Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Emanuel Čubr

Poloměr setrvačnosti a centrální ellipsa

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 3 (1874), No. 3, 108--113

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123753

Poloměr setrvačnosti a centrální ellipsa.

(Podává *Em. Čubr.*)

Jestiť jednou ze základních vět mechaniky, že statický moment plochy vzhledem k libovolné ose v rovině její se nalezající rovná se součinu plochy se vzdáleností těžiska jejího od osy, jinými slovy řečeno, že stává bodu, v němž plocha soustředěna tentýž moment jeví jako jednotlivé částice ve svém souhrnu. Má-li těžisko jakkoli ohraničené plochy velikosti p vzdálenost d od jakési osy, a nazveme-li vzdálenost jednotlivých částic dp od téže osy všeobecně y, jest

$$\int dp \cdot y = p\,d,$$

kteráž rovnice jest nejhlavnějším prostředkem k určování polohy těžiska.

Namítá se otázka, zdali není též bodu, v němž plocha soustředěna jevila by tentýž moment setrvačnosti či moment stupně druhého vzhledem k jisté ose, jako jednotlivé částice její ve svém souhrnu k tétéž ose. Nazveme-li vzdálenost onoho bodu od osy r, musel by vyhověti podmínce:

$$\int dp \cdot y^2 = pr^2.$$

Veličinou r, jíž jmenujme *poloměrem setrvačnosti*, není určen jediný bod, nýbrž geometrické místo, totiž dvě přímky k ose rovnoběžné ve vzdálenosti $\pm r$. Píšem-li rovnici poslední takto:

$$\int dp \cdot y^2 = \frac{p}{2} r^2 + \frac{p}{2} r^2,$$

praví nám pak, že můžeme jednu polovinu plochy po jedné, druhou po druhé straně osy ve vzdálenosti r si mysliti. Tím zavedeme souměrnost, která zde věcí samou již předepsána jest.

Přináleží tedy ku každé ose dvě k ní rovnoběžné, ve vzdálenosti $+r$ a $-r$ se nalezající přímky.

Představme si nyní plochu, která by byla vzhledem k jisté ose souměrná, a sice ve směru k této ose kolmém.

---

srážek, při výplatě hned všechno si zadržeti a dlužníka beze všeho si k splátkám zavázati, jak učinil v známé povídce polský žid se sedlákem. A přec chodí našinci k takovému ústavu raději se dlužiti nežli k české hypoteční bance, která při vší opatrnosti (až přílišné!) jedná při půjčkách co možná ve prospěch dlužníků!

V ose souměrnosti YY' (obr: 10) nalezati se bude těžisko O tím veďme kolmici XX' k YY' kteráž nám bude představovati směr souměrnosti.

Moment setrvačnosti vzhledem k ose YY' budiž J_1, vzhledem k ose XX' pak J_2; jestiť

$$J_1 = \int dp \,.\, x^2 = a^2 p \qquad (1)$$

$$J_2 = \int dp \,.\, y^2 = b^2 p \qquad (2)$$

při čemž jsou a a b příslušné poloměry setrvačnosti. Ose YY' budou odpovídati dvě přímky rovnoběžné ve vzdálenostech $+\sqrt{\frac{J_1}{p}}, -\sqrt{\frac{J_1}{p}}$, taktéž ose XX' dvě přímky ve vzdálenostech $+\sqrt{\frac{J_2}{p}}, -\sqrt{\frac{J_2}{p}}$.

Otočíme-li osu $A'A$ těžiskem O procházející o 360°, bude každé poloze její odpovídat jistý poloměr setrvačnosti r a tudíž i dvě v této vzdálenosti ležící rovnoběžné přímky. Úlohou naší pak tu bude:

1. Vyskoumati souvislost poloměru r s poloměry již v předu určenými a a b.
2. Určiti křivku, kterou obalují všechny rovnoběžné, jednotlivým polohám osy přináležející přímky.

Moment setrvačnosti vzhledem k ose $A'A$ jest

$$J = \int dp \,.\, q^2,$$

aneb poněvadž

$$q = y \cos\alpha + x \sin\alpha,$$

$$J = \int dp\,(y\cos\alpha + x\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha \int dp\, x^2 + 2\sin\alpha\cos\alpha \int dp\, xy + \cos^2\alpha \int dp\, y^2. \qquad (3)$$

Předpokládali jsme, že plocha naše jest souměrná vzhledem k ose YY'; každému dp, jehož souřadnice jsou $+x \begin{cases} +y \\ -y \end{cases}$, přináleží jiné, jehož souřadnice jsou $-x \begin{cases} +y \\ -y \end{cases}$; z toho jde na jevo, že součiny $dp\,xy$ vespolek se ruší, že tedy

$$\int dp \,.\, xy = 0.$$

Přihlížíme-li pak ještě k rovnicím (1) a (2), dá se rovnice (3) takto psáti:

$$J = \sin^2\alpha\, J_1 + \cos^2\alpha\, J_2.$$

Poněvadž však jsou r, a a b poloměry setrvačnosti, jest

$$J = p r^2, \quad J_1 = p a^2, \quad J_2 = p b^2,$$

z čehož jde:

$$r^2 = a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha \tag{4}$$

Tím již jest první z vytknutých úloh vyřízena.

Přistupmež k otázce druhé.

Nazveme-li ξ, η, běžné souřadnice přímky MN, bude rovnice její:

$$\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha = r,$$

a dosadíme li za r hodnotu z rovnice (4),

$$\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} \tag{5}$$

Má se nyní určiti obalující křivka této přímky, při čemž jest α proměnný parametr. Rovnice (5) poněkud změněna zní

$$\xi \, tg\, \alpha + \eta = \sqrt{a^2 \, tg^2 \alpha + b^2},$$

a differencováním podle α obdržíme

$$\xi \sec^2 \alpha = \frac{a^2 \, tg\, \alpha \,.\, \sec^2 \alpha}{\sqrt{a^2 \, tg^2 \alpha + b^2}}$$

co rovnici podmínečnou, z níž plyne

$$tg^2 \alpha = \frac{b^2 \xi^2}{a^2 (a^2 - \xi^2)} \,. \tag{6}$$

Povýšením rovnice (5.) na druhou mocnost obdržíme mimo to

$$\xi^2 \sin^2 \alpha + 2 \xi \eta \sin \alpha \cos \alpha + \eta^2 \cos^2 \alpha = a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha \ldots \tag{7}$$

Pro $\sin^2 \alpha$, $\sin \alpha$, $\cos^2 \alpha$, $\cos \alpha$ dává nám rovnice (6.) následující hodnoty:

$$\sin^2 \alpha = \frac{b^2 \xi^2}{a^2 (a^2 - \xi^2) + b^2 \xi^2}; \quad \sin \alpha = \frac{b \xi}{\sqrt{a^2 (a^2 - \xi^2) + b^2 \xi^2}}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{a^2 (a^2 - \xi^2)}{a^2 (a^2 - \xi^2) + b^2 \xi^2}; \quad \cos \alpha = \frac{a \sqrt{a^2 - \xi^2}}{\sqrt{a^2 (a^2 - \xi^2) + b^2 \xi^2}}$$

Substistucí těchto hodnot a řádným skrácením promění se rovnice (7.) v následující:

$$b^2 \xi^4 + 2 a b \xi^2 \eta \sqrt{a^2 - \xi^2} + a^2 \eta^2 (a^2 - \xi^2) = a^4 b^2.$$

Rovnice tato jest vzhledem k výrazu $\sqrt{a^2 - \xi^2}$ smíšeně kvadratická, a řešíme-li ji, obdržíme

$$\sqrt{a^2 - \xi^2} = \frac{-b \xi^2 + a^2 b}{a \eta} \,.$$

Dvojsmyslnost však zde odpadá, neboť musí býti výraz $\sqrt{a^2 - \xi^2}$ positivním; jest tedy

$$\sqrt{a^2 - \xi^2} = b \frac{a^2 - \xi^2}{a\eta},$$

z čehož plyne

$$a^2\eta^2 + b^2\xi^2 = a^2 b^2.$$

Obalující křivka, o niž se nám jednalo, jest tedy *ellipsou*, osy $2a$ a $2b$ a střed v těžisku plochy mající. Ellipsa tato nazvána *ellipsou centrální.*

Poskytujeť ona nemalé výhody. Má-li se k. p. konstruktivním spůsobem určiti moment setrvačnosti plochy, která má vlastnosti z předu uvedené, vzhledem k ose libovolné těžiskem procházející, sestrojmež ellipsu centrální, k této tečnu k ose dané rovnoběžnou; druhá mocnost vzdálenosti této tečny od středu plochou násobená dá nám žádaný moment.

Při početném řešení této úlohy musí se určiti rovnice oné tečny rovnoběžné k ose a vzdálenost její od středu spůsobem analytickým.

K lepšímu objasnění buďtež zde určeny a sestrojeny centrální ellipsy některých jednoduchých tvarů.

1. *Obdélník* (ob. 11) výšky m a šířky n. Při tomto jest

$$J_1 = \frac{1}{12} m n^3$$

$$J_2 = \frac{1}{12} m^3 n$$

$$p = mn;$$

poloosy ellipsy jsou tedy:

$$a = \sqrt{\frac{J_1}{p}} = n\sqrt{\frac{1}{12}} = 0.288674\,n$$

$$b = \sqrt{\frac{J_2}{p}} = m\sqrt{\frac{1}{12}} = 0.288674\,m.$$

Sestrojení, jak jest v obrazci provedeno, dá se snadno odůvodniti.

Při čtverci (ob. 12), jehož strana s, přechází ellipsa v kruh poloměru

$$r = s\sqrt{\frac{1}{12}} = 0.288674\,s.$$

2. *Trojúhelník* rovnoramenný (ob. 33.), jehož základna g a výška h.

Zde jest
$$J_1 = \frac{1}{48} g^3 h$$
$$J_2 = \frac{1}{36} g h^2$$
$$p = \frac{1}{36} g h$$

tudíž
$$a = \sqrt{\frac{J_1}{p}} = g \sqrt{\frac{1}{24}} = 0.204123\, g$$
$$b = \sqrt{\frac{J_2}{p}} = h \sqrt{\frac{1}{18}} = 0.235701\, h.$$

3. *Kruh* (ob. 14). Patrno, že zde opět přejde ellipsa centrální v kruh.

Jest zde
$$J_1 = J_2 = \frac{\pi}{4} r^4,$$
$$p = \pi r^2,$$

poloměr kruhu centrálního tedy
$$\varrho = \sqrt{\frac{J_1}{p}} = \sqrt{\frac{J_2}{p}} = \frac{1}{2} r.$$

4. *Ellipsa* (ob. 15.), jejíž osy jsou $2\,\alpha$ a $2\,\beta$.

Pro ellipsu jest:
$$J_1 = \frac{\pi}{4} \alpha^3 \beta$$
$$J_2 = \frac{\pi}{4} \alpha \beta^3$$
$$p = \pi \alpha \beta,$$

tudíž
$$a = \sqrt{\frac{J_1}{p}} = \frac{1}{2} \alpha$$
$$b = \sqrt{\frac{J_2}{p}} = \frac{1}{2} \beta.$$

5. *Úseč parabolická*, (ob. 16) jejíž rozměry jsou h a $2\,g$.

V tomto případě jest:
$$J_1 = \frac{4}{15} g^3 h$$

$$J_2 = \frac{16}{175} g h^3$$

$$p = \frac{4}{3} g h$$

tedy:

$$a = \sqrt{\frac{J_1}{p}} = g \sqrt{\frac{1}{5}} = 0.447213 \, g$$

$$b = \sqrt{\frac{J_2}{p}} = h \sqrt{\frac{12}{175}} = 0.261861 \, h.\text{*)}$$

O rovinných racionálních křivkách třetího stupně.

(Podává Dr. *Emil Weyr.)*

(Pokračování.)

Podmínku, kterou jsme pro tři na téže přímce ležící body racionální křivky třetího stupně na analytickém základě byli vyvinuli, může se též ryze geometricky odůvodniti a to spůsobem následujícím. Budiž C_3 (obr. 17.) naše křivka a δ jejím bodem dvojným. Na křivce vytkněme sobě libovolný bod v co vrchol svazku paprskového. Každý paprsek X tohoto svazku protne křivku ještě v dalších dvou bodech x_1, x_2, poněvadž křivka naše co čára 3. stupně s každou přímkou tři společné body míti *musí*. Body x_1 x_2 určují s bodem δ dva paprsky $\delta\bar{x}_1$, δx_2 aneb kratčeji X_1, X_2. Naopak protíná každý, bodem δ procházející paprsek X_1 křivku C_3 jen ještě v jediném bodě x, který s bodem v úplně určuje paprsek $v\bar{x}_1$ neb X. Takto odpovídá každému paprsku (jako X_1) svazku δ jen jediný paprsek (X) svazku v, ale naopak každému paprsku (X) svazku v odpovídají dva paprsky *(X_1 X_2)* svazku δ. Dva takové paprsky

---

*) Srovnej: Die graphische Statik von K. Culmann". §§. 61. a 69.
Dále: „Handbuch der rationellen und technischen Mechanik von G. Decher". Díl druhý, §§. 421 - 425.