rotace perihelu retrográdný		Symetrická opposice směr rotace perihelu direktní	
			e	n	e	n
299″13	1	11·86	0·001	897″4		
149″57	2	23·72	0·003	747″8	0·003	448″7
99·71	3	35·58	0·004	698″0	0·004	498″5
74·78	4	47·44	0·005	673″0	0·006	523″5
59·83	5	59·30	0·007	658″1	0·007	538″4
49″85	6	71·16	0·008	648″1	0·009	548″4
42·73	7	83·02	0·010	641″0	0·010	555″5
37·39	8	94·88	0·011	635″7	0·012	560″9
33·24	9	106·74	0·012	631″5	0·013	565″0
29·91	10	118·60	0·014	628″2	0·015	568″3
24″93	12	142·32	0·016	623″2	0·018	573″3
21″37	14	1660·4	0·019	619″6	0·022	576″9
18″71	16	189·76	0·021	617″0	0·025	579″6
16″63	18	213·48	0·024	614″9	0·028	581″6
14″96	20	237·20	0·026	613″2	0·032	583″3
9″97	30	355 8	0·04	608″2	0·05	588″3
7″48	40	474·4	0·05	605″7	0·08	590″8
5″98	50	593·0	0·06	604″2	0·11	592″3
2″99	100	1186	0·10	601″2		
1″50	200	2372	0·16	599″8		

Typ Hecuba třída druhá:

$\frac{n'}{f}$	f	C	C'	Symetrická konjunkce		Symetrická opposice	
				e		e	
$\frac{1}{1}$	299″13	1	11·86	0·001		0·001	
$\frac{4}{3}$	224″35	4	47·44				
$\frac{10}{7}$	209″39	10	118·60				
$\frac{3}{2}$	199″42	3	35·58				
$\frac{5}{3}$	179″48	5	59·30				
⋮							
$\frac{2}{1}$	149″57	2	23·72	0·003		0·003	
$\frac{7}{3}$	128″20	7	83 02				
⋮							
$\frac{3}{1}$	99″71	3	35·58	0·004		0·004	
$\frac{7}{2}$	85″47	7	83·02				

Ku konci přehlédněme především definitivní odpověď neb konečné positivní řešení fundamentální otázky moderní astronomie, o níž jednáme.

Zhora uvedená cesta I. poskytovala hojně periodických řešení (center libračních), ale jich použití znemožněno následkem kalamity křivek divisorů, jež působí divergenci řad. Nyní prokázán enormně daleko větší počet řešení „saekulárních“, která připouští hned od počátku cestu II. I lze bez aproximací pro $e' = o$ vyhnouti se bodům singulárním i kalamitě divisorů, navážeme-li počet na některé z řešení saekulárních, kteráž hned od počátku berou v úvahu excentricitu rušivé planety e'.

Ku článku pana J. Svobody Časop. XLIX. p. 258—262, jakož i ku redakčním poznámkám tamže XLVIII. p. 336, XLIX. p. 262, které opakují věci už dříve řečené, nehodlám dále od povídati, pokládaje každou další diskussi za neužitečnou.