Jan Vojtěch

Typy a kontinuitní grupy kollineací v S_3. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 2, 185--204

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123767

Typy a kontinuitní grupy kollineací v S_3.

Napsal dr. **Jan Vojtěch** v Brně.

Sophus Lie uvádí kdesi *) jako podstatnou vlastnost theorie transformací, že věty její lze vyvinouti jak analyticky elegantně, tak také syntheticky názorně; a poněvadž methoda geometrických úvah tak pěkně se osvědčila zvláště v geometrii projektivní, jest zajisté přiměřenou také při stanovení typů a grup transformací projektivních. Pomůckou stejně pohodlnou jako potřebnou může zde při konstrukci typů a grup býti skládání jich z nejjednodušších typů a grup transformačních. Myšlenka je podobná Steinerovu tvoření vyšších geom. útvarů řezem nebo spojováním korrespondujících elementů projektivně sobě přiřazených útvarů nižších.

Jak rozmanité použití připouští dotčená methoda vzestupná v theorii transformací, ukáže několik příkladů. H. B. *Newson* odvodil tímto způsobem kontinuitní grupy transformací projektivních na přímce a v rovině, používaje však také značnou měrou analytického vyjádření. Sestrojil dále kontinuitní grupy konformních reálních transformací v rovině **) na základě lineárních lomených transformací jedné komplexní proměnné; konečně typy a kontinuitní grupy reálních konformních transformací v prostoru ***). R. *Krause* nalezl a popsal †) pět druhů senárních cyklických kollineací v prostoru skládáním cyklických kollineací ternárních a binárních (involutorních). G. *Scheffers* určil ††) podobně všechny

*) S. Lie, Verwerthung des Gruppenbegriffes für Differentialgleichungen, Leipziger Berichte 47. 1895.

**) Newson, Continuous groups of circular transformations, Amer. Math. Soc. Bull. 4. 1898, pp. 107—121; také Kansas Univ. Bull. 1. 1902, pp. 129—142. Italský překlad od C. Alasie v Giornale di matem. 43. 1905.

***) Newson, Types and continuous groups of real conformal transformations in S_3, Giornale di matem. 45. 1907, pp. 95—119.

†) R. Krause, Über senäre Raumkollineationen, Diss. Strassburg 1903, výtah v Archiv f. Math. u. Phys. (3) 9. 1905, pp. 22—29.

††) G. Scheffers, Synthetische Bestimmung aller Berührungstransformationen der Kreise in der Ebene, Leipziger Ber. 51. 1899, pp. 145—160.

dotykové transformace kruhů v rovině. H. *Wiener* v řadě úvah*) zabýval se skládáním nejjednodušších involutorních transformací pohybových; a pod. Vycházeje od nejjednodušších transformací rovinných dospěl jsem**) skládáním jich zcela elementární methodou analytickou k rozmanitým grupám speciálních kollineací a konečně k nejobecnější kollineaci v rovině.

Úkolem tohoto článku jest konstruovati (v I. části) všechny *typy* kollineací v prostoru trojrozměrném skládáním obecných i partikulárních homologií a popsati je na základě této konstrukce, rozšířiti potom způsob ten na kollineace prostoru n-rozměrného. V II., hlavním oddílu sestrojeny *kontinuitní grupy* kollineací v S_3, a to nejprve u jednotlivých typů grupy základní, jichž kollineace mají společným celý invariantní svůj útvar, potom z těchto grupy širší s částí invariantního útvaru společnou; dále grupy užší k základním grupám, charakterisované vztahy mezi konstantami kollineací grup těch, z nich podobně jako prve odvozeny zase grupy širší. Grupy kollineací v S_2, jakož i grupy proj. transformací v S_1 slouží zde často za východisko, sestaveny proto úvodem. Při užších grupách, nalezených z grup základních, objevují se jako invariantní útvary speciálně kuželosečky, kubické křivky prostorové, plochy 2. stupně a lineární komplexy přímek, i hledány širší grupy, které takový útvar připouští. V části III. připojeny *historické poznámky* jednak o klassifikaci kollineací v S_n, speciálně v S_2 a S_3, potom o dosavadních vyšetřováních, týkajících se stanovení kontinuitních grup kollineačních v S_3 a útvarů při kollineaci invariantních.

Aby úvaha nevzrostla příliš do šířky, bylo nutno v některých směrech se omeziti. Typy kollineací vzaty v úvahu pouze nedegenerované***), útvary při grupách invariantní pouze reální, vynechány specialisace typů v typy jednodušší, specialisace

*) H. Wiener, Die Zusammensetzung zweier endlichen Schraubungen zu einer einzigen, Leipz. Ber. 42. 1890, pp. 13—23. Zur Theorie der Umwendungen, tamtéž pp. 71—87. Über geometrische Analysen, tamtéž pp. 245—267, sv. 43. 1891, pp. 424 447, 664—673.

**) J. Vojtěch, Geometrické transformace prvního stupně v rovině a jich grupy, Časopis m. a f. 35. 1906, pp. 249—275, 377—397.

***) Degenerované jsou totiž kollineace s elementy singulárními, jimž koresponduje ne jeden, nýbrž nekonečně mnoho prvků stejnojmenných.

metrické a j. Z téže příčiny upuštěno od rozšíření úvah o kontin. grupách a invar. útvarech na prostor S_n, jež aspoň někde je snadné, jinde však vyžaduje pomůcek složitějších; pominut také referát o dosavadních vyšetřováních příslušných (v S_n), která jen porůznu podali Lie, Kowalewski, Loria, Marotte, Fano a j. Bylo by dlouhé srovnávati zde v jednotlivostech výsledky této úvahy s výsledky, pokud jinými cestami byly nalezeny; zůstává důležitou otázkou, jak zajistiti úplnost soustavy sestrojených grup, za to projektivní ekvivalence grup nalezených při různých typech a různých útvarech invariantních je vyloučena.

Pro grupy kollineací zvolena stručná symbolika, snadno srozumitelná.

I. Typy kollineací v S_n, zvláště v S_3.

1. Při nejobecnější kollineaci v (lineárním) prostoru S_n jest $n + 1$ nezávislých bodů invariantních (z nichž totiž žádné tři neleží v téže přímce, žádné 4 v téže rovině, ... žádných l v témž prostoru S_{l-2}); útvar těmito body tvořený obsahuje $\frac{(n+1)n}{2}$ přímek S_1 v celku invariantních, $\frac{(n+1)n(n-1)}{6}$ rovin S_2, ... $\frac{\lfloor(n+1)}{\lfloor(k+1)\lfloor(n-k)}$ prostorů S_k celkově invariantních, ... konečně $n + 1$ prostorů (hyperrovin) S_{n-1}, rovněž invariantních jako celek. Spojnice dvou bodů A a B, v kollineaci sobě korrespondujících, protíná prostory S_{n-1}, naposled uvedené, v $n + 1$ bodech; průsečíky tyto stanoví spolu s body A, B n různých dvojpoměrů, charakteristických pro určitou kollineaci.

Jiné typy *obecných* kollineací dostaneme za supposice, že spojnice S_1 kterýchkoli dvou bodů sobě odpovídajících (obecně položeného A a jemu korrespondujícího B) protíná některé z dotčených prostorů S_k $(0 \leqq k \leqq n - 2)$, určených $k + 1$ invariantními body, (nebo z duálního předpokladu, že prostor S_{n-2}, společný dvěma sobě v kollineaci příslušným hyperrovinám, má s některými z uvedených prostorů S_k $(1 \leqq k \leqq n - 1)$ společné prostory S_{k-1}). Druhý typus na př. jest kollineace, v níž spojnice dvou korrespondujících bodů A, B protíná prostor S_{n-2}, určený $n-1$ body invariantními; neboť prostor S_{n-1}, obsahující těchto $n-1$ bodů samodružných a ony dva sobě příslušné, odpovídá v kollineaci sobě samému, protíná pak spojnici S_1 obou zbývajících bodů invariantních v bodě rovněž invariantním, i jest ona přímka S_1 složena z bodů jednotlivě invariantních. Obecně plynou z předpokladu, že AB protíná prostor S_p, typy kollineací s prostorem S_{n-p-1} bodů vesměs invariantních; tento S_p totiž, obsahující $p+1$ bodů samodružných, určuje s bodem A prostor invariantní S_{p+1} (v němž leží i B), který protíná S_{n-p-1}, určený ostatními $n-p$ body samodružnými, v novém bodě invariantním, takže tento, maje $n-p+1=(n-p-1)+2$ samodružných bodů, je ve všech svých bodech invariantní. Další typ obecné kollineace jest na př. ten, v němž prostor S_{n-2}, společný dvěma korrespondujícím hyperrovinám, protíná S_r (určený $r+1$ nezáv. body inv.) v S_{r-1}, jiný $S_{r'}$ (stanovený $r'+1$ inv. body, na předešlých i mezi sebou nezávislými) v $S_{r'-1}$; S_r obsahuje totiž $r+1$ invariantních S_{r-1}, k nimž přibude teď další invariantní S_{r-1}, podobně u $S_{r'}$, takže oba tyto prostory se transformují při uvažované kollineaci identicky.

Tímto způsobem obdržíme patrně všechny možné typy obecných kollineací. Prostory s body při kollineaci vesměs invariantními slují základní prostory kollineace; jich počet a rozměry charakterisují typus obecné kollineace. Počet konstantních dvojpoměrů jest při těchto typech o jeden menší než počet základních prostorů. Typus obecné kollineace lze tedy charakterisovati udáním prostorů základních co do počtu a rozměrů; tak jest značkou nejobecnější kollineace [000 . . . 00] s $n+1$ nullami, druhý typus uvedený má znak [100 . . . 00] s $n-1$ nullami, obecně [$n-p-1$ 00 . . . 00] s $p+1$ nullami, další [rr' 00 . . . 00] s $n+1-(r+1)-(r'+1)=n-r-r'-1$ nullami.

Z každého typu obecné kollineace vznikne řada typů kollineací *partikulárních*, splynou-li některé ze základních prostorů. Ve značce pro typus dáme na znamení toho rozměry prostorů, jež splynuly, do společných závorek. Z nejobecnějšího typu [000 . . . 00] dostaneme na př. partikulární typy [(00) 0 . . . 00], [(00) (00) 0 . . . 0], [(000) 0 . . . 0] atd., kde tedy splynuly 2 nebo 2 a 2 nebo 3 invariantní body; z obecného typu [100 . . . 0] limitováním povstávají nové typy [(10)00 ... 0], [(100 00 ... 0], [1 (00) 0 ... 0] atd., kde se stal jeden nebo dva splynuvší body incidentními se základním S_1 nebo splynuly 2 body.

2. Vypíšeme typy obecných i partikulárních kollineací pro prostory nejnižších rozměrů.

Na *přímce* S_1 má obecná transformace projektivní dva body základní: typus [00]; limitní typ má dva splývající body invariantní [(00)].

V *rovině* S_2 existují 2 druhy obecných kollineací [000] a [10] a 3 typy partikulárních [(00) 0], [(000)], [(10)]; ony označíme K^1, K^4, tyto K^2, K^3, K^5.

V *prostoru* S_3 jsou tyto typy kollineací obecných: [0000], [100], [11], [20]; ke každému z nich přistupují typy partikulární, i máme

1. typus nejobecnější K^1 : [0000] a jeho limitní K^2 : [(00) 00], K^3 : [(00) (00)], K^4 : [(000) 0], K^5 : [(0000)];

2. kollineaci s jednou přímkou samodružných bodů K^6 : [100] a příslušné partikulární K^7 : [1 (00)], K^8 : [(10) 0], K^9 : [(100)];

3. kollineaci s dvěma přímkami pevných bodů K^{10} : [11] a případ limitní [(11)];

4. konečně kollineaci s rovinou bodů vesměs samodružných K^{12} : [20] a její mezní tvar K^{13} : [(20)]. Celkem 13 typů, z nich 4 obecné.

V *prostoru* S_4 existují typy:

1. nejobecnější K^1 : [00000] a partikulární K^2 : [(00) 000], K^3 : [(00) (00) 0], K^4 : [(000) 00], K^5 : [(000) (00)], K^6 : [(0000) 0], K^7 : [(00000)];

2. typus se základní přímkou K^8 : [1000] a jeho limitní K^9 : [10 (00)], K^{10} : [(10) 00], K^{11} : [(10) (00)], K^{12} : [1(000)], K^{13} : [(100) 0], K^{14} : [(1000)];

3. typ se dvěma základními přímkami K^{15} : [110], k němu partikulární K^{16} : [1 (10)], K^{17} : [(11) 0], K^{18} : [(110)];

4. typ se základní rovinou K^{19} : [200], příslušné K^{20} : [2 (00)], K^{21} : [(20) 0], K^{22} : [(200)];

5. kollineace se základní rovinou a přímkou K^{23} : [21] a případ limitní K^{24} : [(21)], kdy přímka leží v rovině;

6. konečně kollineace se základním S_3, K^{25} : [30] a mezní tvar její K^{26} : [(30)]. Celkem 26 typů kollineací v S_4, z nich 6 obecných.

V prostoru S_5 jsou obecné typy kollineací [000000], [10000], [1100], [111], [2000], [210], [22], [300], [31], [40], tedy 10 typů obecných a 47 partikulárních. Atd.

3. Všechny typy obecných kollineací v S_n sestrojíme, vyjdouce od nejjednoduššího obecného typu $[\overline{n-1}\,0]$ a skládajíce 2, 3, ... k, ... n takových kollineací při zvláštní vzájemné poloze základních prostorů; typy kollineací partikulárních vycházejí podobně jako produkt limitních kollineací $[(\overline{n-1}\,0)]$ a obecných. Kollineace uvedeného typu $[\overline{n-1}\,0]$ jest *homologie,* jejíž invariantní útvar sestává z osového prostoru S_{n-1} (bodů jednotlivě samodružných) a z bodu (středu) O mimo něj ležícího. Libovolnému bodu v prostoru A odpovídající bod B určen jest dvojpoměrem $k = (ORAB)$, kde R je průsečík spojnice AO s osovým prostorem.

V prostoru S_1 jsou dva samodružné elementy buď různé O_1, O_2 a konstantní dvojpoměr $k = (O_1 O_2 AB)$ nebo splynou oba tyto prvky v jeden $O_1 \equiv O_2 \equiv O$; v tomto limitním případě vychází

$$k = \frac{O_1A}{O_2A} : \frac{O_1B}{O_2B} \text{ roven } 1.$$

Platí však patrně

$$k = \frac{O_1O_2 + O_2A}{O_2A} : \frac{O_1O_2 + O_2B}{O_2B}$$

čili

$$k = \left(\frac{O_1O_2}{O_2A} + 1\right) : \left(\frac{O_1O_2}{O_2B} + 1\right),$$

odtud

$$k\,\frac{O_1O_2}{O_2B} + k = \frac{O_1O_2}{O_2A} + 1,$$

dále

$$1 - k = k \cdot \frac{O_1O_2}{O_2B} - \frac{O_1O_2}{O_2A}$$

a konečně
$$\frac{1-k}{O_1O_2}=\frac{k}{O_2B}-\frac{1}{O_2A},$$
při mezní pak poloze $O_2 \equiv O_1$ ($\equiv O$) a odtud plynoucím $k = 1$ máme
$$\frac{1}{OB}-\frac{1}{OA}=lim\frac{1-k}{O_1O_2}=a.$$

Element B, příslušný k A, jest tedy určen jediným elementem dvojným a konstantou a, neboť
$$\frac{1}{OB}=\frac{1}{OA}+a;$$
pro A v nekonečnu jest
$$a=\frac{1}{OZ},$$
kde Z je bod korrespondující bodu v nekonečnu. Uvedené dva typy existují v řadě bodové, ve svazku paprskovém, ve svazku rovin, obecně v jednorozměrném svazku prostorů S_k.

V prostoru S_2, na př. v poli rovinném (ve svazku prostorovém, . . .) jest nejjednodušší obecnou kollineací homologie K^4 : [10] s pevným středem O, neincidentní osovou přímkou p bodů invariantních a dvojpoměrem k. Produkt dvou homologií s invar. útvary O_1, p_1 resp. O_2, p_2 (a dvojpoměry k_1 resp. k_2), kde O_2 a p_1, potom p_2 a O_1 jsou incidentní, je druhý obecný typus kollineace v rovině K^1 : [000]; vedle bodů O_1, O_2 jest totiž invariantní také a pouze bod $O_3 \equiv (p_1p_2)$. Na stranách invar. trojúhelníka (a ve svazcích paprskových se středy v jeho vrcholech) existují proj. transformace [00], jichž char. dvojpoměry jsou na $O_1O_3 \ldots k_1$, na $O_2O_3 \ldots k_2$, na $O_1O_2 \ldots \frac{k_1}{k_2}$; poslední proto, že převádí-li první homologie bod A' na O_1O_2 v B', potom druhá bod B' v C', platí $(O_1O_2A'B') = k_1$, $(O_2O_1B'C') = k_2$ a tedy $(O_1O_2A'C') = k_1 \,.\, k_2^{-1}$. Obecněji mají dvojpoměry složek k_1 a k_2 tento jednoduchý význam; dejme tomu, že bod A obecně položený přechází první homologií v B, tento druhou v C; pak určuje spojnice AC bodů v kollineaci [000] sobě odpovídajících se svými průsečíky Q_1, Q_2, Q_3 na stranách inv. trojúhelníka $O_1O_2O_3$ dvojpoměry $(Q_3Q_1AC) = k_1$, $(Q_3Q_2AC) = k_2$.

Limitní případ typu [10] je ten, kdy O splyne s p (K^5, elace); svazek paprskový středu O obsahuje vesměs (mimo p) paprsky, jež vykazují transformaci [(00)] svých bodů. Char. dvojpoměr k nahrazen zde konstantou a, jejíž hodnota je pro každý paprsek jdoucí bodem O jiná; hodnoty tyto však spolu jednoduše souvisí a jsou určeny jednou z nich, příslušnou k určitému paprsku bodem O, jsouce na každém paprsku svazku O stanoveny reciprokou hodnotou úseku mezi bodem O a přímkou, jež koresponduje přímce v nekonečnu (a je ovšem $\|$ s p). Svazky paprsků s jiným středem na p jsou celkově invariantní, transformace [(00)] jejich elementů je dána transformací bodů na některém paprsku bodem O. Produkt homologie obecné (O_1, p_1, k) a limitní (O_2, p_2, a) s podmínkou, že O_2 a p_1, p_2 a O_1 jsou incidentní, jest kollineace typu K^2: [(00)0]; její invar. útvar skládá se z přímky p_2 s proj. transformací [00], samodružných bodů O_1, O_2 a dvojpoměru k (duálně svazek paprskový v O_2 má inv. paprsky p_1, p_2) a přímky p_1 bodem O_2 s proj. transformací [(00)] (duálně svazek v O_1). Spojnice AC bodů korrespondujících protíná p_1 a p_2 v bodech Q_1, resp. Q_2 a platí $(Q_2Q_1AC) = k$. Produkt dvou limitních homologií (O_1, p_1) a (O_2, p_2), kde O_1 a p_2 jsou incidentní, jest typ K^3: [(000)] kollineace rovinné, jejíž invar. útvar obsahuje přímku p_2 a bod O_1; v řadě bodové p_2 a ve svazku O_1 existují proj. transformace [(00)].

4. *Konstrukce a popis obecných kollineací v S_3.* Základní kollineací jest *homologie* (perspektivnost), t. j. typus K^{12}: [20], jejíž invariantní útvar sestává ze středu O a osové roviny neincidentní ϱ; každý bod a přímka rovinného pole ϱ, každá přímka a rovina prost. svazku O jsou jednotlivě invariantní. Libovolnému bodu v prostoru A odpovídá bod B, ležící na přímce AO tak, že dvojpoměr $(ORAB) = k$, když R je průsečík spojnice AO s rovinou ϱ. Každý paprsek bodu O (duálně svazek rovin s osou na ϱ) obsahuje projektivní transformaci typu [00], každá rovina bodem O jdoucí (duálně prost. svazek se středem na ϱ) vykazuje kollineaci typu [10]. Homologií jest v prostoru ∞^7 (lze

voliti O i ϱ na ∞^3 způsobů, konstantní dvojpoměr k ∞^1 způsoby).

Produkt dvou homologií K_1^{12} (O_1, ϱ_1) a K_2^{12} (O_2, ϱ_2), jichž základní útvary jsou tak položeny, že O_2 je incidentní s ϱ_1, ϱ_2 prochází bodem O_1, a jichž konstantní dvojpoměry jsou si rovny $(k_2 = k_1 = k)$, jest *dvojosá* kollineace K^{10}: [11]. Průsečnice dvou rovin základních $r \equiv (\varrho_1, \varrho_2)$ jest ve všech svých bodech invariantní, jsouc takovou vůči K_1^{12} i K_2^{12}; stejně však jest i přímka $s \equiv O_1 O_2$ té vlastnosti, neboť projektivnost na ní má dvojpoměr

$$k \cdot \frac{1}{k} = 1,$$

což při různých bodech samodružných O_1 a O_2 jest možno pouze tím, že každý bod její je dvojný. Jsou tedy r a s dvě přímky invariantních bodů, zároveň osy svazků invariantních rovin; na každé z těchto existuje kollineace typu [10], kterážto kollineace jest také v každém svazku prostorovém se středem na r nebo s. Char. dvojpoměr je všude k. — Spojnice korrespondujících bodů protíná obě osy r i s. Přísluší-li totiž bodu A bod B v K_1^{12}, tomu pak C v K_2^{12}, přísluší bodu A v K^{10} bod C; body $O_1 O_2 ABC$ jsou v jediné rovině, jež protíná přímku r v bodě R, v téže rovině jest R_1 (průsečík spojnice $O_1 AB$ s ϱ_1, tedy s $O_2 R$), R_2 (průsečík spojnice $O_2 BC$ s ϱ_2, tedy s $O_1 R$) a ovšem také S (průsečík spojnice AC s přímkou $O_1 O_2 \equiv s$). Jest dokázati, že přímka SAC protíná přímku r, že prochází tedy bodem R. Platí $(O_1 R_1 AB) = k$, $(O_2 R_2 BC) = k$, avšak $(O_2 R_2 BC) = (SR''AC)$, promítnuto z O_1 na AC, dále $(O_1 R_1 AB) = (SR'AC)$, promítnuto z O_2 na AC, poněvadž však dle hořejšího jest $(SR''AC) = k = (SR'AC)$, musí býti také $R' \equiv R''$, t. j. spojnice AC musí protíti obě roviny ϱ_1 i ϱ_2 v jednom bodě, jenž ovšem nutně leží na r v R. Vychází zároveň $(SRAC) = k$, t. j. dva body v dvojosé kollineaci sobě odpovídající tvoří spolu s průsečíky jich spojnice na osách r a s čtveřinu dvojpoměru k. Duálně průsečnice dvou rovin v K^{10} sobě odpovídajících protíná r i s; tyto roviny tvoří s rovinami určenými jich průsečnicí a osou r, resp. s čtveřinu téhož dvojpoměru. Kollineace typu K^{10} jest určena invar. přímkami r a s a dvojpoměrem k; jest

$\infty^{4+4+1} = \infty^9$ dvojosých kollineací v prostoru. Tento počet kollineací K^{10} lze ustanoviti také na základě vzniku dvojosé kollineace ze dvou K^{12}; K_1^{12} možno voliti ∞^7 způsoby, O_2 i ϱ_2 sice na ∞^2 způsobů, avšak k téže r i s dojdeme ∞^1 způsoby, tedy $\infty^7 . \infty^2 . \infty^2 . \infty^{-1} . \infty^{-1} = \infty^9$.

Produkt dvou homologií $K_1^{12}(O_1, \varrho_1, k_1)$ a $K_2^{12}(O_2, \varrho_2, k_2)$ při incidentních O_2 a ϱ_1, potom ϱ_2 a O_1 a různých dvojpoměrech k_1 a k_2 jest *osová* kollineace, typus K^6 : [100]. Průsečná přímka r rovin ϱ_1 a ϱ_2 jest ve všech bodech invariantní; spojnice však $s \equiv O_1 O_2$ je invariantní pouze jako celek, K^6 způsobuje na ní proj. transformaci, jejíž dvojné body jsou O_1, O_2 a dvojpoměr $\frac{k_1}{k_2}$ (směrem $O_1 O_2$). Duálně svazek rovin s osou s má všechny roviny invariantní (jsou invar. v celku při K_1^{12} i K_2^{12}), kdežto ve svazku rovin osy r existuje projektivnost s dvojnými rovinami ϱ_1 a ϱ_2 téhož uv. dvojpoměru. Na každé rovině svazku s jest kollineace typu [000], jejíž invar. trojúhelník má vrcholy O_1, O_2 a průsečík roviny s přímkou r; duálně každý prost. svazek středu na r vykazuje kollineaci nejobecnějšího typu s 3 invar. paprsky a rovinami. Na samodružných rovinách ϱ_1 a ϱ_2, duálně v inv. svazcích prostorových O_1, O_2 existují kollineace typu [10]. — Spojnice bodů korrespondujících sobě v K^6 protíná přímku s, neboť body $O_1 O_2 ABC$ leží v téže rovině; označme průsečík spojnice AC s přímkou s Q_3, s rovinami ϱ_1 a ϱ_2 pak Q_1, resp. Q_2, i platí (viz [000]) $(Q_3 Q_1 AC) = k_1$, $(Q_3 Q_2 AC) = k_2$. Duálně rovina α protíná rovinu β, přiřazenou jí v K_1^{12}, na ϱ_1, rovina β protíná se s rovinou γ, v kterou přechází homologií K_2^{12}, na ϱ_2, protíná proto průsečnice rovin α, γ, příslušných sobě v K^6, přímku $r \equiv (\varrho_1, \varrho_2)$; α, γ stanoví s rovinami ϱ_1, ϱ_2 a rovinou určenou bodem $[(\alpha, \gamma), r]$ a přímkou s dvojpoměry k_1, k_2. Osových kollineací je v prostoru $\infty^4 . \infty^3 . \infty^3 . \infty^2 = \infty^{12}$; totéž plyne z vytvoření $K^6 = K_1^{12} . K_2^{12}$, neboť K_1^{12} možno voliti ∞^7 způsoby, K_2^{12} potom jen ∞^5 způsoby (∞^2 středů O_2 na ϱ_1, ∞^2 rovin ϱ_2 bodem O_1, ∞^1 dvojpoměrů).

Tři homologie K_l^{12} (O_l, ϱ_l, k_l), kde $l = 1, 2, 3$, dávají *nejobecnější typus* kollineace v S_3, totiž K^1 : [0000], jestliže ku $K^6 = K_1^{12} . K_2^{12}$ připojíme K_3^{12} tím způsobem, že ϱ_3 prochází body O_1, O_2, střed O_3 pak leží na (ϱ_1, ϱ_2); i protíná ϱ_3 tuto průsečnici (ϱ_1, ϱ_2) ve čtvrtém bodě O_4, rovněž invariantním při K^1. Invariantní čtyrstěn kollineace K^1 omezen jest čtyřmi body O_1, O_2, O_3, O_4 invariantními, šesti přímkami s proj. transformacemi typu [00], čtyřmi rovinami s kollineacemi [000]; tytéž typy transformací jsou v útvarech duálních. Na jednotlivých hranách má proj. transformace tyto char. dvojpoměry: na

$$O_1O_2 \,.\,.\, \frac{k_1}{k_2},\ \text{na}\ O_1O_3 \,.\,.\, \frac{k_1}{k_3},\ \text{na}\ O_1O_4 \,.\,.\, k_1,\ \text{na}\ O_2O_3 \,.\,.\, \frac{k_2}{k_3},$$

$$\text{na}\ O_2O_4 \,.\,.\, k_2,\ \text{na}\ O_3O_4 \,.\,.\, k_3.$$

Dejme tomu, že bodu A odpovídá v K_1^{12} bod B, tomuto v K_2^{12} bod C, tomu v K_3^{12} bod D, průsečíky pak spojnice bodů A a D, v K^1 sobě korrespondujících, se stěnami čtyrstěnu $O_2O_3O_4$, $O_1O_3O_4$, $O_1O_2O_4$, $O_1O_2O_3$ označme resp. 1, 2, 3, 4. I platí patrně $(41AD) = k_1$, $(42AD) = k_2$, $(43AD) = k_3$ a tedy

$$(4123) = \frac{1-k_2}{1-k_3} \cdot \frac{k_1-k_3}{k_1-k_2} \quad \text{čili} \quad (1234) = \frac{k_1-k_3}{k_2-k_3} : \frac{k_1-1}{k_2-1}.$$

Duálně tvoří také roviny α, δ v K^1 sobě příslušné s rovinami, jež spojují jich průsek s vrcholy čtyřstěnu, uvedené dvojpoměry. Kollineací K^1 jest v prostoru ∞^{15}, jak vychází, počítáme-li možné volby invar. elementů a char. dvojpoměrů buď dle vzniku $K^1 = K_1^{12} \,.\, K_2^{12} \,.\, K_3^{12}$ nebo přímo z definice.

5. *Konstrukce a popis partikulárních kollineací v* S_3. Padne-li střed O homologie do její osové roviny ϱ, přechází homologie v limitní případ, *elaci*, partikulární typus kollineace K^{13}: [(20)]. Na každé rovině jdoucí bodem O (různé od ϱ) existuje rovinná elace, kollineace [(10)], na každém paprsku bodem O projektivní transformace [(00)] s konstantou a, jejíž hodnota se však mění od paprsku k paprsku, jsouc rovna reciproké hodnotě úseku mezi bodem O a rovinou korrespondující v K^{13} rovině v nekonečnu $(\| \varrho)$; hodnoty dotčené jsou tedy určeny jednou z nich, jež může zastupovati dvojpoměr k obecné homologie K^{12}. Svazky ∞^2 paprsků (a rovin) se středy na ϱ jsou pouze v celku invariantní, transformace jich elementů řídí se transformací bodů (a přímek) v některé rovině jdoucí bodem O. Kollineací K^{13} jest v prostoru $\infty^3 \,.\, \infty^2 \,.\, \infty^1 = \infty^6$.

Produkt dvou kollineací typu K^{13} s invar. útvary O_1, ϱ_1, resp. O_2, ϱ_2, jestliže ϱ_2 prochází bodem O_1, O_2 pak leží na ϱ_1, při tom ani středy O_1, O_2, ani roviny ϱ_1, ϱ_2 nesplývají, poskytuje nový typus partikulární kollineace, $\mathsf{K}^{11}:[(11)]$. Průsečnice (ϱ_1, ϱ_2) a zároveň spojnice $O_1 O_2$ jest jediným základním útvarem, složena jsouc z bodů veskrze samodružných a jsouc osou rovin jednotlivě, ovšem jen v celku invariantních. Na každé pevné rovině (duálně ve svazcích se středy na $O_1 O_2$) existuje kollineace $[(10)]$, produkt dvou lim. dvourozměrných homologií téže osy různých středů. Kollineací typu K^{11} jest v prostoru ∞^8 (∞^4 invariantních přímek (ϱ_1, ϱ_2) v prostoru, při každé lze dle předešlého sestrojiti ∞^4 bodů korrespondujících danému).

Produkt dvou kollineací typu K^{13}, jestliže ϱ_2 prochází bodem O_1, (O_2 neleží na ϱ_1), jest kollineace typu $\mathsf{K}^9:[(100)]$. Průsečná přímka $r \equiv (\varrho_1 \varrho_2)$ obsahuje vesměs body jednotlivě invariantní, mezi nimi zvláště O_1; tímto bodem a bodem O_2 prochází druhá přímka $s \equiv O_1 O_2$, pouze v celku invariantní. Všechny roviny přímkou s vedené jsou samodružné (duálně k řadě bodové r), jsouce takovými při obou složkách kollineace K^9, spec. rovina $(r, s) \equiv \varrho_2$. Na přímce s je proj. transformace typu $[(00)]$, rovněž tak ve svazku rovin osy r; na (r, s) je kollineace typu $[(10)]$, taktéž v prost. svazku středu O_1. Na každé inv. rovině osy s existuje $[(000)]$, rovněž ve svazcích středu na r. Spojnice koresp. bodů protíná přímku s, průsečnice odpovídajících sobě rovin protíná r. Kollineací typu K^9 existuje ∞^{10} (∞^7 invar. útvarů rs, při každém ∞^3 možných konstrukcí bodu koresp.).

Produkt homologie obecné a limitní, tedy kollineací K^{12} (O_1, ϱ_1) a $K^{13}(O_2, \varrho_2)$, dává typus kollineace $\mathsf{K}^8:[(10)0]$, jestliže střed elace O_2 leží na rovině obecné homologie ϱ_1 a současně ϱ_2 prochází bodem O_1. Přímka $r \equiv (\varrho_1 \varrho_2)$ jest ovšem osou pevných bodů, přímka $s \equiv O_1 O_2$ osou samodružných rovin; v řadě bodové s je proj. transformace $[00]$ s dvojnými body O_1, O_2, rovněž v duálním svazku rovin osy r s dvojnými rovinami ϱ_1, ϱ_2; na rovině ϱ_1 existuje kollineace $[(10)]$, na ϱ_2 kollineace $[10]$ (duálně ve svazcích středů O_1 a O_2). Na invar. rovinách osy s existuje $[(00)0]$, taktéž duálně ve svazcích středu na r. Tyto a jiné vlastnosti kollineace K^8 plynou hned, uvážíme-li K^8 jako sled kollineací K^{12} a K^{13} za uv. podmínek. Kollineací K^8

jest v prostoru ∞^{11} (t. j. ∞^9 inv. útvarů $rsO_1\varrho_1$, ∞^2 konstrukcí korresp. bodů nebo ∞^7 kollineací K^{12}, ∞^2 poloh bodu O_2, ∞^1 poloh roviny ϱ_2, ∞^1 konstant u K^{13}).

Podrobíme-li prostor transformaci $K^{10}(r, s)$ a $K^{13}(O, \varrho)$, při čemž střed O elace leží na jedné inv. přímce s, rovina její ϱ prochází druhou přímkou r, vzniká kollineace typu K^7: [1(00)]. Na přímce r jako řadě bodové existuje identická transformace, rovněž ve svazku rovin osy s; v řadě bodové s je transformace [(00)], taktéž ve svazku rovin osy r. V rovinném poli $\varrho \equiv (rO)$ jest kollineace [10], stejně ve svazku prostorovém středu O; v rovinách osy s existují [(00)0], taktéž ve svazcích se středem na r. A j. Kollineací typu K^7 jest v prostoru ∞^{11} (∞^9 kollineací K^{10}, ∞^1 středů O a tím rovin ϱ, ∞^1 konstant u K^{13}).

Tři limitní homologie K^{13} nebo kollineace K^9 a $K^{13}(O_3, \varrho_3)$, připojíme-li tuto k oné tak, že ϱ_3 prochází body O_1, O_2 a že O_3 leží na rovině ϱ_1, dávají kollineaci typu K^5: [(0000)]. Při ní jest invariantním bod O_1, v němž se všechny tři ϱ_i protínají, dále přímka s bodem tím incidentní O_1O_2 (jako celek), jsouc průsečnicí rovin ϱ_1 a ϱ_3 a procházejíc bodem O_1, konečně rovina přímkou uv. procházející $O_1O_2O_3 \equiv \varrho_3$ (v celku), ježto jde všemi středy lim. homologií. Na rovině ϱ_3 a v bodě O_1 existují kollineace typu [(000)], na přímce O_1O_2 projektivnost typu [(00)]. Kollineací typu K^5 jest v prostoru ∞^{12} (∞^6 invariantních útvarů $O_1(\varrho_2\varrho_3)\varrho_3$, u každého možno uvedeným postupem sestrojiti ∞^6 bodů danému odpovídajících).

Kollineace K^8 a lim. homologie $K^{13}(O_3, \varrho_3)$ představují, po sobě applikovány, kollineaci typu K^4: [(000)0], volíme-li K^{13} tak, aby ϱ_3 šla body O_1 a O_2, O_3 aby pak ležel na ϱ_1; jest tedy K^4 produkt jedné obecné a dvou limitních homologií při určité vzájemné poloze základních útvarů. Invariantní jsou při K^4, jak z vytvoření uvedeného plyne, body O_1 a O_2, přímky O_1O_2 a O_2O_3, roviny ϱ_1 a ϱ_3 (ovšem v celku); na O_1O_2 jest projektivnost [00], na O_2O_3 projektivnost [(00)], v rovině ϱ_1 kollineace [(000)], stejně v duálním O_1, v ϱ_3 kollineace [(00)0], rovněž v duálním O_2. Spojnice bodů v K^4 sobě korrespondujících protíná inv. roviny ve dvou bodech, jež spolu s oněmi tvoří čtveřinu dvojpoměru k_1 (jenž charakterisuje obecnou homologii — složku). Kollineací typu K^4 jest možno ∞^{13} ($\infty^{3+3+2+1}$ invar. útvarů $O_1 O_2 \varrho_1 \varrho_3$, při každém dle předešlého ∞^4 konstrukcí bodů korresp.).

Produkt kollineace K^7 a elace K^{13} (O', ϱ'), volíme-li O' na přímce r, ϱ' přímkou s, jest kollineace K^3 : [(00)(00)]; i jest K^3 produktem dvojosé kollineace K^{10} (r, s) a dvou elací K^{13} (O, ϱ) a K^{13} (O', ϱ'), z nichž každá má střed na jedné invar. přímce s, resp. r, rovinu pak incendentní s druhou (r, resp. s). Samodružnými při této kollineaci jsou body O a O', přímky r, s a OO', roviny ϱ, ϱ'; na r i s existuje projektivnost [(00)], na OO však typus [00], na rovinách ϱ i ϱ' kollineace typu [(00)0], rovněž tak v prost. svazcích středů O a O'. Spojnice bodů A, D v K^3 sobě odpovídajících ať má s ϱ, ϱ' průsečíky R, R'; pak platí $(RR'AD) = k$, kde k značí dvojpoměr složky K^{10}. Existuje ∞^{13} kollineací K^3.

Konečně složením kollineace K^6 a K^{13} (O_3, ϱ_3), kde O_3 leží na $r \equiv (\varrho_1, \varrho_2)$, ϱ_3 pak jde body $O_1 O_2$ (přímkou s) vzniká typus K^2 : [(00)00]; jest to tedy produkt dvou obecných a jedné partikulární homologie při zvláštní uv. poloze invar. částí. Invariantní jsou: body O_1, O_2, O_3, přímky O_1O_2, O_3O_1, O_3O_2, r, roviny ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3; a sice jest na přímce r proj. transformace [(00)], na ostatních typus [00], na rovinách ϱ_1, ϱ_2 kollineace [(00)0], taktéž v duálních k nim svazcích O_1, O_2, kdežto na rovině ϱ_3 a v duálním svazku O_3 kollineace typu [000]. O spojnici bodů A, D korresp. v K^2 platí, že protíná ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 v bodech 1, 2, 3, s nimiž A, D tvoří dvojpoměry k_1, k_2 složek této kollineace $(31AD) = k_1$, $(32AD) = k_2$. Kollineací tohoto typu jest ∞^{14}.

Tím sestrojeny a na základě sestrojení popsány všechny typy obecných i partikulárních kollineací v S_3; obecné jako produkt nejvýše tří obecných homologií, partikulární jednak z obecných kollineací (homologie, dvojosé nebo osové kollinace) připojením nejvýše dvou limitních homologií nebo výhradně z těchto (nanejvýš tří) *).

---

*) Jest ovšem možno sestrojiti jednotlivé typy kollineací i mnohými jinými způsoby, avšak méně jednoduchými, na př. jest K^1 produkt dvou K^6 při zvláštní poloze zákl. prostorů, K^1 resp. K^6 je produkt tří resp. dvou K^{12} při obecné vzájemné poloze základních prostorů atd.

6. V *prostoru* S_4, jehož elementy buďtež na př. body, jest ovšem větší ještě rozmanitost typů kollineací.

a) Obecné kollineace. Východiskem budiž zase homologie [30], charakterisovaná invar. bodem O, základním osovým prostorem trojrozměrným π a konstantním dvojpoměrem k (kollineace K^{25}). Dvě homologie (O_1, π_1, k_1), (O_2, π_2, k_2), leží-li O_2 v π_1 a π_2 obsahuje O_1, dávají produkt [200]; neboť π_1 a π_2 protínají se v prostoru dvourozměrném, složeném z bodů samodružných; tato kollineace K^{19} má dva konst. dvojpoměry. Tři homologie (O_l, π_l, k_l), $l = 1, 2, 3$, vytvořují kollineaci [1000], připojíme-li třetí homologii ku K^{19} tak, že O_3 leží v (π_1, π_2), π_3 prochází body O_1, O_2; π_3 protíná pak (π_1, π_2) v přímce bodů dvojných; tento typus K^8 má 3 char. dvojpoměry. Konečně 4 homologie, když O_4 leží na přímce (π_1, π_2, π_3), π_4 pak jde body O_1, O_2, O_3, mají produktem nejobecnější typus kollineace K^1 : [00000] se 4 char. dvojpoměry. — Dvě homologie za uvedených podmínek, k nimž přistupuje další $k_2 = k_1$, poskytují obecný typus K^{23} : [21] s jedním konstantním dvojpoměrem. Podobně tři homologie při uv. vzájemné poloze základních prostorů za supposice, že $k_2 = k_1$ $(k_3 \neq k_1)$, tvoří typus K^{15} : [110] s dvěma konst. dvojpoměry; jest totiž přímkou invar. bodů jednak jako prve (π_1, π_2, π_3), jednak spojnice $O_1 O_2$.

b) Kollineace partikulární vznikají skládáním obecných kollineací K^{25}, K^{23}, K^{19}, K^{15}, K^8 a limitní homologie K^{26} : [(30)], kterou stručněji označíme L, nebo skládáním pouze těchto; L jest ovšem homologií se základním prostorem trojrozměrným, do něhož spadá také střed O; každý prostor S_3 bodem O (vyjma π) má kollineaci [(20)]. Poněvadž skládání děje se způsobem pro kollineace v S_3 vyloženým, stačí naznačiti počet a jakost složek. I vzniká ze 2 L typ K^{24} nebo K^{22}, ze 3 L typ K^{18} nebo K^{14}, ze 4 L typ K^7; z kollineace typu K^{25} připojením 1 L typ K^{21}, připojením 2 L typ K^{17} nebo K^{13}, připojením 3 L typ K^6; z typu K^{23} applikací 1 L typ K^{20} nebo K^{16}, applikací 2 L typ K^{11} nebo K^{12}, applikací 3 L typ K^5; z kollineace K^{19} vznikne buď K^{10} (1 L) nebo K^4 (2 L); z K^{15} povstane buď K^9 (1 L) nebo K^3 (2 L); konečně z K^8 dostaneme pomocí 1 L typus K^2.

7. *V prostoru S_n je každý obecný typus kollineace* produktem l (pro $l = 1, 2, \ldots n-1, n$) homologií $[\overline{n-1\ 0}]$. Nejobecnější typ $[000\ldots 00]$ s $n+1$ invariantními body vznikne tímto způsobem: složíme nejprve 2 homologie tak, že střed každé z obou leží v základním prostoru S_{n-1} druhé, k nim připojíme třetí homologii, položíce střed její $O^{(3)}$ do průseku S_{n-2} obou předešlých zákl. prostorů a vedouce zákl. její prostor $S^{(3)}_{n-1}$ oběma zákl. body prvých dvou homologií; tento $S^{(3)}_{n-1}$ protne dotčený průsek S_{n-2} v prostoru základním S_{n-3} atd. V dalším připojíme h. homologii tak, aby střed její $O^{(h)}$ ležel v S_{n-h+1}, průseku základních prostorů $h-1$ předchozích homologií, zákl. pak prostor její $S^{(h)}_{n-1}$ aby procházel $h-1$ zákl. body oněch; i protíná $S^{(h)}_{n-1}$ uvedený právě S_{n-h+1} v prostoru invariantních bodů S_{n-h}. Konečně applikujeme n. homologii, jejíž střed $O^{(n)}$ leží na přímce S_1, průseku $n-1$ zákl. prostorů S_{n-1}, a jejíž zákl. prostor $S^{(n)}_{n-1}$ obsahuje $n-1$ zákl. bodů $O^{(1)}, O^{(2)} \ldots O^{(n-1)}$, protínaje přímku S_1 v $\overline{n+1}$. invariantním bodě. Vedle inv. útvaru, složeného z $n+1$ bodů jednotlivě samodružných, jest kollineace tohoto typu charakterisována n konstantními dvojpoměry svých složek.

Menší počet $n-r$ homologií, uvedeným způsobem složených, dává jiné typy obecných kollineací $[r\,000\ldots 0]$ s $n-r$ body invariantními a jedním r-rozměrným prostorem bodů vesměs samodružných; tento prostor základní S_r je průsek $n-r$ zákl. prostorů S_{n-1}. Kollineace takového typu je charakterisována $n-r$ dvojpoměry. Tak dostaneme pro $r = 1, 2, 3 \ldots$ celkem $n-2$ nových typů; s původní homologií (nejjednodušší obecnou kollineací) a s nejobecnějším typem $[000\ldots 00]$ máme už n typů obecných.

K nim přistupují však další obecné typy, jež obsahují více než jeden základní prostor aspoň jednorozměrný, tedy základní prostory s $r_1, r_2, r_3 \ldots r_m$ rozměry, kde

$$m > 1 \quad \text{a} \quad r_\lambda > 0.$$

Platí ovšem

$$\sum_1^m r_\lambda \leqq n + 1 - m;$$

buďtež r tak uspořádána, že r_1 je největší. I obdržíme obecnou kollineaci typu

$$[r_1 r_2 r_3 \ldots r_m 00 \ldots 0],$$

složíme-li $n - r_1$ homologií při uvedených podmínkách, týkajících se polohy středů O a zákl. prostorů S_{n-1} složek, a volíme-li mimo to u $r_2 + 1$ z těchto homologií sobě rovné dvojpoměry

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_{r_2+1} = \varkappa_1,$$

potom u $r_3 + 1$ homologií zase týž dvojpoměr

$$k_{r_2+2} = k_{r_2+3} = \ldots = k_{r_2+r_3+2} = \varkappa_2$$

atd., konečně u $r_m + 1$ homologií opět stejný dvojpoměr $\varkappa_{m-1}$; k těmto $m - 1$ dvojpoměrovým konstantám přistupuje

$$n + 1 - m - \sum_1^m r_\lambda$$

konstant, příslušných k zbývajícím homologiím jako komponentám kollineace. Celkem tedy vykazuje takový obecný typus pouze $n - \sum_1^m r_\lambda$ různých konstant.

V prostoru S_5 na př. existuje 5 typů obecných kollineací prvního druhu, homologie totiž a produkt 2, 3, 4, 5 homologií s dvojpoměry vesměs různými; jsou to [40], [300], [2000], [10000], [000000] s 1 až 5 dvojpoměry. Dále ještě obecné typy [1100], [111], složené ze 4 homologií, z nichž dvě, resp. dvě a dvě mají týž dvojpoměr; tedy typy s 3, resp. 2 konstantami. Potom typy [210], [22] jako produkty 3 homologií, s 2, resp. 1 konstantou; a konečně [31], výslednice 2 homologií s oběma sobě rovnými konstantami.

Typy partikulárních kollineací vznikají jako produkt některé obecné kollineace (vyjma typus nejobecnější) a nejvýše $n - 1$ homologií limitních nebo jako produkt pouze limitních homologií, v počtu nejvýše n. Partikulární kollineace se základními prostory vesměs splývajícími jsou produktem výhradně limitních homologií. Počet těchto typů a počet složek jednotlivých typů $[(r_1 r_2 \ldots r_k \ldots r_z)]$ je týž jako u obecných kollineací s týmiž nesplývajícími prostory základními $[r_1 r_2 \ldots r_k \ldots r_z]$. Typus $[(00 \ldots 00)]$ na př. s $n + 1$ splývajícími body invariantními je produkt n limitních homologií takto složených: L_2 připojíme k L_1 tak, že $S_{n-1}^{(2)}$ prochází bodem $O^{(1)}$, bod $O^{(2)}$ leží však mimo $S_{n-1}^{(1)}$; k tomu L_3, vedouce $S_{n-1}^{(3)}$ body $O^{(1)}$ a $O^{(2)}$, ale $O^{(3)}$ mimo $(S_{n-1}^{(1)}, S_{n-1}^{(2)})$, atd.

Kollineace, jež má více než jeden prostor základní, tedy typu

$$[(r'_1\, r''_1\, r_1^{(3)} \ldots r_1^{(h)})\, (r'_2\, r''_2 \ldots r_2^{(l)}) \ldots \ldots$$
$$(r'_p\, r''_p \ldots r_p^{(t)})\, r_{p+1} \ldots r_z],$$

kde všechna r nejsou v jedněch kulatých závorkách, vzniká z obecného typu kollineace

$$[r_1 r_2 \ldots r_p r_{p+1} \ldots r_z];$$

při tom platí

$$r_1 = \sum_1^h r_1^{(\lambda)} + h - 1,\; r_2 = \sum_1^l r_2^{(\lambda)} + l - 1, \ldots$$
$$r_p = \sum_1^t r_p^{(\lambda)} + t - 1.$$

Počet přistupujících limitních homologií jest

$$\overline{r_1 - r'_1} + \overline{r_2 - r'_2} + \ldots + \overline{r_p - r'_p},$$

značí-li $r'_1, r'_2, \ldots r'_p$ největší čísla v jednotlivých závorkách; maximální hodnota tohoto výrazu je $n - 1$.

Příkladem buďtež uvedeny z S_5 typy [(000) (00) 0] a [(20) 1]; první je produkt obecné kollineace [210] a tří limitních homologií, z nichž jedna má střed na invar. přímce, $S_4^{(1)}$ pak skrze inv. rovinu a bod, druhá střed na inv. rovině a $S_4^{(2)}$ skrze inv. přímku a bod, třetí pak střed na přímce-průseku inv. roviny a $S_4^{(2)}$, svůj $S_4^{(3)}$ konečně má veden bodem $O^{(2)}$, inv. přímkou a bodem. Druhý typus je produkt obecné kollineace [31] a jedné limitní homologie, jejíž O leží v invar. prostoru trojrozměrném, S_4 prochází inv. přímkou, protínaje onen v rovině invar. bodů.

Vyložené vytvoření všech typů kollineací, jako produktů obecných a limitních homologií, jest výhodné pro popis typů; sledujíce transformace jednotlivých složek, určíme snadno útvary jak ve všech svých prvcích tak i v celku invariantní. Jest výhodné pro konstrukci kollineací každého typu, dovolujíc k libovolnému bodu prostoru sestrojiti postupně bod korrespondující. Jest výhodné při řešení otázek, jež týkají se grup kollineačních.

II. Grupy kollineací v S_3.

A) Grupy projektivních transformací v S_1 a kollineací v S_2.

8. Při stanovení kollineačních grup v S_3 budeme míti na zřeteli grupy v S_1 a S_2, jež proto předem stručně sestrojíme.

Všechny projektivní transformace v počtu ∞^3 v S_1 tvoří *grupu tříparametrovou*. Proj. transformace typu [00] s týmiž dvěma samodružnými body O_1 a O_2 tvoří *jednoparametrovou grupu*; přiřaďuje-li totiž bodu A jedna transformace bod B vztahem $(O_1 O_2 AB) = k_1$ tomuto druhá transformace bod C dle vztahu $(O_1 O_2 BC) = k_2$, souvisí bod C s bodem A zase proj. transformací s invariantními O_1 a O_2 a platí mimo to

$$(O_1 O_2 AC) = k_1 k_2.$$

Takových transformací (s invar. O_1, O_2) jest ∞^1 v souhlase s ∞^1 hodnot konstantního dvojpoměru k, jich kontinuitní grupa tedy o jednom parametru.

Podobně proj. transformace typu [(00)] s jedním bodem samodružným O (dvěma splývajícími) skládají *grupu jednoparametrovou*; platí-li totiž

$$\frac{1}{OB} = \frac{1}{OA} + a \text{ a dále } \frac{1}{OC} = \frac{1}{OB} + b,$$

platí také

$$\frac{1}{OC} = \frac{1}{OA} + a + b,$$

což je opět transformace [(00)] s invariantním O, konstantou její jest $a + b$. Konstanta a může nabýti ∞^1 hodnot, transformací [(00)] s týmž invar. O jest tedy ∞^1 a soustava jich kontinuitní grupa s jedním parametrem.

Existuje ještě *grupa dvouparametrová* proj. transformací [00] s jedním společným bodem samodružným O_1. Dejme tomu, že $(O_1 O_2 AB) = k_1$, $(O_1 O'_2 BC) = k_2$; v transformaci, jež je produktem obou, jest O_1 bodem invariantním a C koresponduje bodu A. Jest patrně při ní obecně ještě druhý bod invariantní O''_2 a platí $(O_1 O''_2 AC) = k$. V jakém vztahu jest toto k a O''_2 k hořejším k_1, k_2, O_2, O'_2?

Z první rovnice

$$\frac{O_1A}{O_2A} : \frac{O_1B}{O_2B} = k_1 \text{ plyne } \frac{O_2B}{O_1B} : \frac{O_2A}{O_1A} = k_1,$$

dále

$$\left(\frac{O_2O_1}{O_1B} + 1\right) : \left(\frac{O_2O_1}{O_1A} + 1\right) = k_1, \quad \frac{1}{O_1B} - k_1 \frac{1}{O_1A} = \frac{k_1 - 1}{O_2O_1},$$

podobně z druhé

$$\frac{1}{O_1C} - k_2 \frac{1}{O_1B} = \frac{k_2 - 1}{O'_2O_1},$$

z třetí

$$\frac{1}{O_1C} - k \frac{1}{O_1A} = \frac{k - 1}{O''_2O_1};$$

vyloučíme-li z prvních dvou $\frac{1}{O_1B}$, obdržíme

$$\frac{1}{O_1C} - k_1 k_2 \frac{1}{O_1A} = \frac{k_2(k_1 - 1)}{O_2O_1} + \frac{k_2 - 1}{O'_2O_1}.$$

Z této a třetí vylučme $\frac{1}{O_1C}$, vznikne

$$\frac{k - k_1 k_2}{O_1A} = \frac{k_2(k_1 - 1)}{O_2O_1} + \frac{k_2 - 1}{O'_2O_1} - \frac{k - 1}{O''_2O_1}.$$

Poněvadž bod A je zcela libovolný, je nutno, by vzorec ten byl platný identicky pro jakékoli O_1A, a tedy

$$k - k_1 k_2 = 0, \quad \frac{k_2(k_1 - 1)}{O_2O_1} + \frac{k_2 - 1}{O'_2O_1} - \frac{k - 1}{O''_2O_1} = 0.$$

Odtud vidíme, že $k = k_1 k_2$ a že

$$O''_2O_1 = \frac{(k_2 k_1 - 1) \cdot O_2O_1 \cdot O'_2O_1}{k_2(k_1 - 1) \cdot O'_2O_1 + (k_2 - 1) \cdot O_2O_1}.$$

(Pokračování.)