Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Vojtěch

Úvod do rozboru nejjednodušších křivek užitím differenciálního počtu. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 2, 232--256

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123773

provedeme konstrukci obrazu k danému předmětu tak, jak se provádí u jediné plochy kulové. Obraz takto vzniklý jen posuneme zpět ve smyslu dané vzdálenosti hlavních rovin soustavy sférických ploch. (Dokončení.)

Úvod do rozboru nejjednodušších křivek užitím differenciálního počtu.

Dr. Jan Vojtěch v Brně.

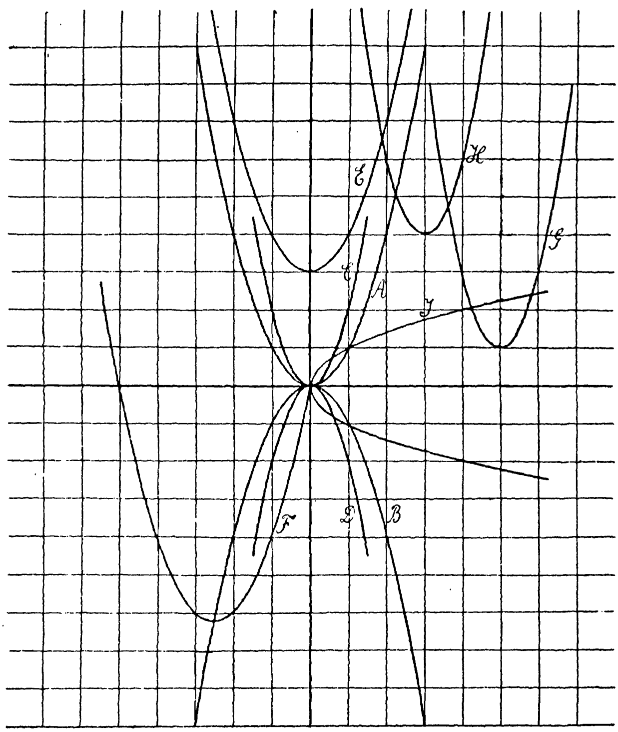
(Pokračování.)

Uveďme si na pamět ještě jeden příklad z nauky o teple; dle zákona Gay-Lussacova zvětšuje se objem plynu rovnoměrně s teplotou, obrazem toho zákona je zase přímka; rychlost, kterou se zvětšuje objem při rostoucí teplotě, jest dána číslem $\beta = \frac{1}{273}$. Označíme-li původní objem plynu při teplotě 0° číslem 1, objem plynu toho při teplotě x^0 číslem y, jest rychlost zvětšování objemu s rostoucí teplotou dána poměrem $\frac{y-1}{x-0}$ a jest rovna β, odtud $y - 1 = \beta x$ čili $y = \beta x + 1$, tedy $y = \frac{x}{273} + 1$.

Všechny proměny, které se dějí rovnoměrně, jest možno vyjádřiti rovnicí lineární a lze je tedy znázorniti přímkou; jsou charakterisovány rychlostí, kterou lze posouditi ze stoupání přímky příslušné a která jest dána směrnicí v rovnici této přímky.

Úkoly: 1. Znázorniti průběh jízdy železniční mezi dvěma městy dle jízdního řádu se zřetelem jenom k delším zastávkám (v největších několika stanicích) a s předpokladem, že jízda mezi těmito stanicemi je pokaždé rovnoměrná (třebas snad s různou rychlostí). 2. Zobraziti závislost mezi teplotou ve stupních Celsiových a Réaumurových (značí-li x stupně C, y pak R, platí $y = \frac{4}{5} x$); závislost mezi teplotou ve stupních Celsiových (x) a Fahrenheitových (y) $\left[y = \frac{9}{5} x + 32\right]$.

9. Zobrazme funkci $y = x^2$; obdržíme křivku A (obr. 12.), která v první své části (pro záporné hodnoty nezávisle proměnné x) klesá až k počátku, odtud pak v druhé části své (pro kladná x) stále stoupá; nejnižší bod křivky jest počátek,



Obr. 12. A, $y = x^2$; B, $y = -x^2$; C, $y = 2x^2$; D, $y = -2x^2$; E, $y = x^2 + 3$; F, $y = x^2 + 5x$; G, $y = 2x^2 - 20x + 51$; H, $y = 2x^2 - 12x + 22$; J, $y^2 = x$.

protože nejmenší hodnota pořadnice jest 0 pro $x = 0$, kdežto pro všechny záporné i kladné hodnoty úsečky jest pořadnice > 0, při tom pro $-x$ dostáváme touž pořadnici jako pro $+x$ čili křivka je souměrná vzhledem k ose Y. Taková křivka sluje parabola; uvedená rovnice jest nejjednodušší algebraický výraz paraboly.

Majíce znázorniti funkci $y = -x^2$, pozorujeme, že hodnoty pořadnic, příslušné k jednotlivým úsečkám, jsou absolutně rovny pořadnicím při $y = x^2$, ale opačného znaménka (záporného); jest tedy křivka $B \ldots y = -x^2$ souměrně položená ku křivce A vzhledem k ose X. Křivka B stoupá v první části, v počátku má bod nejvyšší, klesá odtud při x dále rostoucím.

Sestrojíme-li funkci $y = ax^2$, na př. $y = 2x^2$ (nebo $y = -2x^2$), má obraz její C (resp. D) zcela takový vzhled jako předešlá křivka; vskutku je to křivka A (nebo B), narýsovaná v měřítku polovičním, neboť násobíme-li rovnici $y = 2x^2$ číslem 2, dostaneme $2y = 4x^2$ čili $2y = (2x)^2$, t. j. $\bar{y} = \bar{x}^2$, jestliže $\bar{x} = 2x$, $\bar{y} = 2y$. V případě záporného a obdržíme $ay = -(ax)^2$.

Všimněme si obecnějšího případu $y = x^2 + c$, na př. $y = x^2 + 3$; jest patrno, že jako u přímky $y = x + c$ také zde pořadnice, patřící k jednotlivým úsečkám, jsou proti pořadnicím u křivky $y = x^2$ zvětšeny, vesměs o délku 3. Jest proto obraz funkce $y = x^2 + 3$ tvarem týž jako A, posunutý však rovnoběžně s osou Y o 3 jednotky délkové směrem kladným (křivka E v obr. 12.). Je-li c záporné, nutno pošinouti křivku A směrem záporné osy Y.

Přistupme k funkci tvaru $y = x^2 + bx$, na př. $y = x^2 + 5x$. Dvojčlen na pravé straně můžeme psáti tak, aby obsahoval nezávisle proměnnou x pouze na jednom místě, totiž

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}.$$

Známe-li tvar a polohu křivky $y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$, dovedeme snadno nalézti křivku $y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$, totiž hledanou křivku, pošinouce (dle předešlého) křivku $y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$ o $\frac{25}{4}$ jednotek délkových směrem záporné osy Y. Avšak křivka $y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$ souvisí jednoduše s křivkou $y = x^2 (A)$; obraťme u obou posléze uvedených funkcí závislost, pišme tedy $x = \pm \sqrt{y}$

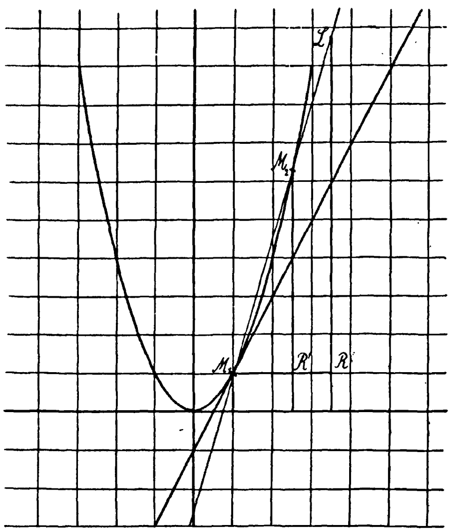
a $x + \frac{5}{2} = \pm \sqrt{y}$ čili $x = \pm \sqrt{y} - \frac{5}{2}$. Jest viděti, že jednotlivá x, příslušná k y po sobě jdoucím, jsou u nové křivky veskrze o $\frac{5}{2}$ jednotky menší než u křivky A; i jest obraz funkce $y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$ téhož tvaru jako A, pošinutý o $\frac{5}{2}$ směrem záporné osy X. Shrneme-li oboje, dospíváme výsledku, že obraz funkce $y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$ je křivka tvaru A, posunutá o $\frac{5}{2}$ jednotky směrem osy $-X$, o $\frac{25}{4}$ směrem osy $-Y$ (křivka F v obr. 12.). Podobně nalezneme, že při záporném b ve funkci $y = x^2 + bx$ nutno provésti pošinutí směrem kladné osy X.

Spojíme-li uvedená rozšíření nejjednodušší funkce 2. stupně $y = x^2$ v obecný tvar funkce *kvadratické* $y = ax^2 + bx + c$, seznáme, že příslušný obraz plyne z $y = ax^2$ užitím uvedených proměn a má tvar křivky A nebo B. Vyšetřme nejprve zvláštní případ $y = 2x^2 - 20x + 51$ (obr. 12. G). Trojčlen na pravé straně pišme jako dvojčlen, jehož prvním členem je součin z koefficientu u x^2 a dvojmoci binomu, obsahujícího x na prvním místě, druhý pak člen je absolutní; upravíme tedy pravou stranu na tvar $2(x - 5)^2 + 1$. Obraz této funkce je takový jako obraz funkce $y = 2x^2$ (křivka C), posunutý o 5 směrem osy $+X$, o 1 směrem osy $+Y$. — Funkci obecnou $y = ax^2 + bx + c$ upravíme na tvar $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$. Křivka zobrazující plyne z křivky $y = ax^2$ pošinutím podél os; je to křivka tvaru $C(A)$ nebo $D(B)$ dle toho, je-li $a \gtrless 0$; nejnižší nebo nejvyšší bod křivky má souřadnice

$$-\frac{b}{2a}, \quad + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

10. Vyšetřili jsme tvar a polohu křivky $y = ax^2 + bx + c$ pomocí grafického znázornění. Jest možno pouhou úvahou na základě upraveného tvaru funkce učiniti si představu o průběhu funkce té, mění-li se nezávisle proměnná, rostouc od hodnot

záporných nejmenších, absolutně velikých, přes nullu v hodnotách kladných až zase k velikým číslům, čili, jak pravíme, mění-li se od $-\infty$ spojitě do $+\infty$. Jest ovšem nutno rozeznávat několik případů dle velikosti a označení stálých veličin a, b, c; zvolíme si pouze příkladem nějaký zvláštní případ, třebas $y = 2(x-3)^2 + 4$ (čili $y = 2x^2 - 12x + 22$). Je patrno, že roste-li x od $-\infty$ přes 0 do $+3$, roste hodnota rozdílu $x - 3$ od hodnot záporných nejmenších do 0, hodnota mocniny $(x-3)^2$ klesá od největších hodnot kladných k nulle,



Obr. 13. Sečna a tečna křivky $y = x^2$.

rovněž tak hodnota součinu $2(x-3)^2$, hodnota konečně funkce $y = 2(x-3)^2 + 4$ klesá od největších hodnot kladných k $+4$; pro $x = 3$ jest $y = 4$; roste-li dále x od $+3$ do $+\infty$, roste $x - 3$ od 0 do $+\infty$, rovněž tak $(x-3)^2$ a $2(x-3)^2$, y pak roste od $+4$ do $+\infty$; pro $x = 3$ byla hodnota $y = 4$ nejmenší hodnota funkce.

Vzniká otázka, jak možno vyšetřiti průběh funkce kvadratické pohodlněji způsobem, který by zůstal v podstatě stejně snadným pro funkce jakéhokoli stupně jakkoli složité; neboť grafické znázornění je pouze pomůcka, doplněk mathematické úvahy, úvaha pak uvedeného způsobu stává se obtížnější, čím více roste složitost funkce.

11. Abychom způsob takový nalezli, všimněme si grafického znázornění na př. funkce $y = x^2$ (obr. 13.). Poloha jednotlivých částí — obloučků křivky vzhledem k osám souřadným jest zajisté stanovena polohou příslušných sečen s krátkými tětivami; zvolme oblouček M_1M_2, jeho koncovými blízkými body $M_1(x_1, y_1)$ a $M_2(x_2, y_2)$ prochází sečna M_1M_2, jejíž stoupání ukazuje polohu oblouku zvoleného.

Rovnice této sečny jakožto přímky jdoucí body (x_1, y_1) a (x_2, y_2) jest dle předešlého (odst. 7.)

$$\eta - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(\xi - x_1\right),$$

nazveme-li totiž souřadnice libovolného bodu L sečny (ξ, η). Rovnici tuto lze ostatně vyčísti z obrazu, neboť z podobnosti trojúhelníků M_1RL a $M_1R'M_2$ plyne úměrnost stejnolehlých stran jejich $LR : M_1R = M_2R' : M_1R'$.

Blíží-li se bod M_2 bodu M_1 na křivce, stotožňuje se tím více směr sečny se směrem křivky, až pro $M_2 \equiv M_1$ stane se sečna *tečnou* křivky, udávajíc směr křivky v bodě M_1 dokonale. Původně lišily se souřadnice bodu M_2 od souřadnic bodu M_1 o malé veličiny, při tečně stávají se sobě rovnými, směrnice sečny se mění přecházejíc v směrnici tečny; početně platí $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$ a tedy směrnice sečny

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1$$

a směrnice tečny $= 2x_1$, ježto zde $x_2 = x_1$. Do výrazu pro směrnici dosadili jsme za y_1, y_2 jich hodnoty vyjádřené nezávisle proměnnou; důvod toho byl nejen ten, abychom výraz uvedený mohli zjednodušiti, nýbrž hlavně proto, že výraz nabývá pro mezní případ $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ neurčité hodnoty $\frac{0}{0}$, kdežto přece směrnice tečny jest zajisté určitá, jak viděti i na obraze.

Sledujíce přechod od sečny k tečně, užíváme také jiného označení. Jsou-li souřadnice bodu M_1 x_1, y_1, jsou souřadnice blízkého bodu M_2 na křivce $x_1 + \Delta x_1$, $y_1 + \Delta y_1$, směrnice sečny $M_1 M_2$ jest tedy

$$\frac{(y_1 + \Delta y_1) - y_1}{(x_1 + \Delta x_1) - x_1} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1};$$

ježto platí $y_1 = x_1^2$, platí také $y_1 + \Delta y_1 = (x_1 + \Delta x_1)^2$ a máme

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{(x_1 + \Delta x_1)^2 - x_1^2}{\Delta x_1} = \frac{x_1^2 + 2x_1 \, . \, \Delta x_1 + (\Delta x_1)^2 - x_1^2}{\Delta x_1}$$

$$= \frac{2x_1 \, . \, \Delta x_1 + (\Delta x_1)^2}{\Delta x_1} = 2x_1 + \Delta x_1.$$

Stotožní-li se bod M_2 s M_1, stane se $\Delta x_1 = 0$, $\Delta y_1 = 0$, poměr $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$ stává se směrnicí tečny a jeho hodnota $= 2x_1$.

Směrnice sečny jest poměr rozdílu pořadnic a rozdílu úseček, pravíme poměr rozdílů (differencí) čili differenční poměr; píšeme $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ nebo $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Stávají-li se difference souřadnic čím dále menšími, až konečně se stanou $= 0$, přechází poměr differenční v t. zv. *poměr differenciální*, který píšeme $\frac{dy}{dx}$. Udává tedy differenciální poměr funkce směrnici tečny u příslušné křivky.

Stejně snadno určíme směrnici tečny u křivky, jejíž rovnice má tvar obecný $y = ax^2 + bx + c$. Pro bod (x_1, y_1) platí $y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$, pro (x_2, y_2) zase $y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c$, i jest

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 + bx_2 + c - (ax_1^2 + bx_1 + c)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) + b\,(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) + b;$$

stotožní-li se (x_2, y_2) s (x_1, y_1), jest směrnice tečny v bodě $(x_1, y_1) \ldots \frac{dy_1}{dx_1} = 2ax_1 + b$; poněvadž vztah tento platí pro každý bod křivky naší, lze psáti $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$.

V odst. 8. jsme seznali, že směrnice přímky udává rychlost pochodu přímkou znázorněného; důsledně udává differenciální poměr funkce rychlost proměny funkcí vyjádřené, na př. při volném pádu $y = \frac{g}{2} x^2$ jest $\frac{dy_1}{dx_1} = gx_1$ rychlost pohybu za x_1 sekund (viz obr. 8.).

12. Průběh funkce $y = ax^2 + bx + c$ seznáváme, sledujíce, jak se mění směrnice tečny u jejího grafického znázornění. Tato směrnice má hodnotu buď kladnou nebo nullovou nebo zápornou; křivka patrně stoupá s rostoucím x, jestliže při $x_2 > x_1$ také $y_2 > y_1$, t. j. $y_1 + \Delta y_1 > y_1$ čili $\Delta y_1 > 0$, tedy při kladném přírůstku úsečky Δx_1 jest podmínkou *stoupání* $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} > 0$ a $\frac{dy}{dx} > 0$. Naopak křivka *klesá,* jestliže při $\Delta x_1 > 0$ platí $y_2 < y_1$ čili $\Delta y_1 < 0$, tedy $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} < 0$ a proto $\frac{dy}{dx} < 0$. Přechází-li křivka od stoupání ke klesání nebo naopak, jest $\frac{dy}{dx} = 0$, pravíme, že křivka má *vrchol* buď horní (maximum) nebo dolní (minimum). Podrobnější rozbor tohoto zvláštního případu $\left(\frac{dy}{dx} = 0\right)$ bude podán později.

Všimněme si na př. křivky nahoře už uvedené

$$y = 2x^2 - 12x + 22$$

(obr. 12. *H*): směrnice její tečny čili differenciální poměr dané funkce jest $\frac{dy}{dx} = 4x - 12$ (dostaneme buď přímo nebo dle hořejšího výsledku pro $a = 2$, $b = -12$). Křivka klesá pro x hovící nerovnosti $4x - 12 < 0$, t. j. pro $x < \frac{12}{4}$ čili $x < 3$, stoupá pro $4x - 12 > 0$, t. j. pro $x > 3$; pro $x = 3$ má křivka vrchol a to dolní, přestávajíc klesati a začínajíc stoupati. — Obecná funkce 2. stupně $y = ax^2 + bx + c$ má diff. poměr $2ax + b$; příslušná křivka stoupá pro $x > -\frac{b}{2a}$, klesá pro

$x < -\frac{b}{2a}$ a má vrchol v bodě $x_1 = -\frac{b}{2a}$ a tedy

$$y_1 = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Tečna křivky té v bodě (x_1, y_1) má rovnici

$$\eta - y_1 = (2ax_1 + b)(\xi - x_1).$$

13. Jako příklad budiž uvedena rovnice dráhy tělesa vrženého. Vrhneme-li těleso horizontálně, skládá se pohyb rovnoměrný (vliv udělené rychlosti c) s pohybem rovnoměrně zrychleným (následek zrychlení zemské tíže g). Zvolíme-li počátek souřadnic ve východisku pohybu, osu $+X$ ve směru vrhu (obr. 14.), má dráha, kterou by vykonalo těleso pohybem rovnoměrným za t sekund, velikost $x = c\,.\,t$; vlivem zemské tíže vykonalo by za touž dobu dráhu $y = -\frac{g}{2}t^2$ (znaménko záporné proto, že pohyb ten dál by se směrem $-Y$). Místo tělesa v neurčitém, každém okamžiku má souřadnice (x, y); vztah mezi nimi dostaneme, vyloučíme-li z obou rovnic veličinu t. Z $x = ct$ plyne $t = \frac{x}{c}$, dosazeno do druhé dává

$$y = -\frac{g}{2}\cdot\left(\frac{x}{c}\right)^2$$

čili

$$y = -\frac{g}{2c^2}\cdot x^2,$$

což je rovnice tvaru $y = ax^2$ a tedy parabola. Její tečna v bodě (x_1, y_1) má směrnici

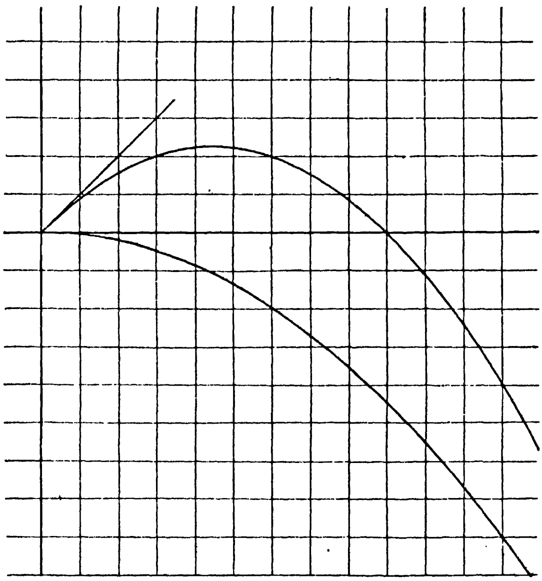
$$\frac{dy_1}{dx_1} = -2\,.\,\frac{g}{2c^2}\cdot x_1 = -\frac{g}{c^2}x_1;$$

klesá tedy křivka dráhová stále, neboť g, c^2 i x_1 jsou veličiny kladné, pročež $\frac{dy_1}{dx_1} < 0$. —

Výhodnějším příkladem než vrh horizontální (pro větší rozmanitost) jest vrh šikmý*). Dráhu tělesa vrženého pod

*) Tento příklad předpokládá znalost začátků trigonometrie; lze jej vynechati.

úhlem elevačním α (obr. 14.) nalezneme, složíme-li zase pohyb rovnoměrný rychlostí c s pohybem rovnoměrně zrychleným při zrychlení g. Pokud hledíme k prvnímu pohybu, vykonalo by těleso za t sek. dráhu přímočarou $s = ct$, jeho poloha byla by



Obr. 14. Dráha tělesa vrženého rychlostí $c = 30\ m$ (při $g \doteq 10\ m$)
a) horizontálně : $y = -\frac{x^2}{180}$,
b) šikmo v úhlu 45^0 : $y = x - \frac{x^2}{90}$ (10 m ... 1 dílec, tedy zde
$c = 3$, $y = -\frac{x^2}{18}$ resp. $y = x - \frac{x^2}{9}$).

dána (při patrné volbě os souřadných) souřadnicemi $x = ct \cos \alpha$, $y = ct \sin \alpha$. Druhým pohybem urazilo by za touž dobu dráhu přímočarou $y = -\frac{g}{2} t^2$. Vlivem udělené rychlosti i zemské tíže octne se tedy za t sek. v bodě, jehož

$$x = ct \cos \alpha, \; y = ct \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2.$$

Dráhu tělesa pro všechny okamžiky t dostaneme vyloučením t z obou rovnic: z prvé jest $t = \frac{x}{c \cos \alpha}$, z druhé pak dosazením této veličiny

$$y = x \, tg \, \alpha - \frac{g}{2c^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

neboli

$$y = x \, tg \, \alpha - \frac{g}{2c^2} (1 + tg^2 \alpha) \, . \, x^2.$$

Je to parabola, jejíž rovnice má tvar

$$y = ax^2 + bx \left(a = - \frac{g}{2c^2 \cos^2 \alpha}, \; b = tg \, \alpha \right).$$

Differenciální poměr této funkce jest

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{g}{c^2 \cos^2 \alpha} x + tg \, \alpha;$$

jest to směrnice tečny v bodě (x, y) křivky dráhové. Křivka má vrchol pro

$$- \frac{g}{c^2 \, . \, \cos^2 \alpha} x + tg \, \alpha = 0,$$

tedy v bodě

$$x_1 = \frac{c^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha;$$

příslušné

$$y_1 = x_1 \, tg \, \alpha - \frac{g}{2c^2 \cos^2 \alpha} x_1^2$$

$$= \frac{c^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \, tg \, \alpha - \frac{g}{2c^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{c^4}{g^2} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$= \frac{c^2}{g} \sin^2 \alpha - \frac{c^2}{2g} \sin^2 \alpha = \frac{c^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

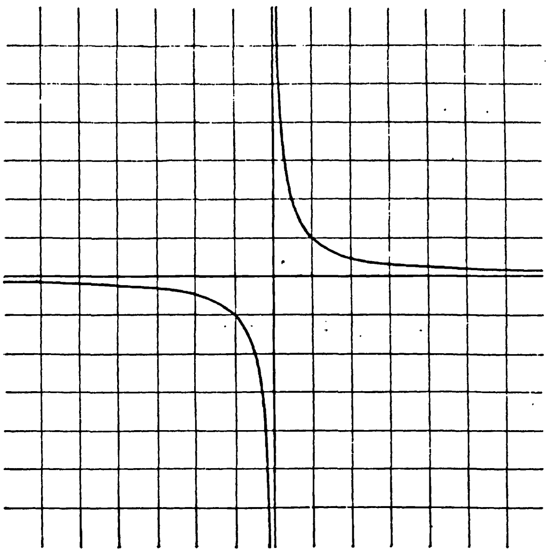
V intervalu 0 až x_1 křivka stoupá, neboť $\frac{dy}{dx}$ zůstává kladné; pro $x > x_1$ křivka klesá, neboť člen záporný ve výrazu pro směrnici je v tom případě větší než kladný člen $tg \, \alpha$. V obr. 14. zvoleno $\alpha = 45^0$, $c = 30 \, m$, tedy

$$y = x \, . \, 1 - \frac{10}{2 \, . \, 900 \, . \, \frac{1}{2}} x^2$$

čili

$$y = x - \frac{x^2}{90}.$$

14. Vyšetřme funkci $y = \frac{1}{x}$ čili křivku $xy = 1$. (obr. 15.). Rozbor arithmetický ukazuje, že k záporným úsečkám patří



Obr. 15. $y = \frac{1}{x}$.

záporné pořadnice, ke kladným x kladná y: křivka leží tedy úplně v III. a I. čtvrti. K záporným, absolutně velikým úsečkám patří záporné, absolutně malé pořadnice a naopak; podobně k malým kladným úsečkám přísluší veliké kladné pořadnice, k rostoucím úsečkám pořadnice klesající. Leží-li na křivce bod (x_1, y_1), leží na ní také bod $(-x_1, -y_1)$, křivka je souměrná vzhledem k počátku. Sluje hyperbola.

Směrnice sečny u křivky $y = \frac{1}{x}$ jest

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_2 x_1 (x_2 - x_1)} = -\frac{1}{x_1 x_2},$$

směrnice tečny v bodě (x_1, y_1)

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{1}{x_1^2},$$

v obecném bodě (x, y) pak

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}.$$

Protože pro kladná x jest $\frac{dy}{dx} < 0$, klesá křivka stále pro kladné hodnoty úsečky s rostoucí úsečkou (větev v I. čtvrti); pro záporná x jest však $(-x)^2$ také kladné, pročež $\frac{dy}{dx}$ rovněž < 0 a křivka klesá stále i v druhé své větvi (v III. kvadrantu).

Tečna křivky v bodě (x_1, y_1) má rovnici

$$\eta - y_1 = -\frac{1}{x_1^2}(\xi - x_1).$$

Místo $\frac{1}{x_1^2}$ můžeme psáti

$$\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_1} \cdot y_1 = \frac{y_1}{x_1}.$$

a tedy rovnici tečny

$$\eta - y_1 = -\frac{y_1}{x_1}(\xi - x_1);$$

vynásobíme-li, dostaneme

$$\eta x_1 - x_1 y_1 = -\xi y_1 + x_1 y_1$$

čili

$$x_1 \eta + y_1 \xi = 2 \left(\eta = -\frac{y_1}{x_1}\xi + \frac{2}{x_1}\right).$$

Obraz funkce $y = -\frac{1}{x}$ je téhož tvaru jako u funkce předcházející, leží však v II. a IV. čtvrti. Funkci $y = \frac{a}{x}$ možno převésti na $y = \frac{1}{x}$ nebo na $y = -\frac{1}{x}$ dle toho, je-li a kladné nebo záporné; stačí upraviti $y = \frac{a}{x}$ na tvar

$$y = \frac{(\sqrt{a})^2}{x} \text{ čili } \frac{y}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{a}}}$$

a položiti

$$\frac{y}{\sqrt{a}} = \bar{y}, \quad \frac{x}{\sqrt{a}} = \bar{x},$$

dostaneme $\bar{y} = \frac{1}{\bar{x}}$, obraz funkce je týž jako dříve, avšak v měřítku zvětšeném v poměru $1 : \sqrt{a}$.

Křivka na obr. 15. je obrazem jednoduché závislosti nepřímé dvou proměnlivých veličin, totiž dvou veličin, které se tak mění, že jich součin zůstává beze změny. Tak souvisí spolu na př. počet dělníků a počet pracovních dní při určité velikosti práce, kterou jest vykonati (a při stejných všech ostatních okolnostech); velikost výšky a základny trojúhelníka při pevném obsahu atd. Tímto zákonem závisí napětí plynu na objemu při stálé teplotě a hmotě plynu (zákon Boyleův); velikost síly na délce ramene při rovnováze u páky a jednoduchých strojů mechanických vůbec; potenciál na kapacitě při témž množství elektřiny atd.

Křivka $y^2 = x$ liší se od křivky $y = x^2$ jen zaměněnými souřadnicemi, tedy záměnou os (obr. 12. J); jest to tedy parabola, rovněž tak obecnější $y^2 = ax$. Rovnici tuto lze psáti také $y = \sqrt{ax}$, a směrnice její sečny jest

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{ax_2} - \sqrt{ax_1}}{x_2 - x_1} = \sqrt{a}\,\frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{x_2 - x_1}$$

$$= \sqrt{a}\,\frac{x_2 - x_1}{(x_2 - x_1)(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}},$$

směrnice tečny v (x_1, y) pak

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x_1}}$$

čili dosadíme-li $\sqrt{x_1} = \frac{y}{\sqrt{a}}$,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{a}{2y_1}.$$

Rovnice tečny $v(x_1, y_1)$ jest tedy

$$\eta - y_1 = \frac{a}{2y_1}(\xi - x_1);$$

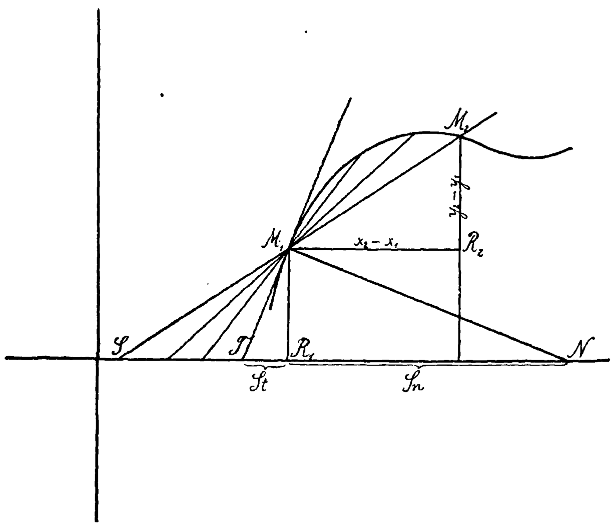
můžeme ji zase upraviti na tvar

$$y_1\eta = \frac{a}{2}(\xi + x_1).$$

Body křivky $y^2 = x$ mají úsečky pouze kladné, jak viděti na vztahu $y = \pm\sqrt{x}$; jsou po dvou souměrně sdruženy vzhledem k ose X, ježto k téže úsečce x přísluší $+y$ a $-y$ dle téhož vztahu, tedy dvě pořadnice, absolutní hodnotou sobě rovné, opačného znaménka. Z výrazu pro směrnici tečny $\frac{a}{2y}$ poznáváme, že — v souhlase s obrazem — křivka stoupá pro kladná y (nad osou X), klesá pro záporná y (pod osou X); čím je y menší, ať kladné nebo záporné, tím větší je tato směrnice, pro velmi malou pořadnici je velmi veliká (na př. pro $y = 0{\cdot}001$ je $\frac{a}{2y} = 1000 \cdot \frac{a}{2}$, pro $y = 0{\cdot}000001$ je $\frac{a}{2y} = 1{,}000000 \cdot \frac{a}{2}$ atd.), i soudíme, že pro $y = 0$ je $\frac{a}{2y}$ větší než kterékoli číslo, jež bychom uvedli jako největší, pravíme, že se zde směrnice stává „nekonečně velikou“ $= \infty$.

Bod $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ byl u křivky $y = x^2$ vrcholem, $\frac{dy_1}{dx_1} = 0$; křivka $y^2 = x$ od bodu toho v jedné své části stoupá, v druhé klesá (oboje pro rostoucí x), $\frac{dy_1}{dx_1} = \infty$ a zvratná hodnota diff. poměru $\left(\frac{2y}{a}\right)$ je zde $= 0$. Můžeme tedy s geometrického hlediska i u křivky $y^2 = x$ bod ten nazývati vrcholem (vzhledem k ose Y); takže vrcholy křivky dostaneme z rovnice $\frac{dy}{dx} = 0$ a z rovnice $\frac{dy}{dx} = \infty$.

15. Máme-li *obecnou křivku*, jejíž rovnice jest $y = f(x)$, stanovíme její *tečnu* zcela tím způsobem jako v případech předešlých. Je-li v obr. 16. část této křivky, má sečna její, pro-



Obr. 16. Sečna . . . tečna, normála; subtangenta, subnormála u křivky obecné.

cházející body na ní zvolenými M_1 a M_2, směrnici $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ čili $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$ s předpokladem, že souřadnice bodu M_2 se liší od souřadnic bodu M_1 o veličiny Δx_1, Δy_1. Blíží-li se bod M_2 na křivce bodu M_1, blíží se směr sečny směru tečny v bodě M_1, až pro $\Delta x_1 = 0$ (a tedy $\Delta y_1 = 0$) splynou oba body a sečna přejde v tečnu; její směrnice má pak hodnotu, jež se označuje $\frac{dy_1}{dx_1}$ *čili* y'_1, jest to *differenciální poměr čili derivace* funkce y dle nezávisle proměnné x.

Že tato derivace má zcela určitou hodnotu, jest viděti na obrázku, kde

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{M_2 R_2}{M_1 R_2} = \frac{M_1 R_1}{S R_1}$$

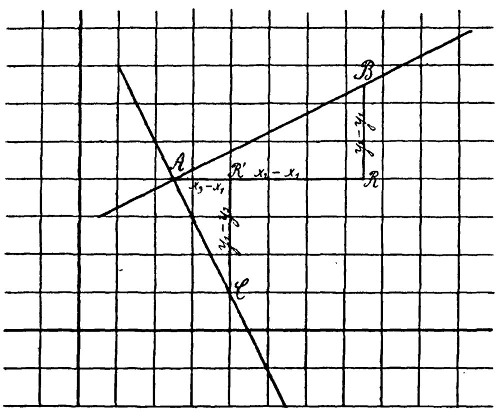
(z podobnosti trojúhelníků) a pro $M_2 \equiv M_1$ jest

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{0}{0} = \frac{M_1 R_1}{T R_1}.$$

Rovnice tečny v bodě (x_1, y_1) jest pak

$$\eta - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(\xi - x_1).$$

Dle hodnoty této derivace $\frac{dy}{dx}$ posoudíme stoupání, klesání a vrcholy



Obr. 17. Dvě přímky navzájem kolmé.

křivky $y = f(x)$; křivka stoupá nebo klesá v bodě, pro jehož souřadnice x_1, y_1 platí $\frac{dy_1}{dx_1} > 0$, resp. < 0; má-li křivka vrchol v bodě (x_1, y_1), objeví se $\frac{dy_1}{dx_1} = 0$ (nebo také $= \infty$).

Známe-li směrnici tečny, napíšeme snadno také rovnici *normály*. Normálou sluje přímka kolmá k tečně v bodě dotyku; jest otázka, jak spolu souvisí směrnice dvou přímek kolmých. Zvolíme-li průsečík přímek takových (obr. 17.) za bod $A(x_1, y_1)$, na jedné přímce bod $B(x_2, y_2)$, na druhé $C(x_3, y_3)$, jest patrně směrnice prvé přímky $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$, druhé $\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = b$. Avšak z podobnosti trojúhelníků ABR a ACR' plyne

$$BR : AR = AR' : CR',$$

t. j. $$(y_2 - y_1) : (x_2 - x_1) = (x_3 - x_1) : (y_1 - y_3);$$

levá strana úměry jest $= a$, pravá $= -\frac{1}{b}$, tedy $a = -\frac{1}{b}$.

Směrnice normály je tedy rovna zvratné hodnotě směrnice tečnové s opačným znaménkem, t. j. $-1 : \frac{dy}{dx}$, což píšeme stručněji $-\frac{dx}{dy}$ a rovnice normály v bodě (x_1, y_1) zní

$$\eta - y_1 = -\frac{dx_1}{dy_1}(\xi - x_1).$$

K posouzení (a konstrukci) křivky v bodě (x_1, y_1) přispívá také t. zv. *subtangenta* (St), t. j. průmět části tečny od bodu dotyku (x_1, y_1) až k ose X na tuto osu, a *subnormála* (Sn), obdobný průmět normály. Jak z obr. patrno, jest $St = TR_1$ a $\frac{y_1}{St} =$ směrnici tečny $= y'_1$, tedy $St = \frac{y_1}{y'_1}$, obecně $St = \frac{y}{y'}$; potom

$$Sn = R_1 N \text{ a } \frac{R_1 N}{y_1} = \frac{y_1}{TR_1} = y'_1$$

(trojúhelníky $R_1 N M_1$ a $R_1 M_1 T$ jsou podobné), a tedy

$$R_1 N = Sn = y_1 y'_1, \text{ obecně } Sn = yy'.$$

Na př. u paraboly $y = ax^2$ jest

$$St = \frac{ax^2}{2ax} = \frac{x}{2}, \; Sn = ax^2 \,.\, 2ax = 2a^2x^3,$$

kdežto u paraboly $y^2 = ax$ jest $y' = \frac{a}{2y}$, tedy

$$St = \frac{2y^2}{a} = 2x, \; Sn = y \,.\, \frac{a}{2y} = \frac{a}{2},$$

tedy konstantní.

16. Stanoviti tečnu ke křivce $y = f(x)$ redukuje se na úlohu *stanoviti derivaci* funkce $f(x)$. Tato derivace dle vzoru, kterým nalezena při funkci kvadratické, jest rovna poměru

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

v němž po provedení všech možných zjednodušení, hlavně dělení veličinou Δx, položíme $\Delta x = 0$. Připomínáme, že $f(x + \Delta x)$ značí funkci danou $f(x)$, v níž místo x dosazen všude dvojčlen $x + \Delta x$. Často stačí, ba jest výhodnější, užíti stručnějšího pro čitatel označení x_2 místo $x + \Delta x$ (pak k vůli souměrnosti píšeme x_1 místo pouhého x), děliti pak rozdílem $x_2 - x_1$ ($= \Delta x$) a ve výsledku položiti $x_2 = x_1$. Index vynecháme, nemáme-li na mysli určitý bod.

Stanoviti derivace funkcí je úlohou počtu differenciálního, v němž úkol se řeší postupně pro rozmanité druhy funkcí. Tam určené derivace funkcí jednoduchých si prostě pamatujeme, pravidel pak odvozených užívá se při derivování funkcí složitějších. Pro náš účel bylo by sice možno vystačiti s jediným obecným pravidlem základním, nahoře uvedeným, přece však k vůli zjednodušení sestavíme si několik zvláštních pravidel, v počtu co nejmenším.

a) Číslo, které se nemění, čili *konstanta* $(a, b, c, \ldots 2, 5, \ldots)$, má derivaci $= 0$. Je samozřejmé.

b) $y = x^n$, kde n je číslo celé kladné.

$$\frac{dy}{dx} = n \, . \, x^{n-1}.$$

Neboť platí

$$y_1 = x_1^n, \; y_2 = x_2^n$$

a tedy

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^n - x_1^n}{x_2 - x_1} = x_2^{n-1} + x_2^{n-2} x_1 + x_2^{n-3} x_1^2 + \ldots$$
$$+ x_2 x_1^{n-2} + x_1^{n-1};$$

pro $x_2 = x_1$ stávají se všechny členy na pravé straně stejnými $= x_1^{n-1}$, na počet jest jich n (1 a od 1 do $n - 1$), proto jest

$$\frac{dy_1}{dx_1} = n x_1^{n-1}.$$

Derivaci n-té mocniny nezávisle proměnné x dostaneme tedy, znásobíme-li exponentem n mocninu tu o stupeň sníženou. Tak jest

$$\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2,$$

v dřívějším jsme měli

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x, \quad \frac{d(x)}{dx} = 1.$$

c) $y = \frac{1}{x^n}$, kde n je číslo celé kladné.

$$\frac{dy}{dx} = -n \cdot \frac{1}{x^{n+1}}.$$

Dovodíme podobně jako v *b*);

$$y_1 = \frac{1}{x_1^n}, \quad y_2 = \frac{1}{x_2^n}, \quad y_2 - y_1 = \frac{1}{x_2^n} - \frac{1}{x_1^n} = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_2^n x_1^n},$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1^n x_2^n (x_2 - x_1)} = -\frac{1}{x_1^n x_2^n} \cdot \frac{x_2^n - x_1^n}{x_2 - x_1}$$

a provedeme-li dělení dvojčlenů,

$$= -\frac{1}{x_1^n x_2^n} (x_2^{n-1} + x_2^{n-2} x_1 + \ldots + x_2 x_1^{n-2} + x_1^{n-1}).$$

Položíme-li konečně $x_2 = x_1$, nabude výraz v závorce jako nahoře hodnoty $n x_1^{n-1}$ a celá derivace hodnoty

$$-\frac{1}{x_1^{2n}} \cdot n x_1^{n-1} = -n \cdot \frac{1}{x_1^{n+1}}.$$

Vůči derivaci *b*) je zde rozdíl ve znaménku a novém exponentu v jmenovateli, jenž je zvýšený. Na př. pro $y = \frac{1}{x^2}$ jest

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3},$$

pro $y = \frac{1}{x}$ jest, jak jsme už dříve nalezli,

$$y' = -\frac{1}{x^2}.$$

d) *Konstantní součinitel* celé funkce jest také součinitelem derivace. Platí

$$\frac{d\,(ax^n)}{dx} = a \,.\, n \,.\, x^{n-1},$$

což dostaneme z

$$\frac{ax_2^n - ax_1^n}{x_2 - x_1} = a \,.\, \frac{x_2^n - x_1^n}{x_2 - x_1}$$

postupem v *b*) vyloženým; podobně v jiných případech. Není tedy potřeba takový činitel bráti vůbec do počtu. Tak jest

$$\frac{d\,(ax^2)}{dx} = a \,.\, 2x, \quad \frac{d\,(ax)}{dx} = a$$

(derivace funkce $y = ax$ jest $a =$ směrnice přímky).

e) *Součet funkcí* má derivaci, jež je součtem derivací jednotlivých členů. Jest možno bez obtíží dokázati zcela obecně, postačí však všimnouti si u jednoho případu postupu, v jakém se členy součtu při stanovení derivace řadí. Součet funkcí ax^n, bx^p, cx^2, d jest funkce $y = ax^n + bx^p + cx^2 + d$; její derivace plyne z poměru differenčního

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2^n + bx_2^p + cx_2^2 + d) - (ax_1^n + bx_1^p + cx_1^2 + d)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{a\,(x_2^n - x_1^n) + b\,(x_2^p - x_1^p) + c\,(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1}$$

$$= a \,.\, \frac{x_2^n - x_1^n}{x_2 - x_1} + b \,.\, \frac{x_2^p - x_1^p}{x_2 - x_1} + c \,.\, \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1}$$

$$= a \,.\, nx_1^{n-1} + b \,.\, px_1^{p-1} + c \,.\, 2x_1.$$

Výsledek ten byli bychom obdrželi, sečtouce derivace jednotlivých členů, určené dle *b*), *d*), resp. *a*). Tak jsme nalezli dříve derivaci funkce $y = ax^2 + bx + c$ ve tvaru $2ax + b$.

f) Derivace *součinu dvou funkcí*

$$\frac{d\,(u \,.\, v)}{dx} = \frac{du}{dx} \,.\, v + u \,.\, \frac{dv}{dx} = u' \,.\, v + u \,.\, v'.$$

Obě funkce v součinu u i v jsou funkce argumentu x, můžeme výslovně psáti $u\,(x)$, $v\,(x)$; nazveme-li jich součin y, jest

$$y = u(x) \,.\, v\,(x).$$

Obyčejnou cestou dostaneme

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{u(x_2) \cdot v(x_2) - u(x_1) \cdot v(x_1)}{x_2 - x_1};$$

abychom rozdíl v čitateli mohli upraviti, rozšiřme ho o dva členy

$$- u(x_1) \cdot v(x_2) + u(x_1) \cdot v(x_2),$$

což je dovoleno (součet obou členů $= 0$). I jest poměr differencí

$$= \frac{u(x_2) \cdot v(x_2) - u(x_1) \cdot v(x_2) + u(x_1) \cdot v(x_2) - u(x_1) \cdot v(x_1)}{x_2 - x_1}$$

čili spojíme-li člen 1. a 2., potom 3. a 4.

$$= \frac{[u(x_2) - u(x_1)]\, v(x_2) - u(x_1)\, [v(x_2) - v(x_1)]}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot v(x_2) + u(x_1) \cdot \frac{v(x_2) - v(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Položíme-li potom $x_2 = x_1$, dostaneme jako hodnotu derivace

$$\frac{du(x_1)}{dx_1} \cdot v(x_1) + u(x_1) \cdot \frac{dv(x_1)}{dx_1},$$

stručněji psáno

$$\frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Derivujeme tedy nejprve jednu funkci ze součinu, násobíme tuto derivaci druhou funkcí, potom derivujeme druhou, součin této derivace a první funkce přičteme k onomu součinu. Podobně derivace součinu tří funkcí uvz jest

$$u' \cdot vz + u \cdot v' \cdot z + uv \cdot z'; \text{ atd.}$$

Na př.

$$y = x^3(x - 2),\ y' = 3x^2 \cdot (x - 2) + x^3 \cdot 1;$$

derivace součinu yx^2 jest

$$y' \cdot x^2 + y \cdot 2x; \quad y = x^2(x^3 - a)(x - b) \text{ má}$$
$$y' = 2x \cdot (x^3 - a)(x - b) + x^2 \cdot 3x^2 \cdot (x - b) + x^2(x^3 - a) \cdot 1.$$

g) Derivace *mocniny funkce*

$$\frac{d(y^n)}{dx} = n \cdot y^{n-1} \cdot \frac{dy}{dx};$$

při tom ovšem $y = f(x)$. Jako obyčejně jest rozdílový poměr

$$\frac{y_2^n - y_1^n}{x_2 - x_1} = \frac{(y_2 - y_1)(y_2^{n-1} + y_2^{n-2}y_1 + \ldots + y_2 y_1^{n-2} + y_1^{n-1})}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(y_2^{n-1} + y_2^{n-2}y_1 + \ldots),$$

poměr differenciální pak ($x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$) jest

$$\frac{dy_1}{dx_1} \cdot n \cdot y_1^{n-1},$$

bez indexu

$$n \cdot y^{n-1} \cdot \frac{dy}{dx} = n \cdot y^{n-1} \cdot y'.$$

Derivuje se tedy mocnina funkce jako mocnina nezávisle proměnné, jenom nutno připojiti jako činitel derivaci funkce. Tak jest na př.

$$\frac{d(y^2)}{dx} = 2y \cdot y' \left(= 2y \cdot \frac{dy}{dx} \right);$$

$$\frac{d(y^2 \cdot x)}{dx} = \frac{d(y^2)}{dx} \cdot x + y^2 \cdot \frac{dx}{dx} = 2yy'x + y^2 \cdot 1;$$

jestliže $y = (x^2 - a^2)^4$, jest

$$y' = 4(x^2 - a^2)^3 \cdot \frac{d(x^2 - a^2)}{dx} = 4(x^2 - a^2)^3 \cdot 2x;$$

pro $y = (x^2 - 1)(x + 1)^2$ jest

$$y' = 2x \cdot (x + 1)^2 + (x^2 - 1) \cdot 2(x + 1)^1 \cdot 1.$$

17. Dosud jsme brali v úvahu křivky, jejichž rovnice měly tvar $y = f(x)$. Avšak závislost mezi proměnlivými veličinami x a y může býti dána rovnicí, kterou, jak jednoduché příklady ukazují, není snadno, ba není možno uvésti na tvar hořejší (na př. $x^3 + y^3 = 3axy$, $xy^5 + x^2y = a$); často to bývá také nevýhodné, protože tím dostáváme $f(x)$ složitou. Je-li takovou rovnicí dána závislost obou veličin x a y, sluje y *nerozvinutou* (implicitní) funkcí proměnné x. Vůči takovým funkcím sluje $y = f(x)$ funkcí rozvinutou (explicitní).

Jak určíme tečnu takové křivky t. j. derivaci takové funkce? Všimněme si příkladu $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Dva body

(x_1, y_1) a (x_2, y_2), ležící na křivce, mají souřadnice, o nichž platí

$$x_1^3 + y_1^3 - 3ax_1y_1 = 0, \quad x_2^3 + y_2^3 - 3ax_2y_2 = 0;$$

poněvadž chceme nalézti hodnotu poměru $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, utvořme nejprve rozdíl levých stran obou rovnic (což je dovoleno), ten $= 0$, dělme tento rozdíl potom rozdílem $x_2 - x_1$, a pokud to není možno, zavádějme hledaný poměr — řídíce se takto postupem, u funkcí rozvinutých osvědčeným; poměr rozdílový potom vypočítáme a proměníme v poměr differenciální. I obdržíme v zvoleném případě zvláštním

$$x_2^3 + y_2^3 - 3ax_2y_2 - x_1^3 - y_1^3 + 3ax_1y_1 = 0$$

a dále

$$[(x_2^3 - x_1^3) + (y_2^3 - y_1^3) - 3a(x_2y_2 - x_1y_1)] : (x_2 - x_1) = 0$$

čili pro provedeném dělení

$$(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(y_2^2 + y_2y_1 + y_1^2)$$
$$- 3a\left(y_2 + x_1\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) = 0.$$

Položíme-li sem nyní $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ a následkem toho

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{dy_1}{dx_1},$$

dostaneme

$$3x_1^2 + \frac{dy_1}{dx_1} . 3y_1^2 - 3a\left(y_1 + x_1\frac{dy_1}{dx_1}\right) = 0$$

čili (bez indexu 1)

$$x^2 + y^2 . \frac{dy}{dx} - ay - ax . \frac{dy}{dx} = 0,$$

odkud určíme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

Rovnice tečny u křivky $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ v bodě (x_1, y_1) je tedy

$$\eta - y_1 = \frac{ay_1 - x_1^2}{y_1^2 - ax_1}(\xi - x_1).$$

Srovnáme-li rovnici, ku které jsme posléze došli, s rovnicí křivky, vidíme, že stačilo *derivovati celou levou stranu rovnice člen po členu*; jest zajisté tato strana ($= 0$) funkcí veličin x a y v tom smyslu, že jest algebraickým výrazem obsahujícím x a y. Jest to — v našem případě — součet tří funkcí, z nichž 2. je mocnina funkce y, 3. pak součin funkce $3ax$ a funkce y; dle pravidel *b*), *g*), *f*) nalezneme tedy přímo

$$3x^2 + 3y^2 \, . \, y' - 3a\,(1 \, . \, y + xy')$$

a odtud y'. Tím způsobem nalezneme derivaci y' na př. u funkce $y^2 = ax$ krátce z rovnice $2yy' - a = 0$ ve tvaru

$$y' = \frac{a}{2y}.$$

18. V mnohých případech stává se, že křivka postupuje, jak říkáme, do nekonečna (měli jsme parabolu, hyperbolu), t. j. pro x rostoucí nad každé sebe větší číslo může býti hodnota y buď zcela určitá nebo také vzrůstati „do nekonečna“; jestliže takto buď obě souřadnice bodu na křivce nebo aspoň jedna stane se větší než jakékoli číslo, které umíme uvésti, pravíme, že křivka má bod v nekonečnu, jehož obě neb aspoň jedna souřadnice jest ∞.

Jest otázka, má-li křivka v takovém bodě určitou tečnu a jak nalezneme její rovnici. Všimněme si uvedených křivek, paraboly $y = x^2$ (obr. 13.) a hyperboly $y = \frac{1}{x}$ (obr. 15.). Parabola má v bodě (x, y) tečnu, jejíž rovnice jest

$$\eta - y = 2x\,(\xi - x) \text{ čili } \eta = 2x\xi - 2x^2 + y$$

čili (dosadíme-li $y = x^2$)

$$\eta = 2x\xi - x^2.$$

(Pokračování.)