Václav Jeřábek
Příspěvek k novější geometrii trojúhelníka

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 2, 209--215

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123771`

Příspěvek k novější geometrii trojúhelníka.

Napsal V. Jeřábek.

Střed kruhu trojúhelníku ABC (obr. 1.) opsaného budiž O a vepsaného O'. Kruh vepsaný nechť se dotýká stran trojúhelníka ABC v bodech A', B', C', jest tedy $AB' = AC' = s - a$, $BC' = BA' = s - b$, $CA' = CB' = s - c$, je-li $a + b + c = 2s$.

Dělicí poměry bodů A', B', C' jsou

$$\alpha' = -\frac{s-b}{s-c},\ \beta' = -\frac{s-c}{s-a},\ \text{a}\ \gamma' = -\frac{s-a}{s-b}.$$

Ježto $\alpha'\beta'\gamma' = -1$, protínají se příčky AA', BB', CC' dle věty Cevovy v jediném bodě G, který sluje bodem Gergonnovým trojúhelníka ABC.

Jsou-li A'_1, B'_1, C'_1 body isotomické, čili souměrné k bodům A', B', C' dle středů a, b, c stran BC, CA, AB a znamenáme-li jejich dělicí poměry α'_1, β'_1, γ'_1, jest

$$\alpha'_1 = -\frac{s-c}{s-b},\ \beta'_1 = -\frac{s-a}{s-c},\ \gamma'_1 = -\frac{s-b}{s-a}$$

a poněvadž $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1 = -1$, protínají se též příčky AA'_1, BB'_1, CC'_1 v jediném bodě N, který nazývá se bodem Nagelovým trojúhelníka ABC.

Dva body G, N, jimiž procházejí podvojně příčky AG, AN; BG, BN; CG, CN, protínající protilehlé strany BC, CA, AB v bodech isotomických, jmenují se body reciproké.

Mají-li dva body M, M_1 (obr. 2.) takovou polohu, že příčky AM, AM_1; BM, BM_1; CM, CM_1 jsou podvojně souměrné (stejnoúhlé, isogonálné) dle os půlících úhly A, B, C, nazývají se body inversní (inverse trojúhelníková).

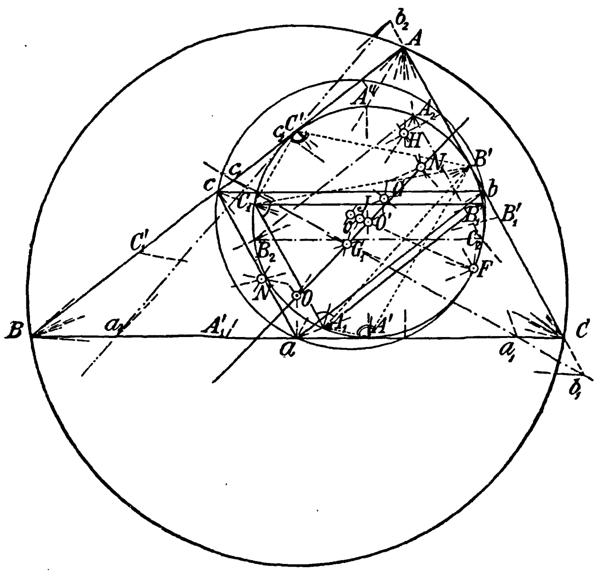
1. Bod inversní G_1 k bodu Gergonovu G jest vnitřním středem podobnosti kruhů (ABC), (A'B'C').

Přímky AG_1, BG_1, CG_1, jež jsou isogonálně sdruženy s příčkami AGA', BGB', CGC' protínají vepsanou kružnici $(A'B'C')$ v bodech A_1, B_1, C_1 souměrných k bodům A', B', C' dle příslušných os úhlů trojúhelníka ABC. Úhly $A_1A'B'$, $C_1C'B'$ jsou stejny, neboť ramena jejich, stojíce podvojně kolmo na příslušných osách souměrnosti úhlů A a C, jsou v protivném směru rovnoběžná. Též úhly A_1C_1B' a C_1A_1B' jsou si rovny, poněvadž jsou výplňky stejných úhlů $A_1A'B'$, $C_1C'B'$ a to, první ve čtyřúhelníku $A_1A'B'C_1$ a druhý ve čtyřúhelníku $C_1C'B'A_1$. Trojúhelník A_1C_1B' jest tudíž rovnoramenný a protože má s trojúhelníkem rovnoramenným A_1C_1O' společnou podstavu A_1C_1, stojí $B'O'$ kolmo na A_1C_1, a že též $B'O'$ stojí kolmo na AC, jest tětiva A_1C_1 rovnoběžná s AC i ac. Dle analogie jest $C_1B_1 \parallel CB \parallel cb$ a $B_1A_1 \parallel BA \parallel ba$. Trojúhelníky podobné ABC a $A_1B_1C_1$ jsou podobně položeny dle bodu G_1, pročež jest bod tento středem podobnosti kruhů (ABC) a $(A'B'C')$ res. trojúhelníkům ABC a $A_1B_1C_1$ opsaných; leží tedy G_1 na OO'.

Zároveň poznáváme, že bod F, v němž se protínají přímky aA_1, bB_1, cC_1, jest vnějším středem podobnosti kruhů (abc) a $(A_1B_1C_1) \equiv (A'B'C')$ a že tedy F, jak známo, jest bodem dotyčným těchto kruhů. Je-li o středem kruhu (abc), prochází spojnice oO' bodem F.

2. Bod N_1 inversně sdružen k bodu Nagelovu N jest vnějším středem podobnosti kruhů (ABC), (A'B'C').

Příčka AA'_1 protíná kružnici $(A'B'C')$ v koncovém bodě A'' průměru $A'O'A''$, neboť jest bod tento podobně položen s bodem A'_1, ve kterém připsaná kružnice dotýká se strany BC. Přímka AN_1, jsouc isogonálně sdružena s příčkou AA'_1, protíná kružnici $(A'B'C')$ v bodě A_2 souměrně položeném k bodu A'' dle osy úhlu A; avšak A_1 jest též bodem souměrně položeným s bodem A' dle zmíněné osy, prochází tudíž A_1A_2 středem O', a bod A_2 jest diametrálně položen v kruhu $(A'B'C')$ s bodem A_1. Dle analogie protínají příčky BN_1, CN_1 kružnici $(A'B'C')$ v bodech B_2 a C_2 diametrálně položených resp. s body B_1 a C_1. Ježto trojúhelník $A_2B_2C_2$ jest v kruhu $(A'B'C')$ diametrálně položen k trojúhelníku $A_1B_1C_1$, jest podoben a podobně položen k trojúhelníku ABC dle středu N_1 a k trojúhelníku abc dle středu J. Nyní jest zřejmo, že N_1 jest vnějším středem podobnosti kruhů (ABC), $(A'B'C')$, neboť kruh $(A_2B_2C_2)$ jest totožný s kruhem $(A'B'C')$. Rovněž vysvítá, že J jest vnitřním středem podobnosti kruhů (abc), $(A'B'C')$ a že leží na přímce oO'.



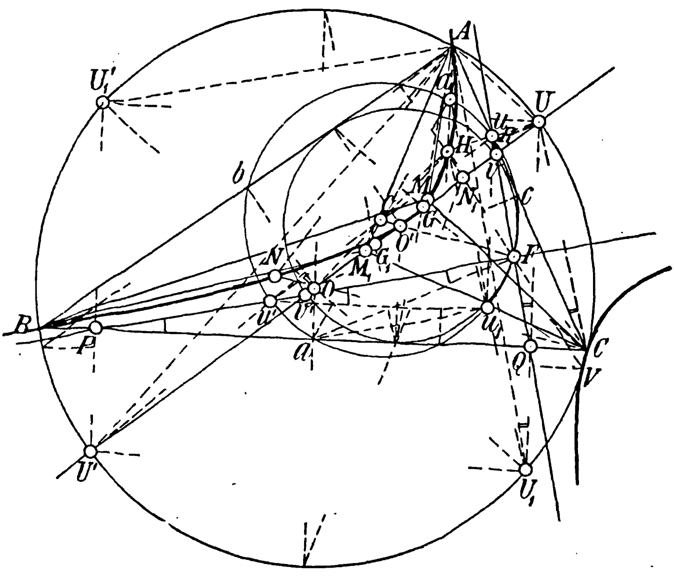
Obr. 1.

Ježto body H, N_1, F jsou vnější středy podobnosti kruhů (ABC), (abc) a $(A'B'C')$, leží body ty v téže přímce.

3. Veďme středem podobnosti G_1 kteroukoliv přímku protínající strany trojúhelníka ABC v bodech a_1, b_1, c_1 a sestrojme stejnoúhle sdružené příčky Aa_2, Bb_2, Cc_2 k příčkám Aa_1, Bb_1, Cc_1, jejichž paty a_2, b_2, c_2 leží též v jediné přímce, která jest s příčkou $a_1b_1c_1$ isogonálně sdružena (příčky inversní). Otáčí-li se přímka $a_1b_1c_1$ kolem bodu G_1, vytvoří body a_2. b_2, c_2 v příslušných stranách BC, CA a AB projektivné řady bodové, pročež obaluje přímka $a_2b_2c_2$ kuželosečku. Prochází-li příčka $a_1b_1c_1G_1$ vrcholem A, s nímž sjednocují se body b_1 a c_1, splyne bod b_2 s vrcholem C, bod c_2 s vrcholem B, strana BC stane se mezní polohou tečny $a_2b_2c_2$, a že k bodu A' nekonečně se při-

blíží bod a_2, jest A' bodem dotyčným obalové kuželosečky. Dle analogie dotýká se kuželosečka strany CA v bodu B' a strany AB v bodu C', jest tudíž kuželosečka tato kružnicí $(A'B'C')$ trojúhelníku ABC vepsanou. Můžeme tedy vysloviti větu:

Prochází-li příčka $a_1b_1c_1$ vnitřním středem podobnosti G_1 kruhů (ABC), $(A'B'C')$, dotýká se příčka $a_2b_2c_2$, isogonálně sdružena s příčkou $a_1b_1c_1$, kružnice vepsané $(A'B'C')$.



Obr. 2.

Dle analogie platí též věta:

Isogonálně sdružená příčka k příčce, jdoucí vnějším středem podobnosti N_1 kruhů (ABC) a $(A'B'C')$, jest tečnou kuželosečky $(A'_1B'_1C'_1)$ dotýkající se stran trojúhelníka ABC v bodech A'_1, B'_1, C'_1.

Zároveň vysvítá, že isogonální příčka k přímce OO' jest společnou tečnou kruhu $A'B'C'$ a kuželosečky $(A'_1B'_1C'_1)$.

4. — Obr. 2. — *Hyperbola Feuerbachova.* Geometrickým místem bodu, jenž inversně přísluší bodům M_1 přímky OO', jest hyperbola Feuerbachova opsaná trojúhelníku ABC. Neboť

body $M_1 \ldots$ přímky OO' promítají se z vrcholů A, B, C třemi svazky paprskovými $A(M_1 \ldots)$, $B(M_1 \ldots)$, $C(M_1 \ldots)$; a je-li M bodem inversním k bodu M_1, jsou svazky $A(M \ldots)$, $B(M \ldots)$, $C(M \ldots)$ projektivné a bod M, v němž paprsky AM, BM, CM, projektivně sdružené k paprskům AM_1, BM_1, CM_1, se protínají, vytvoří kuželosečku jdoucí středy A, B, C těchto svazků. Splyne-li bod M_1 postupně s bodem O, G_1, O', N_1, splyne bod M postupně se středem orthickým H (průsečíkem výšek), s bodem Gergonovým G, se středem O' kruhu vepsaného a s bodem Nagelovým N. Hyperbola Feuerbachova, obsahujíc střed orthický H, jest rovnostranná, dotýká se v bodu O' přímky OO' a prochází bodem Gergonovým i Nagelovým.

Přímka OO' protíná kružnici (ABC) ve dvou bodech diametrálně protilehlých U, U', jejichžto inversní body přináležejí hyperbole a jsou v nekonečnu na přímkách AU'_1, AU_1, které isogonálně přísluší přímkám AU, AU' a procházejí resp. body U'_1, U_1, v nichž rovnoběžky vedené body U, U' k BC protínají kružnici (ABC). Ježto U_1, U'_1 jsou též diametrálně protilehlými body kruhu (ABC), jest úhel $U_1AU'_1$ pravý; čímž znova na jevo vychází, že asymptoty hyperboly Feuerbachovy, jsouce rovnoběžny s přímkami AU_1, AU'_1, stojí na sobě kolmo, a že tudíž hyperbola jest rovnostranná.

Kruh devíti bodů (abc) jest podobně položen s kruhem (ABC) dle středu orthického H. Bodům A, U, U_1, U' nechť v kružnici (abc) přináležejí podobně položené body a_1, u, u_1, u' dle středu H, potom jest tětiva a_1u_1 rovnoběžna s AU_1; a ježto úhly au_1a_1, $U_1AU'_1$ jsou pravé, jest tětiva au_1 rovnoběžna s AU'_1 a tedy kolma na AU_1. Veďme bodem u rovnoběžku s AU_1 a bodem u' s AU'_1 tedy i s au_1. Rovnoběžky tyto protínají se v bodu F, jenž leží na kružnici (abc), neboť nad průměrem uu' úhel uFu' jest pravý. V kruhu (abc) stejným obloukům (au'), (u_1F) přináležejí stejné úhly aFu' a $u_1u'F$. Buďtež P, Q body průsečné přímek Fu', Fu se stranou BC. Ježto tětiva u_1u' jest rovnoběžna s tětivou podobně položenou U_1U' dle středu H a tedy též se stranou BC k $U'U_1$ rovnoběžnou, jest úhel $aFu' = u_1u'F = aPF$, pročež jest a středem přepony trojúhelníka pravoúhlého PFQ, a body P, Q jsou body isotomickými ($BP = QC$). Podobně vytínají přímky PF a QF na druhých dvou stranách CA a AB body isotomické, jsou tudíž příčkami reciprokými a asymptotami hyperboly Feuerbachovy, mající svůj střed v bodu F.

Jsou-li Q a R paty kolmic spuštěných s bodu U na strany BC a AC, jest úhel $RCU = RQU = AU_1U$, pročež jest přímka Simsonova QR bodu U vzhledem k trojúhelníku ABC rovnoběžna s AU_1 a že prochází půlícím bodem u úsečky HU*), splývá s asymptotou FU, neboť tato jest též rovnoběžna s AU a prochází bodem u. Přímka Simsonova bodu U' vzhledem k trojúhelníku ABC jest druhou asymptotou hyperboly Feuerbachovy.

Protíná-li průměr UU' asymptotu Fu v bodu v a Fu' v bodu v', má kružnice $(vv'F)$ s kružnicí (abc) čili $(uu'F)$ společný bod F a střed její jest ve středu O' kruhu trojúhelníku vepsaného, a že spojnice středů o, O' kruhů $(uu'F)$ a $(vv'F)$ jakožto společná těžnice trojúhelníků $uu'F$ a $vv'F$ prochází bodem F, dotýkají se zmíněné kruhy v bodu F. Jest však známo, že kružnice trojúhelníku vepsaná dotýká se kruhu (abc) též v bodu F, ve kterém oO' kruh tento seče, pročež splývá kružnice vFv' s kružnicí trojúhelníku ABC vepsanou. Tím přicházíme k známé vlastnosti:

Střed Feuerbachovy hyperboly jest bodem, v němž dotýká se kružnice vepsaná kruhu devíti bodů (abc).

Budiž bod V kružnice (ABC) podobně položen k bodu F kružnice (abc) dle středu H, potom jest $FV = HF$, z čehož soudíme, že kružnice (ABC) má s hyperbolou Feuerbachovou společný čtvrtý bod V. Bod tento jest inversně sdružen s nekonečně vzdáleným bodem přímky UU' a jeho spojnice s vrcholem A jest isogonálně sdružena s přímkou jdoucí vrcholem A rovnoběžně s UU'.

5. Strany trojúhelníka ABC buďtež osami souřadnými; normální souřadnice x, y, z kteréhokoliv bodu roviny trojúhelníka jsou veličiny úměrné ku vzdálenostem tohoto bodu od stran BC, CA a AB.

---

*) Srovnej Al. Strnad: O přímce Simsonově, Časopis pro pěstování mathematiky, roč. XV., str. 115 a »Drobné zprávy« téhož ročníku na str. 125.

Souřadnice bodu Gergonnova jsou

$$G\left(\frac{1}{1+\cos A}, \frac{1}{1+\cos B}, \frac{1}{1+\cos C}\right),$$

středu podobnosti $G_1(1+\cos A, 1+\cos B, 1+\cos C)$, bodů

$$N\left(\frac{1}{1-\cos A}, \frac{1}{1-\cos B}, \frac{1}{1-\cos C}\right),$$

$$N_1(1-\cos A, \ 1-\cos B, \ 1-\cos C).$$

Přímka spojující střed $O'(1, 1, 1)$ se středem $O(\cos A, \cos B, \cos C)$ má rovnici

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ \cos A, & \cos B, & \cos C \end{vmatrix} = 0,$$

čili

$$x(\cos B - \cos C) + y(\cos C - \cos A) + z(\cos A - \cos B) = 0,$$

hyperbole Feuerbachově náleží tudíž rovnice

$$\frac{\cos B - \cos C}{x} + \frac{\cos C - \cos A}{y} + \frac{\cos A - \cos B}{z} = 0,$$

jejíž střed má souřadnice

$$F\left[\sin^2\frac{1}{2}(B-C), \sin^2\frac{1}{2}(C-A), \sin^2\frac{1}{2}(A-B)\right].$$

Body G, N leží na hyperbole a jejich body inversní G_1, N_1 na přímce OO', neboť souřadnice bodů G, N vyhovují rovnici hyperboly a bodů G_1, N_1 rovnici přímky OO' *).

O motorech explosivních.

Napsal Dr. **Ferd. Pietsch.**

(Pokračování.)

Důležité u každého stroje jest *regulování chodu* nutné při menším neb větším zatížení. Máme trojí princip regulace.

Nejjednodušší jest ten, že vynecháme některé zdvihy práci konající. Stroj obstará si zavření plynu, tak že do válce proudí

*) Ve příčině hyperboly Feuerbachovy srovnej: Sur l'hyperbole de Feuerbach, Mathesis, 1893, str. 81; Sur le théorème de Feuerbach (J. Neuberg), Mathesis, 1908, str. 201.