Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Velísek
Příspěvek k plochám pseudosférickým. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 2, 165--176

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123777

Příspěvek k plochám pseudosférickým.

Napsal **Fr. Velísek** v Praze.

(Dokončení.)

Zajímavo jest, zda možno obdržeti mezi systémy substitučních koefficientů takové, že hořejší substituce odpovídá jen pošinutí plochy v samu sebe. Zůstává totiž totální křivost pro nové souřadnice invariantní. Vyjádříme-li rovnost úhlů ω, ω_1 a koefficientů při u, u_1, resp. v, v_1 v lineárních elementech, obdržíme relace:

$$M^2 = \alpha\delta - \beta\gamma, \quad \varrho_{u_1} + k\varrho_{v_1} = ck + c_1, \quad \varrho_{u_1} k + \varrho_{v_1} c_1 k + c,$$

z čehož plyne

$$\varrho_{u_1} = c_1, \quad \varrho_{v_1} = c.$$

Musí tedy koefficienty α, β, γ, δ vyhovovati rovnicím plynoucím z (12), (13), (14)

$$\begin{gathered} \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta k = \gamma^2 + \delta^2 - 2\gamma\delta k = \alpha\delta - \beta\gamma = M^2 \\ \alpha c_1 + \beta c = c_1 M, \quad c\delta + c_1\gamma = cM, \end{gathered} \tag{16}$$

při

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Rozeznávejme 2 případy

I) $$M^2 = +(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

Z posledních 2 rovnic (16) plyne jako podmínka společného řešení

$$M[2M - \alpha - \delta] = 0,$$

tedy

$$M = \frac{\alpha + \delta}{2}.$$

Máme tudíž

$$\left(\frac{\alpha + \delta}{2}\right)^2 = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

upraveno

$$(\alpha - \delta)^2 = -4\beta\gamma.$$

Pomocí poslední rovnice a posledních 2 systému (16) obdržíme řešení při $M \neq 0$ jen jediné

$$\delta = \alpha, \quad \beta = \gamma = 0, \quad M = \alpha,$$

což odpovídá substituci vyhovující podmínkám samozřejmě

$$u_1 = \alpha u, \quad v_1 = \alpha v.$$

Pro

II) $$M^2 = \beta\gamma - \alpha\delta.$$

Poslední 2 rovnice (16) dávají opět při $M \neq 0$

$$\delta = -\alpha,$$

první dvě rovnice (16) pak

$$(\beta + \gamma)(\beta - \gamma) = 2\alpha k(\beta + \gamma). \tag{16'}$$

Pro

$$\beta + \gamma = 0$$

obdržíme z rovnic těch

$$\beta = \alpha k, \quad \gamma = -\alpha k,$$

a tedy z posledních 2 rovnic (16) relaci mezi geodetickými křivostmi c, c_1

$$ck + c_1(1 - k_1) = 0.$$

Odpovídá tedy substituce:

$$u_1 = \alpha(u + kv), \quad v_1 = -\alpha(ku + v)$$

za podmínky

$$ck + c_1(1 - k_1) = 0$$

pošinutí plochy v samu sebe. Obdrží se tedy lineární element pro křivočaré souřadnice u_1, v_1 z onoho v souřadnicích u, v

$$ds^2 = \frac{k_1^2}{[(ck + c_1)u + (c_1 k + c)v]^2}(du^2 + 2k\,du\,dv + dv^2)$$

záměnou u, v, resp. v u_1, v_1. Poloměr plochy R dán jest pak výrazem

$$R = \frac{1}{\sqrt{c^2 + c_1^2}},$$

nezávisí tedy na úhlu ω, což jest možno jen pro

$$k(c^2 k + kc_1^2 + 2cc_1) = 0,$$

neb vzhledem k daným podmínkám

$$ck + c_1(1 - k_1) = 0,$$

což jest relace dříve již nabytá.

Rovnice (16′) splněna jest též pro

$$\beta - \gamma = 2\alpha k,$$

z rovnic pak pro geodetické křivosti (16), které se obě redukují na

$$c^2\beta - c_1^2\gamma + 2\alpha c c_1 = 0,$$

obdržíme

$$\beta = 2\alpha c_1 \frac{c + c_1 k}{c_1^2 - c^2}, \quad \gamma = 2\alpha c \frac{c_1 + ck}{c_1^2 - c^2} \text{ pro } c_1 \gtrless c.$$

Poněvadž pak

$$M = \alpha \frac{c^2 + c_1^2 + 2cc_1 k}{c_1^2 - c^2},$$

verifikujeme snadno, že relace (16) jsou substitucí hořejší splněny identicky; nejsou tudíž geodetické křivosti c_1, c vázány žádnou relací.

Vyjádření pravoúhlých souřadnic plochy skýtá tytéž obtíže jako týž problém pro pseudosférické plochy o lineárním elementu ve tvaru parabolickém. Abychom aspoň v nejjednodušších případech úlohu řešili, použijeme rotací a translací triedru stanoveného tečnami a normálou plochy v orientaci Darbouxově. (Darboux: Théorie des surfaces, sv. I.)

Poněvadž pak možno vždy lineární substitucí přejíti k čarám souřadným konstantní geodetické křivosti orthogonálním, tedy pro něž $\omega_1 = \pi/2$, nabude lineární element tvaru

$$ds^2 = \varepsilon^2(du^2 + dv^2) \text{ pro } \varepsilon = \frac{1}{c_1 u + cv},$$

zachováme-li původní označení.

Rotace triedru dány jsou pak výrazy (Darboux, sv. II., str. 385)

$$\left.\begin{aligned} q_1 + p = 0, \quad r = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} = c\varepsilon, \quad r_1 = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial u} = -c_1\varepsilon \\ \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = -\varepsilon(c_1 q + c q_1), \\ \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = \varepsilon(c p_1 + c_1 p), \quad q p_1 - p q_1 = \varepsilon^2(c^2 + c_1^2). \end{aligned}\right\} (17)$$

Translace ξ, ξ_1, η, η_1 jsou definovány rovnicemi

$$\xi = \varepsilon, \; \xi_1 = 0, \; \eta = 0, \; \eta_1 = \varepsilon. \tag{18}$$

I když uložíme ještě podmínku $c = c_1$, nelze systém (17) řešiti obecně, a proto nutno se omeziti jen na specielní případy.

Nechť rotace jsou jen funkce ε, t. j. funkce jedna druhé. Ze systému (17) plyne pak pro obecnější tvar ε, že musí býti toto jen funkcí $c_1 u + cv$, což v našem případě samo sebou splněno. Substitucí

$$v_1 = c_1 u + cv, \quad u_1 = c_1 v - cu$$

přejde lineární element ve

$$ds^2 = \frac{1}{(c^2 + c_1^2)\, v^2}\,(du^2 + dv^2),$$

neb při použití

$$R = \frac{1}{\sqrt{c^2 + c_1^2}}$$

$$ds^2 = \frac{R^2}{v^2}\,(du^2 + dv^2),$$

ponecháváme-li původní označení proměnných, kde $\frac{1}{R}$ jest geodetickou křivostí orthogonálních trajektorií čar geodetických $u = konst.$ Systém rovnic (17) nabývá tvaru

$$\left.\begin{aligned} & q_1 + p = 0, \quad r = \frac{1}{v}, \quad r_1 = 0 \\ & \frac{dp}{dv} = -\frac{q_1}{v}, \quad \frac{dq}{dv} = \frac{p_1}{v}, \quad q_1 p - q p_1 = -\frac{1}{v^2}. \end{aligned}\right\} \tag{17'}$$

Z posledních 3 rovnic plyne

$$p \cdot \frac{dp}{dv} + q\,\frac{dq}{dv} - \frac{1}{v^3} = 0,$$

integrací

$$p^2 + q^2 + \frac{1}{v^2} = konst. = m^2.$$

Řešením systému (17′) plyne snadno při integrační stálé l

$$p = lv,\quad q = \sqrt{m^2 - l^2v^2 - \frac{1}{v^2}},$$

$$p_1 = \left(\frac{1}{v^2} - l^2v^2\right) : \sqrt{m^2 - l^2v^2 - \frac{1}{v^2}},\quad q_1 = -lv.$$

Pro kosiny úhlů hran triedru s osami v prostoru pevnými (Darboux, sv. I. str. 47, 48)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\alpha}{\partial u} &= \beta r - \gamma q, & \frac{\partial\beta}{\partial u} &= \gamma p - \alpha r, & \frac{\partial\gamma}{\partial u} &= \alpha q - \beta p,\\ \frac{\partial\alpha}{\partial v} &= \beta r_1 - \gamma q_1, & \frac{\partial\beta}{\partial v} &= \gamma p_1 - \alpha r_1, & \frac{\partial\gamma}{\partial v} &= \alpha q_1 - \beta p_1.\end{aligned} \tag{18}$$

Dosadíme-li za rotace známé hodnoty, obdržíme s ohledem na relaci

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

partikulární řešení předešlého systému nezávislé na u

$$\alpha = \frac{lv}{m},\quad \beta = \frac{\sqrt{m^2 - l^2v^2 - \frac{1}{v^2}}}{m},\quad \gamma = \frac{1}{mv},$$

tudíž dle známé zásady pro vyvození nových řešení ze systému (18) jediné.

Užijeme-li tohoto řešení pro třetí skupinu úhlů (Darboux, sv. I. str. 5), které svírá osa z pevného systému s hranami triedru, obdržíme pro jich kosiny a'', b'', c'' relace pomocí úhlů Eulerových Θ, φ, ψ

$$-\sin\Theta \sin\varphi = \frac{lv}{m},\quad -\sin\Theta\cos\varphi = \frac{\sqrt{m^2 - l^2v^2 - \frac{1}{v^2}}}{m},$$

$$\cos\Theta = \frac{1}{mv}.$$

Z rovnic těchto plyne, že Θ a φ závisí jen na v.

Z relací pro rotace plyne pro úhel ψ

$$\sin\Theta\frac{\partial\psi}{\partial u} = p\sin\varphi + q\cos\varphi,$$

$$\sin\Theta\frac{\partial\psi}{\partial v} = p_1\sin\varphi + q_1\cos\varphi,$$

z čehož, násobíme li rovnice $\sin\Theta$ a dosadíme příslušné hodnoty

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = -m, \quad \frac{\partial\psi}{\partial v} = \frac{mlv^2(m^2v^2-2)}{(m^2v^2-1)\sqrt{m^2v^2-l^2v^4-1}} = \frac{dV}{dv}.$$

Integrací obdržíme

$$\psi = V - mu,$$

kde

$$V = ml\int\frac{v^2(m^2v^2-2)\,dv}{(m^2v^2-1)\sqrt{m^2v^2-l^2v^4-1}}.$$

Vyloučíme-li specielní případ $l = 0$, jest V vždy integrálem elliptickým pro reelní plochy; zároveň musí býti $\frac{m^4}{4} > l^2$.

Položme

$$m^2v^2 - 1 = \omega,$$

kde ω jest positivní, poněvadž $mv > 1$, tím

$$V = \frac{1}{2m}\int\frac{(\omega-1)(\omega+1)\,d\omega}{\omega\sqrt{(\omega+1)\left[\frac{m^4}{l^2}\omega-(\omega+1)^2\right]}}.$$

Položme

$$\frac{m^4}{l^2}\omega - (\omega+1)^2 = -(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2),$$

kde ω_1, ω_2 značí kořeny hořejší kvadratické rovnice, které jsou positivně reelní. Pohybuje se tedy ω v mezích

$$\omega_1 \gtrless \omega \gtrless \omega_2,$$

dle toho, zda

$$\omega_1 \gtrless \omega_2.$$

Béřeme vztah hořejší.

Zavedeme novou proměnnou ϱ tak, aby hodnotám pro

$$\omega \ldots -1,\ \omega_2,\ \omega_1,\ \infty$$

odpovídaly hodnoty pro

$$\varrho \ldots \infty,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{k^2},$$

$$w = \frac{\omega_2 + k^2\varrho}{1 - k^2\varrho}, \quad \text{při } k^2 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{1 + \omega_1} < 1.$$

Z toho

$$d\omega = k^2 \frac{1+\omega_2}{(1-k^2\varrho^2)^2} d\varrho, \quad \omega - 1 = \frac{\omega_2 - 1 + 2k^2\varrho}{1-k^2\varrho},$$

$$\omega + 1 = \frac{1+\omega_2}{1-k^2\varrho},$$

a tudíž V

$$V = \frac{1+\omega_2}{2m\sqrt{1+\omega_1}} \int \frac{(k^2\varrho + \omega_2 + k^2\varrho - 1)\, d\varrho}{(\omega_2 + k^2\varrho)(1-k^2\varrho)\sqrt{\varrho(1-\varrho)(1-k^2\varrho)}}$$

$$= \frac{1+\omega_2}{2m\sqrt{1+\omega_1}} \int \frac{\frac{1}{1-k^2\varrho} - \frac{1}{\omega_2 + k^2\varrho}}{\sqrt{\varrho(1-\varrho)(1-k^2\varrho)}} d\varrho.$$

ϱ probíhá intervall mezi $0 \ldots 1$. Můžeme tedy klásti

$$\varrho = sin^2 \varphi.$$

Výraz pro V nabude pak tvaru

$$V = \frac{1+\omega_2}{2m\sqrt{1+\omega_1}} \int \frac{d\varphi}{(1-k^2 sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{1+\omega_2}{2m\omega_2\sqrt{1+\omega_1}} \int \frac{d\varphi}{(1+n\, sin^2 \varphi)\sqrt{1-k^2 sin^2 \varphi}},$$

kde

$$n = \frac{k^2}{\omega_2}.$$

Tím redukovány integrály ve výrazu pro V na tvar normální. Pro redukci na transcendenty Jacobiho klademe za positivní hodnotu n

$$n = -k^2 sin^2 i\delta = k^2 tg^2 am(\delta, k_1),$$

kde k_1 značí komplementární modul ke k, dále

$$t = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2 \varphi}}, \quad \text{tedy } \varphi = am t.$$

$$\int_0^t dn^2 t\, dt = E(t).$$

Pomocí předchozích vztahů obdržíme

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^3}} = -\frac{k^2}{k_1^2} \frac{sn\, t\, cn\, t}{dnt} + \frac{E(t)}{k_1^2}$$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi) \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}}$$

$$= t + \frac{sn\,(\delta, k_1)\, cn\,(\delta, k_1)}{dn\,(\delta, k_1)}\, i\, \Pi(t, i\delta),$$

neb při použití $\omega_1 \omega_2 = 1.$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$= t + \frac{\sqrt{1 + \omega_1}}{\omega_1 (1 + \omega_2)}\, i\, \Pi(t, i\delta),$$

výraz to reální.

Pomocí známých úhlů Eulerových φ, ψ, Θ dány jsou kosiny všech 9 úhlů, které tvoří hrany triedru s osami pevnými, a označíme-li analogicky s dřívějším kosiny úhlů osy x, resp. y s hranami triedru a, b, c, resp. a', b', c', dány jsou souřadnice x, y, z bodu plochy (Darboux, sv. I., str. 66)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a\xi + b\eta, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = a'\xi + b'\eta, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = a''\xi + b''\eta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = a\xi_1 + b\eta_1, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = a'\xi_1 + b'\eta_1, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = a''\xi_1 + b''\eta_1,$$

kde v našem případě

$$\xi = \frac{R}{v}, \quad \xi_1 = \eta = 0, \quad \eta_1 = \frac{R}{v},$$

a tedy hořejší systém rovnic přejde ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{aR}{v}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = a' \frac{R}{v}, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = a'' \frac{R}{v}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{bR}{v}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{b'R}{v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{b''R}{v}. \end{aligned} \tag{19}$$

Nahradíme-li úhly Θ, φ, ψ výrazy dříve vypočtenými, totiž

$$\cos\Theta = \frac{1}{vm}, \quad \sin\Theta = \sqrt{1 - \frac{1}{m^2v^2}},$$

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{m^2v^2 - l^2v^4 - 1}{m^2v^2 - 1}}, \quad \sin\varphi = \frac{lv^2}{\sqrt{m^2v^2 - 1}},$$

$$\psi = V - mu,$$

obdržíme dle známých rovnic Eulerových

$$\begin{aligned} a &= \frac{lv}{m\sqrt{m^2v^2 - 1}} \sin(V - mu) \\ &\quad + \frac{\sqrt{m^2v^2 - l^2v^4 - 1}}{\sqrt{m^2v^2 - 1}} \cos(V - mu) \\ &= \cos mu \left[\frac{lv \sin V}{m\sqrt{m^2v^2 - 1}} + \frac{\sqrt{m^2v^2 - l^2v^4 - 1}}{\sqrt{m^2v^2 - 1}} \cos V\right] \\ &\quad - \sin mu \left[\frac{lv \cos V}{m\sqrt{m^2v^2 - 1}} - \frac{\sqrt{m^2v^2 - l^2v^4 - 1}}{\sqrt{m^2v^2 - 1}} \sin V\right], \end{aligned}$$

a podobné výrazy pro b, c, a', b', c'. Označíme-li krátce

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{lv \sin V}{m\sqrt{m^2v^2 - 1}} + \frac{\sqrt{m^2v^2 - l^2v^4 - 1}}{\sqrt{m^2v^2 - 1}} \cos V, \\ V_2 &= \frac{lv \cos V}{m\sqrt{m^2v^2 - 1}} - \frac{\sqrt{m^2v^2 - l^2v^4 - 1}}{\sqrt{m^2v^2 - 1}} \sin V, \\ V_3 &= \frac{\sqrt{m^2v^2 - l^2v^4 - 1}}{mv\sqrt{m^2v^2 - 1}} \sin V - \frac{lv^2}{\sqrt{m^2v^2 - 1}} \cos V, \\ V_4 &= \frac{\sqrt{m^2v^2 - l^2v^4 - 1}}{mv\sqrt{m^2v^2 - 1}} \cos V + \frac{lv^2}{\sqrt{m^2v^2 - 1}} \sin V, \end{aligned}$$

obdržíme

$$\begin{aligned} a &= V_1 \cos mu - V_2 \sin mu, & b &= V_3 \cos mu - V_4 \sin mu, \\ a' &= V_2 \cos mu + V_1 \sin mu, & b' &= V_4 \cos mu + V_3 \sin mu, \\ a'' &= \frac{lv}{m}, & b'' &= \frac{\sqrt{m^2v^2 - l^2v^4 - 1}}{mv}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnic (19), hoví tyto podmínkám integrability. Integrací pak, nehledíme-li k additivní konstantě plyne

$$x = \frac{R}{mv}(V_1 \sin mu + V_2 \cos mu),$$

$$y = \frac{R}{mv}(V_2 \sin mu - V_1 \cos mu), \tag{20}$$

$$z = \frac{R}{m}\left(lu + \int \frac{\sqrt{m^2v^2 - l^2v^4 - 1}}{v^2}\,dv\right).$$

Obdržíme tedy plochy šroubové o 2 parametrech l, m. Pro vyloučený případ $l = 0$, jest též

$$a'' = 0, \quad b'' = \frac{\sqrt{m^2v^2 - 1}}{mv}, \qquad c'' = \frac{1}{mv},$$

tudíž

$$\sin \varphi = 0, \quad \sin \Theta = -\frac{\sqrt{m^2v^2 - 1}}{mv}, \quad \cos \Theta = \frac{1}{mv}, \quad \psi = -mu,$$

t. j. hrana x-ová triedru jest stále rovnoběžna s rovinou xy systému pevného, a sklon os z závisí jen na v; obdržíme tedy plochu rotační, jejíž souřadnice podává systém (20), klademe-li

$$V_1 = 1, \quad V_2 = V_3 = 0, \quad V_4 = \frac{1}{mv},$$

$$x = \frac{R}{mv}\sin mu, \; y = -\frac{R}{mv}\cos mu, \quad z = \frac{R}{m}\int \frac{\sqrt{m^2v^2 - 1}}{v^2}\,dv$$

neb (20′)

$$z = \frac{R}{m}\left[ml\,(mv + \sqrt{m^2v^2 - 1}) - \frac{1}{v}\sqrt{m^2v^2 - 1}\right].$$

Plocha definovaná rovnicemi (20) dá se též odvoditi z podmínky rozvinutelnosti na rotační plochu (20′). Klademe k vůli jednoduchosti

$$r = \frac{R}{mv}, \quad u_1 = mu,$$

pak dán jest lineární element plochy (20′)

$$ds^2 = R^2\frac{dr^2}{r^2} + r^2\,du_1^2,$$

element lineární šroubové plochy, dané rovnicemi

$$x = \varrho \cos \omega, \quad y = \varrho \sin \omega, \quad z = n\,\omega + \varphi(\varrho),$$

kde n znamená poměr rychlosti postupného pohybu k rychlosti rotační, $\varphi(\varrho)$ rovnici tvořící křivky plochy, při čemž z jest osou plochy,

$$ds^2 = [1 + \varphi'^2(\varrho)]\, d\varrho^2 + 2n\, \varphi'(\varrho)\, d\varrho\, d\omega + (\varrho^2 + n^2)\, d\omega^2.$$

Transformujeme-li výraz tento na pravoúhlé křivočaré souřadnice, kladouce vzhledem k rozvinutelnosti na plochu rotační

$$\omega = ku_1 - n\int \frac{\varphi'(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^2 + n^2},$$

kde k libovolná konstanta, obdržíme

$$ds^2 = \left[1 + \frac{\varrho^2 \varphi'^2(\varrho)}{\varrho^2 + n^2}\right] d\varrho^2 + k^2(\varrho^2 + n^2)\, du_1^2.$$

Srovnáním obou elementů lineárních plyne pro rozvinutelnost

$$r^2 = k^2(\varrho^2 + n^2),$$

$$\left(1 + \frac{\varrho^2 \varphi'^2(\varrho)}{\varrho^2 + n^2}\right) d\varrho^2 = R^2 \frac{dr^2}{r^2},$$

z čehož

$$\varphi'(\varrho) = \frac{\sqrt{R^2\varrho^2 - (\varrho^2 + n^2)^2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2 + n^2}},$$

a tedy

$$z = nku_1 + \int\left(1 - \frac{n^2}{\varrho^2 + n^2}\right)\frac{\sqrt{R^2\varrho^2 - (\varrho^2 + n^2)^2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2 + n^2}}\, d\varrho$$

$$= nku_1 + \int \frac{\varrho\sqrt{R^2\varrho^2 - (\varrho^2 + n^2)^2}}{(\varrho^2 + n^2)^{3/2}}\, d\varrho.$$

Zavedeme-li pak původní proměnné u, v, obdržíme

$$z = nkmu - \frac{1}{km}\int \frac{\sqrt{k^2m^2v^2(R^2 - k^2m^2n^2v^2) - R^2}}{v^2}\, dv.$$

Dáme-li konstantám n, k hodnoty, resp. $\frac{Rl}{m^2}$, $k = -1$, obdržíme

$$z = \frac{R}{m}\left(lu + \int \frac{\sqrt{m^2v^2 - l^2v^4 - 1}}{v^2}\, dv\right),$$

kterýžto výraz jest totožný s oním pro z v systému (20).

Podobně možno řešiti případ, kdy střední křivost jest jen funkcí proměnné v. Ukáže se však snadno, že lze obdržeti opět jen plochy šroubové. (Raffy: Bull. de la Soc. math. de Franc., sv. 19.: Sur certaines surfaces, dont les rayons de courbure etc.)

Jednoduchý příklad dvojnásobné řady, která nepřipouští výměnu pořadu summačního.

Sdílí **M. Lerch.**

Takovou řadou je následující

$$\begin{array}{l} -s_0+s_1+0+0+0+0+\dots \\ +0-s_1+s_2+0+0+0+\dots \\ +0+0-s_2+s_3+0+0+\dots \\ +0+0+0-s_3+s_4+0+\dots \\ +0+0+0+0-s_4+s_5+\dots \\ +\ \dots\dots\dots \end{array}$$

Součty jednotlivých řad (vodorovných) jsou

$$s_1-s_0,\ s_2-s_1,\ s_3-s_2,\ s_4-s_3,\ s_5-s_4,\dots$$

a jejich součet jest

$$\lim_{n=\infty}(s_n-s_0). \qquad (1)$$

Naproti tomu jsou součty ve sloupcích vesměs nullami. Napsaná dvojnásobná řada dává příklad dvojnásobné řady

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu,\nu},$$

která konverguje, ale má hodnotu různou od řady

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\mu,\nu},$$

která vznikne změnou summačního pořadu. A má tento příklad tu přednost, že nevyžaduje žádných transformací k vyšetření součtů, o něž se jedná.

Předpokládá-li se, že $\lim s_n$ neexistuje, máme příklad dvojnásobné řady, která při obráceném pořadu summačním diverguje.
