

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

V. Vojtěch
Propočítávání čoček

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 50 (1921), No. 4-5, 277--289

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123783>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1921

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

takže pak

$$y = \varphi - (a) \varphi(s) + \frac{\varphi(s)^2 - \varphi(a)^2 - \varphi'(s) + \varphi'(a)}{2} b + \dots$$

a tedy derivace pro $b = 0$:

$$2 \int_0^1 \frac{x^{s-1} - x^{a-1}}{1-x} \log(1-x) dx = \varphi(s)^2 - \varphi(a)^2 - \varphi'(s) + \varphi'(a).$$

(14^o)

(Pokračování.)

Propočítávání čoček.

V. Vojtěch.

Při konstrukci různých optických přístrojů je potřebí znáti konstanty čoček a jejich kombinací, abychom si udělali správnou představu o chodu paprsků. Jsou to především kardinální body a pupily. Začátečnickovi v tomto oboru dělá počítání jistých potíží jak z učitelské moji činnosti je mi známo a proto myslím, že tento článek, který byl původně určen jen pro moji soukromou potřebu a pro účele přednášek, přijde čtenářům tohoto časopisu vhod a povzbudí je ku propočítávání a konstrukci jednoduchých optických přístrojů.

V literatuře vyskytuje se celá řada vzorců pro počítání s čočkami, nejjednodušší však, které se hodí pro naše účele jsou vzorce *Gullstrandovy*, kterými zvláště kombinace čoček dají se snadno počítati. Odvození jich nemohu na tomto místě probírat odkazuje na příslušnou literaturu, uvedu pouze hlavní z nich a praktické příklady jak s čočkami jednoduchými tak i kombinacemi

Vzorce tyto jsou založeny na reciproké hodnotě ohniskové vzdálenosti tak zv. lámavosti D a dlužno při nich všechny délkové veličiny vyjádřiti v metrech.

Lámavost nějaké kulové plochy o poloměru r , oddělující dvě prostředí indexu lomu n a n' od sebe, (n před plochou, n' za plochou ve směru paprsků) je vyjádřena:

$$D = \frac{n' - n}{r} \quad (1)$$

Kombinujeme li dvě centrované lámavé plochy je celková lámavost:

$$D = D_1 + D_2 - \delta D_1 D_2 \quad (2)$$

kde D je lámavost celé kombinace, D_1 lámavost první a D_2 lámavost druhé plochy, δ pak je tak zv. redukovaná délka, totiž vzdálenost obou ploch od sebe dělená indexem lomu prostředí mezi plochami se nacházejícího.

Vzdálenost I hlavní roviny celé kombinace od *první* plochy lámavé je:

$$h = - \frac{n D_2 \delta}{D} \quad (3)$$

a vzdálenost II hlavní roviny od *druhé* plochy lámavé je:

$$h' = - \frac{n' D_1 \delta}{D} \quad (4)$$

Těmito vzorci můžeme počítati kardinální body všech druhů čoček. Při tom je třeba šetřiti jen té opatrnosti abychom při délkách užívali správného znaménka. Všechny poloměry, které jsou konvexní stranou obráceny ku paprskům počítají se se znaménkem +, poloměry obrácené konkávní stranou k paprskům se znaménkem —. Při nanášení délek pak počítají se kladné výsledky v prostoru předmětovém proti směru paprsků, v prostoru obrazovém ve směru paprsků. Veličiny jež vyšly se znaménkem —, nanášej se opáčně.

Obraťme se nyní k některým praktickým příkladům a počítejme nejprve některé typy jednoduchých čoček. Zde je úloha zjednodušena tím, že čočka z obou stran je ve vzduchu, jehož index lomu počítáme 1. Je-li index lomu skla čočky n , d , pak vzdálenost obou lámavých ploch od sebe měřena na ose optické obdržíme dosazením do vzorce (1) a (2) pro lámavost menisku pozitivního kde oba poloměry mají stejné znaménko, tento výraz:

$$D = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n - 1)^2 d}{n r_1 r_2} \quad (5)$$

Z rovnic (3) a (4) dosazením za prvou resp. druhou lámavost a za δ , obdržíme:

$$h = \frac{(n - 1)d}{n r_2 D} \quad (6) \quad h' = - \frac{(n - 1)d}{n r_1 D} \quad (7)$$

Z rovnice (5) vidíme, že druhý člen možno zanedbat v případě, že d blíží se 0, — čočka nekonečně tenká — neb když jeden z obou poloměrů je nekonečně veliký. — čočka plankonvexní. —

Uvedu nyní některé zvláštní typy čoček, pro které se hořenní vzorce velmi zjednoduší:

I. Čočka plankonvexní

a) obrácená rovnou stranou k paprskům $r_2 = \infty$

$$D = (n - 1) \frac{1}{r_1} \quad (8)$$

$$h = 0 \quad (9) \quad h' = -\frac{d}{n} \quad (10)$$

b) obrácená rovnou stranou k paprskům $r_1 = \infty$

$$D = (n - 1) \frac{1}{r_2} \quad (11)$$

$$h = -\frac{d}{n} \quad (12) \quad h' = 0 \quad (13)$$

II. Čočka plankonkavní

a) obrácená dutou stranou k paprskům $r_2 = \infty$

$$D = -\frac{n - 1}{r_1} \quad (14)$$

$$h = 0 \quad (15) \quad h' = -\frac{d}{n} \quad (16)$$

b) obrácená rovnou stranou paprskům: $r_1 = \infty$

$$D = -\frac{n - 1}{r_2} \quad (17)$$

$$h = -\frac{d}{n} \quad (18) \quad h' = 0 \quad (19)$$

III. Čočka nullová.

Nullovou zoveme čočku, jejíž poloměry jsou stejně veliké a mají stejný směr $r_1 = r_2 = r$

$$D = \frac{(n - 1)^2}{n} \cdot \frac{d}{r_2} \quad (20)$$

$$h = \frac{r}{n - 1} \quad (21) \quad h' = -\frac{r}{n - 1} \quad (22)$$

Je-li $d=0$ je $D=0$ čočka je teleskopická. Rovněž je-li poloměr $=\infty$ přejde čočka nullová v plochu rovnou a $D=0$ IV. Čočka koncentrická.

Je čočka jejíž poloměry mají společný střed. Při tom mohou být oba poloměry stejného směru — čočka negativní — neb opáčeného směru, — čočka bikonvexní.

A) Poloměry stejného směru $r_1 - r_2 = d$

$$D = \frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (23)$$

$$h = -r_1 \quad (24) \quad h' = r_2 \quad (25)$$

Obě hlavní roviny spadají dohromady se středem kulových ploch.

B) Oba poloměry jsou různého směru Zde možno rozeznávat dva případy:

1. Oba poloměry jsou různě veliké $d = r_1 + r_2$

$$D = \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (26)$$

$$h = -r_1 \quad (27) \quad h' = -r_2 \quad (28)$$

2. Oba poloměry jsou stejně veliké $d = 2r$ čočka kulová.

$$D = \frac{2(n-1)}{nr} \quad (29)$$

$$h = -r \quad (30) \quad h' = -r \quad (31)$$

Obě hlavní roviny spadají opět do společného středu poloměrů.

Přikročme nyní ku praktickému počítání některých čoček pomocí hořenních vzorců. Propočítal jsem několik druhů čoček jak pozitivních tak i negativních pro index lomu průměrného korunového skla totiž $n = 1,5$ a tloušťky čočky 1–3 cm s různými poloměry a výsledky jsou uvedeny číselně v následujících tabulkách a výkresech. Všeobecně vidíme, že hlavní roviny nejsou, vyjma čoček bikonvexních a bikónkávních o stejných poloměrech, uloženy symetricky k čočce, nýbrž že směřují ku více zakřivené ploše větší lámavosti. Při menisku jak pozitivním tak i negativním záleží poloha hlavních rovin na celkové lámavosti čočky. Při veliké lámavosti je jedna rovina uvnitř čočky, druhá mimo čočku. Zmenšuje-li se lámavost, vystupují obě roviny z čočky a vzdalují se od ní. Jelikož v tomto případě se vzdálenost obrazu

I. Meniskus s přibývajícíím r_2 .

Označení v obr. 1 a 2	Různé ohniskové vzdálenosti							Redukováno na $f = 10 \cdot 00$						
	r_1	r_2	d	D	f	h	h'	r_1	r_2	d	D	f	h	h'
I. Meniskus negativní	10·0	1·0	1·0	-45·0	-2·22	-0·74	0·074	45	4·5	4·5	10·0	10·00	-3·333	0·333
II.	10·0	3·0	1·0	-11·11	-9·00	-1·00	0·300	11·11	3·3	1·1	10·00	10·00	-1·111	0·333
III.	10·0	5·0	1·0	-4·67	-21·41	-1·426	0·713	4·67	2·3	0·47	10·00	10·00	-0·666	0·333
IV.	10·0	7·0	1·0	-1·91	-52·43	-2·492	1·745	1·91	1·34	0·19	10·00	10·00	-0·458	0·333
V.	10·0	9·0	1·0	-0·37	270	-10·00	9·000	0·37	0·33	0·04	10·00	10·00	-0·370	0·333
Plusový Zobita	10·0	10·0	1·0	0·166	600°	20·000	-20·000	0·166	0·166	0·016	10·00	10·00	0·333	-0·333
Meniskus pozitivní	10·0	11·0	1·0	0·606	165	5·000	5·500	1·606	0·666	0·061	10·00	10·00	0·303	-0·333
II.	10·0	15·0	1·0	1·78	56·20	1·248	1·873	1·78	2·67	0·18	10·00	10·00	0·800	-0·333
III.	10·0	20·0	1·0	2·68	37·30	0·622	1·244	2·68	5·36	0·27	10·00	10·00	0·666	-0·333
IV.	10·0	30·0	1·0	3·39	29·50	0·328	0·982	3·39	10·17	0·34	10·00	10·00	0·111	-0·333
V.	10·0	50·0	1·0	4·03	24·82	0·165	0·827	4·03	20·15	0·40	10·00	10·00	0·067	-0·333
VI.	10·0	100·0	1·0	4·52	22·12	0·074	0·738	4·52	45·20	0·45	10·00	10·00	0·034	-0·333
VII.	10·0	1000	1·0	4·95	20·10	0·007	0·673	4·95	49·50	0·49	10·00	10·00	0·003	-0·333
	10·0	∞	1·0	5·00	20·00	0	0·666	5·00	∞	0·50	10·00	10·00	0	-0·333

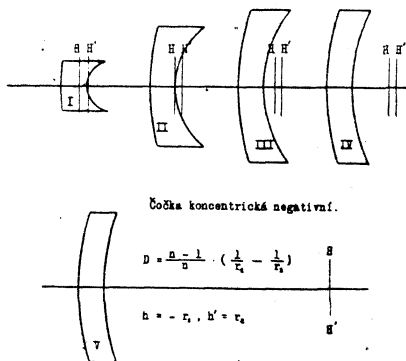
II. Meniskus s přibývajícíím d .

r_1	r_2	d	D	f	h	h'
5	10	0	5·00	20·00	0	0
5	10	0·5	5·17	19·35	0·322	—0·645
5	10	1·0	5·33	18·75	0·625	—1·250
5	10	2·0	5·66	17·65	1·176	—2·358
5	10	3·0	6·00	16·67	1·667	—3·333
5	10	5·0	6·67	15·00	2·500	—5·000
5	10	10·0	8·33	12·00	4·000	—8·000

III. Čočky bikonvexní a bikonkávní s různými r_2 a d .

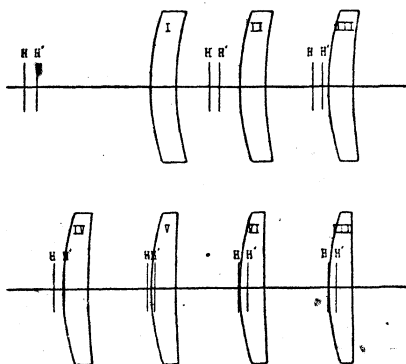
	Označení v obr. 3.	r_1	r_2	d	D	f	h	h'
Čočka bikonvexní		10·0	—10·0	0·5	9·92	10·07	—0·168	—0·168
		10·0	—10·0	1·0	9·83	10·16	—0·339	—0·339
		10·0	—10·0	2·0	9·66	10·35	—0·690	—0·690
		10·0	—10·0	3·0	9·50	10·53	—1·052	—1·052
	I.	10·0	—5·0	1·0	14·67	6·82	—0·457	—0·228
	II.	10·0	—10·0	1·0	9·38	10·16	—0·339	—0·339
	III.	10·0	—20·0	1·0	7·42	13·47	—0·225	—0·450
	IV.	10·0	∞	1·0	5·00	20·00	0	—0·666
Čočka bikonkávní		—10·0	10·0	1·5	—10·08	—9·92	—0·165	—0·165
		—10·0	10·0	1·0	—10·17	—9·84	—0·328	—0·328
		—10·0	10·0	2·0	—10·33	—9·68	—0·646	—0·646
		—10·0	10·0	3·0	—10·50	—9·52	—0·954	—0·954
	V.	—10·0	5·0	1·0	—15·33	—6·52	—0·435	—0·218
	VI.	—10·0	10·0	1·0	—10·17	—9·84	—0·328	—0·328
	VII.	—10·0	20·0	1·0	—7·96	—12·56	—0·210	—0·419
	VIII.	—10·0	∞	1·0	—5·00	—20·00	0	—0·666

od vrcholu čočky a vzdálenost ohniska od sebe liší, můžeme toho někdy s výhodou při konstrukci optických přístrojů použít. Na druhé straně je toto dobrý příklad, jaké chyby bychom při



Obr. 1.

měření ohniskové vzdálenosti činili, kdybychom ji počítali místo od hlavních rovin od čočky.

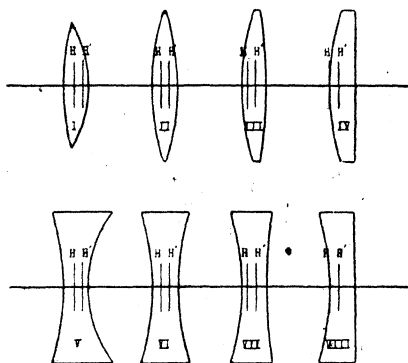


Obr. 2.

Takto počítáme s danými čočkami. V praxi však vychází se často od lámavosti resp. ohniskové vzdálenosti a k této hledají se poloměry a tloušťka čočky. Počítání usnadní, redukuje-li příslušné tabulky jak je to též v jedné naznačeno na lámavost $D = 10,00$ čili $f = 10,00$. V tom případě dostaneme jedno-

duchým násobením přímo konstanty čoček pro jakoukoliv ohniskovou vzdálenost.

Přikročíme nyní ku kombinaci dvou čoček. Za příklad zvolil jsem jednak kombinaci dvou symetrických menisků pozitivních v různé vzdálenosti od sebe, jednak dva nesymetrické menisky rovněž v různé vzdálenosti. Počítáme dle vzorce 2. za δ však dosadíme redukovanou vzdálenost dvou přiřazených hlavních rovin prvé a druhé čočky. Tato rovná se vzdálenosti čoček od sebe měřená na ose (e) zvětšená o vzdálenost druhé hlavní roviny prvé čočky od druhé plochy a vzdálenost prvé hlavní roviny



Obr. 3.

druhé čočky od prvé plochy, tedy $\Delta = e + h' + h_2$. Vzdálenosti hlavních rovin celé kombinace počítáme dle vzorců 3. a 4., při čemž h počítáme od I. hlavní roviny první čočky a h' od II. hlavní roviny druhé čočky. Nachází-li se, jak tomu obyčejně bývá systém ve vzduchu je $n = 1$.

I. Kombinace symetrických menisků :

I. meniskus: $r_1 = 5 \text{ cm}$, $r_2 = 10 \text{ cm}$, $d = 1 \text{ cm}$ $n = 1,5$

$$D_1 = 5,33 \text{ Dptr } f_1 = 18,75 \text{ cm}, h_1 = 0,625 \text{ cm}, h'_1 = -1,25 \text{ cm}.$$

II. meniskus: $r_1 = -10 \text{ cm}$, $r_2 = -5 \text{ cm}$, $d = 1 \text{ cm}$, $n = 1,5$

$$D_2 = 5,33 \text{ Dptr } f_2 = 18,75 \text{ cm}, h_2 = -1,25 \text{ cm}, h'_2 = 0,625 \text{ cm}$$

A) $e = 6 \text{ cm}$ $\Delta = 6 + 1,25 + 1,25 = 8,5 \text{ cm}$

jelikož system je ve vzduchu ($n = 1$) je redukována délka

$$\delta = \Delta = 8.5 \text{ cm.}$$

$$D = 8.24 \text{ Dptr.} \quad f = 12.14 \text{ cm} \\ h = h' = -5.5 \text{ cm} \quad (\text{obr. 4A})$$

$$\text{B) } e = 3 \text{ cm} \quad \Delta = 3 + 1.25 + 1.25 = 5.5 \text{ cm} \\ D = 9.10 \text{ Dptr.} \quad f = 10.99 \text{ cm} \\ h = h' = -3.22 \text{ cm} \quad (\text{obr. 4B})$$

$$\text{C) } e = 1.5 \text{ cm} \quad \Delta = 1.5 + 1.25 + 1.25 = 4.00 \text{ cm} \\ D = 9.52 \text{ Dptr.} \quad f = 10.50 \text{ cm} \\ h = h' = -2.24 \text{ cm} \quad (\text{obr. 4C})$$

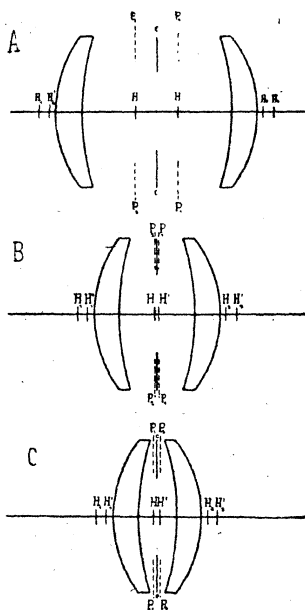
Provedeme-li konstrukci jak v obr. 4. naznačeno vidíme, že pořad hlavních rovin je v případě A a B zaměněn než jak se obvykle kreslí, teprve při malé vzdálenosti čoček od sebe (C) jdou hlavní roviny celého systému správně za sebou. Vidíme tedy, že nemusí vždy hlavní roviny být tak jak obvykle v učebnicích bývá schematicky naznačeno, nýbrž, že se to řídí různými okolnostmi. Propočítal jsem ohniskové vzdálenosti a polohy hlavních rovin kombinace dvou svrchu uvedených symetr. menisků pro různé vzdálenosti od sebe (e) a výsledky uvádím níže.

	e	Δ	f	$h = h'$
1.	0	2.50	10.05	— 1.34
2.	1	3.50	10.34	— 1.93
3.	2	4.50	10.66	— 2.56
4.	3	5.50	10.99	— 3.22
5.	4	6.50	11.36	— 3.93
6.	6	8.50	12.14	— 5.50
7.	10	12.50	14.07	— 9.57
8.	15	17.50	17.57	— 16.39
9.	20	22.50	23.42	— 28.09
10.	30	32.50	70.00	— 121.10
11.	35	37.50	∞	∞
12.	40	42.50	— 70.90	160.70
13.	50	52.50	— 23.52	65.84

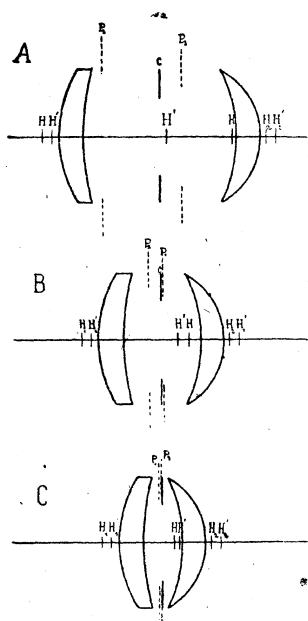
Vidíme, že s rostoucím Δ roste též ohnisková vzdálenost i vzdálenost hlavních rovin, až při jisté vzdálenosti Δ je ohnisko i hlavní roviny v ∞ . To se stane tehdy, když

$$D_1 + D_2 = \delta D_1 D_2 \text{ čili když } \delta = \frac{D_1 + D_2}{D_1 D_2}$$

system je teleskopický. Při ještě větší vzdálenosti se změní znaménko f , což znamená, že obrazy promítnuté takovým systemem



Obr. 4.



Obr. 5.

nejdou obrácené, nýbrž přímé. Kdybychom si tuto tabulku znázornili graficky, že bychom nanášeli na osu absciss délku Δ , na osu ordinát pak f a h , viděli bychom, že ohnisková vzdálenost roste z počátku pomalu, později rychleji až přechází v nekonečnou. Na to se z nekonečné rychle vrací zpět. Rovněž hlavní roviny ukazovaly by podobný průběh. Při $e = 0$ je první hlavní rovina před druhou ve směru paprsků, pak se zblíží, při asi $e = 1,5 \text{ cm}$ splývají v jedno při větším e pak se rozbíhají a

druhá hlavní rovina je ve směru paprsků před prvou. Na to rychle směřují do nekonečna. Odtud se rychle vrací, avšak pořad je zaměněn. [Diagram svým tvarem byl by podobný onomu, jaký nakreslil *Kučera* ve své „Geometrické optice“ pro bikonvexní čočku s přibývající tloušťkou. (Obr. 35.)]

II. Kombinace nesymetrických menisků.

I. meniskus: $r_1 = 5 \text{ cm}$, $r_2 = 10 \text{ cm}$, $d = 1 \text{ cm}$, $n = 1,5$

$$D_1 = 5,33 \text{ Dptr. } f_1 = 18,75 \text{ cm, } h_1 = 0,25 \text{ cm, } h' = -1,25 \text{ cm}$$

II. meniskus: $r_1 = -6 \text{ cm}$, $r_2 = -3 \text{ cm}$, $d = 1 \text{ cm}$, $n = 1,5$

$$D_2 = 9,25 \text{ Dptr. } f_2 = 10,80 \text{ cm, } h_2 = -1,20 \text{ cm, } h'_2 = 0,60 \text{ cm}$$

A) $e = 6 \text{ cm}$ $\Delta = 8,45 \text{ cm}$.

$$D = 10,41 \text{ Dptr, } f = 10,80 \text{ cm, } h = -7,51 \text{ cm, } h' = -4,33 \text{ cm}$$

B) $e = 3 \text{ cm}$ $\Delta = 5,45 \text{ cm}$.

$$D' = 11,89 \text{ Dptr, } f = 8,41 \text{ cm, } h = -4,24 \text{ cm, } h' = -2,44 \text{ cm}$$

C) $e = 1,5 \text{ cm}$ $\Delta = 3,95 \text{ cm}$.

$$D = 12,63 \text{ Dptr, } f = 7,92 \text{ cm, } h = -2,89 \text{ cm, } h' = -1,67 \text{ cm}$$

Z obrázce provedeného dle hořenních výpočtů, vidíme, že průběh je podobný jako u symetrických menisků, jenže hlavní roviny nejsou symetricky rozloženy kolem středu, nýbrž podobně jako u čočky jsou blíže položeny systému větší lámavosti.

Stanovení pupil.

Kardinálními body je sice určena poloha a velikost předmětu i obrazu, nemáme však dán skutečný průběh paprsků systemem. Ten stanovíme najdeme-li příslušné pupily vstupní i výstupní. Při kombinacích optických systemů nachází se otvoro-
rová clona obyčejně uvnitř a tu můžeme počítati pupily dle následující úvahy.

V obr. 6. značí $\overline{AB} = q$ poloměr clony, $\overline{A'B'} = q'$, obraz poloměru clony, $\overline{H'A} = p$ vzdálenost clony od druhé hlavní roviny $\overline{HA} = p'$ vzdálenost obrazu clony od první hlavní roviny.

Z trojúhelníku $MM'F'$ plyne přímo

$$q' = \frac{qf'}{f' - p} \quad (31)$$

(Je-li system na obě strany ve stejném prostředí je zadn a přední ohnisková vzdálenost stejná a můžeme pak místo f' psáti f)

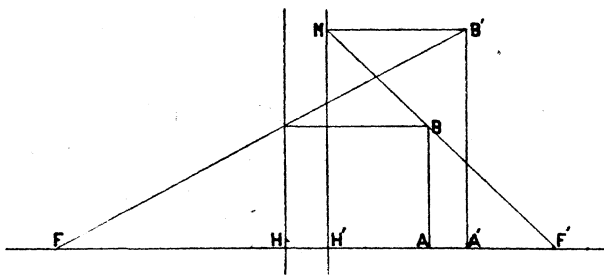
Z trojúhelníku $F'B'A'$ plyne:

$$\frac{q'}{p} = \frac{f + p'}{f}$$

Dosazením za q' z rovnice (31) a úvahou že $f = f'$ obdržíme

$$p' = \frac{fp}{f - p} \quad (32)$$

Z těchto dvou rovnic dá se poloha i velikost obou pupil stanoviti.



Obr. 6.

Počítejme nyní pupily vstupní i výstupní pro nahore uvedené kombinace menisků symetrických i nesymetrických, předpokládajíce, že clona nachází se uprostřed systému a poloměr její je ve všech případech 1,5 cm. Výsledky dá tato tabulka:

	e	Pupila vstupní		Pupila výstupní	
		q'	p'	q'	p'
Menisky symetrické	6	1.94	5.50	1.94	5.50
	3	1.76	3.22	1.76	3.22
	1.5	1.68	2.24	1.68	2.24
Menisky nesymetrické	6	1.94	5.50	2.45	6.87
	3	1.76	3.22	2.00	3.60
	1.5	1.68	2.24	1.83	2.38

Výpočty jsou provedeny v obr. 4. a 5., kde je pupila vstupní označena P_1 , a pupila výstupní P_2 . Při symetrických systémech vidíme, že pupily a hlavní roviny spadají do jednoho místa, to však je jen výminkou. Je-li system nesymetrický, jsou pupily a hlavní roviny vždy na jiných místech. O pořadu pupil ve směru paprsků platí totéž co bylo řečeno o hlavních rovinách. I zde záleží na vzdálenosti obou čoček od sebe a mohli bychom si průběh toho znázornit graficky, což by vedlo k podobným výsledkům jako nahore.

Podobným způsobem dá se počítati průběh paprsků i u systemů velmi složitých a myslím, že uvedené příklady stačí jako návod tomu, kdo by se propočítáním systémů optických chtěl zabývati.

Nové partikulární integrály asteroidického problému tří těles.

Vladimír Václav Heinrich v Praze.

Navazují bezprostředně na poslední práci (odstavec I. p. 320—24 Časop. XLVIII), kdež je na základě mých předchozích vyšetřování v novém tvaru formulována základní otázka (l. c. p. 324 dole) moderní theoretické astronomie. I jedná se o konečné řešení problému prastarého.

Uvedeny tam až dotud známé dva pokusy řešení.

I. (Cesta první.) Voliti jako první přiblížení Poincarého periodická řešení první sorty, jichž je množství dosti kompaktní. Uvedeno analogon: Lagrangeův kruh, dif. rovnice s kontantními coeficienty a druhým rušivým členem

II. (Cesta druhá.) Voliti za východisko řešení druhé sorty, jichž je sotva několik. Analogon Lagrangeova ellipsa, dif. rovnice s periodickými coeficienty a bez druhého členu.

Perioda řešení obou druhů I., II. obnáší pokaždé nejvýše několik oběhů rušivé planety. Z důvodů hustoty center užívána skoro výhradně cesta I. Ale její výhody narazily na nemožnost praktickou, již jsem vysvětlil nalezením křivek divisorů.