Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Důležitost paraboly.

Pro žáky středních škol sestavil

Dr. Fr. Hejzlar,

c. k. zemský šk. inspektor v Praze.

Obšírnější analytická geometrie v rovině jedná o křivkách dvojího druhu: 1. o *kuželosečkách* čili o křivkách *stupně druhého* a 2. o křivkách *stupně vyššího.*

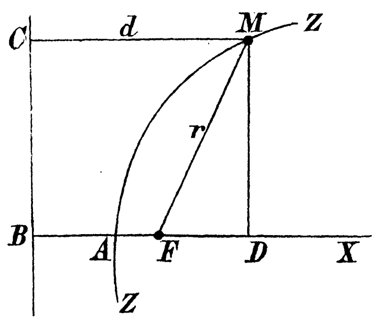
Bez některých z nich nemůže se ani mathematika ani fysika nikterak obejíti buď proto, že se oběma prospěšně k příkladům hodí a řešení mnohých problémů usnadňují, aneb za tou příčinou, že udávají zcela určitě značný počet zákonů, jimiž se úkazy přírodní řídí.

Budiž zde zatím důležitost paraboly zvláště ve fysice způsobem elementárním zevrubněji vylíčena.

I. *Rovnice křivky.* Kuželosečkou slove geometrické místo bodu, jehož vzdálenosti od jisté pevné přímky — *přímkou řídící* zvané — a od jistého bodu pevného — *ohnisko* řečeného — jsou v stálém poměru

$$m : n \text{ čili } 1 : \frac{n}{m} \text{ neb } 1 : \varepsilon .$$

Je-li ohnisko F (obr. 1.) pólem souřadnic polárných, přímka



Obr. 1.

BX na řídicí CB kolmo stojící osou, úhel φ odchylkou bodu M kuželosečce ZZ příslušného, $FM = r$ průvodičem a $CM = d$ vzdáleností bodu M od přímky řídicí, bude

$$d = \delta + h + r \cos \varphi, \qquad (1)$$

kde $\delta = BA$ a $h = AF$; že však

$$d : r = 1 : \varepsilon \text{ čili } d = \frac{r}{\varepsilon}$$

a podobně

$$\delta : h = 1 : \varepsilon \text{ čili } \delta = \frac{h}{\varepsilon},$$

obdržíme dosadivše tyto hodnoty za d i δ do výrazu (1)

$$r = (1 + \varepsilon)\, h + \varepsilon r \cos \varphi$$

aneb zavedeme-li označení $(1 + \varepsilon)\, h = p$,

$$r = p + \varepsilon r \cos \varphi. \qquad (2)$$

Užijme nyní souřadnic pravoúhlých zvolivše si přímku BX za osu x-ovou a průsečný bod A za počátek; i lze pak psáti

$$x - h = r \cos \varphi,$$

čímž rovnice (2) nabude tvaru

$$r = p + \varepsilon(x - h).$$

Zároveň vysvítá z obrazce, že také

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + y^2},$$

kteráž rovnice s předešlou byvši spojena dá obecnou rovnici kuželoseček*)

$$(x - h)^2 + y^2 = [p + \varepsilon (x - h)]^2 \qquad (3)$$

Zde dlužno rozeznávati případy tři:

---

*) $2p$ slovou *parametr* kuželoseček; je-li ve výrazu (2)

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ bude } r = p.$$

1. Položíme-li $\varepsilon = 1$, zjednáme si *parabolu*,
2. „ $\varepsilon < 1$, „ „ *ellipsu* a
3. „ $\varepsilon > 1$, „ „ *hyperbolu*.

Majíce zření toliko k parabole dosadíme do obecné rovnice (3) $\varepsilon = 1$ a obdržíme

$$(x - h)^2 + y^2 = [p + x - h]^2.$$

Odtud plyne, uvážíme-li u sebe, že nyní $p = 2h$, konečně rovnice paraboly

$$y^2 = 2px. \tag{4}$$

II. *Důležitost křivky.* α) Za doby Platonovy zanášela se geometrie především dvěma pamětihodnými problémy: *a*) Jak lze daný úhel na tři rovné díly rozděliti; *b*) jak se kostka zdvojnásobí t. j. jak se z dané strany kostkové vyhledá strana jiné kostky, kteréž krychlový obsah rovná se dvojnásobnému krychlovému obsahu první kostky. *) Druhou úlohu — problém *délský* **) rozřešil *Menaechmos*, vrstevník Platonův, průsekem dvou parabol.

Řešíce analyticky mějme y i x za strany dvojnásobné a dané kostky***); i musí dle úlohy

$$y^3 = 2x^3. \tag{5}$$

Tuto rovnici lze pokládati za součin dvou rovnic:

$$\begin{aligned} y^2 &= 2x \\ y &= x^2, \end{aligned} \tag{6}$$

jimiž vyznačeny jsou dvě paraboly (obr. 2.) s osami k sobě kolmými a s parametry

---

*) *Plato* (nar. r. 429 v Athénách, zemř r. 348 př. K.) podal rozřešení obou těchto úloh dle návodu, jenž od něho samého byv objeven *synthetický* nazván jest, ač by vlastně *analytický* slouti měl. Mimo to sluší podotknouti, že *Plato* *a*) pojem míst geometrických ustanovil, *b*) kuželosečky objevil a předmětem badání učinil (před ním zabývali se jen s dvěma místy geometrickými: s přímkou a kružnicí) a *c*) první byl, jenž určování krychlového obsahu učil.

**) Jméno toto vzalo původ svůj z pověsti, že prý Apollo *délský* žádal kdys zdvojnásobení svého kostkového oltáře.

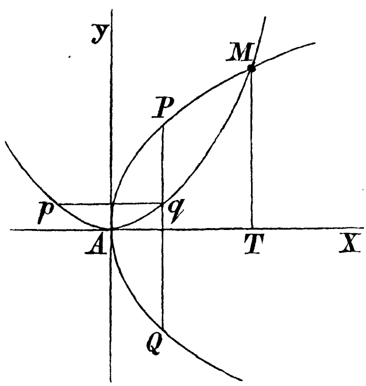
***) Viz *Vieth* „Die Lehren der vollständigen, reinen Mathematik“, z kteréhož díla i případ β) vyňat jest.

$$PQ = 2$$
$$pq = 1 .$$

Pokud se průsečného bodu M týče, můžeme obě rovnice (6) na př. násobením sloučiti nabývajíce rovnice (5) čili

$$\overline{MT}^3 = 2\overline{AT}^3.$$

Jest na jevě, že MT udává stranu dvojnásobné, udává-li AT stranu původní kostky.



Obr. 2.

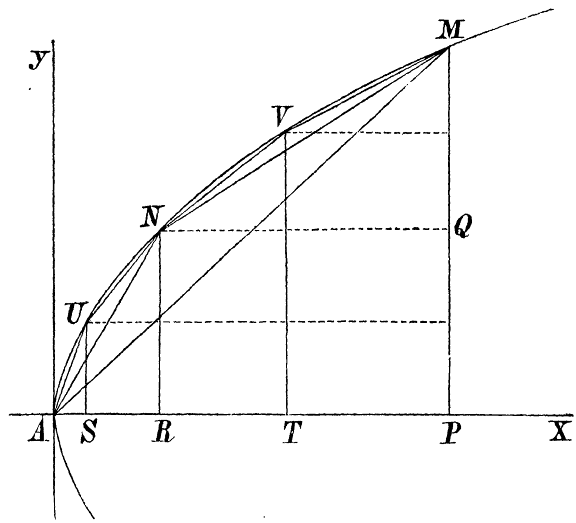
β) Parabola vyniká dále tou znamenitou od *Archimeda* *) objevenou vlastností, že se její plocha *úplně* určiti dá. **) Poněvadž se stanoviska historického zajímavo i důležito jest věděti, jak důmyslně onen velduch starého věku i v tomto případě pracoval, budiž tu jeho důkaz uvedené vlastnosti aspoň stručně naznačen.

---

*) Nar. r. 287 v Syrakusách, zemř. tamže r. 212 př. K. Jako mathematik získal si neocenitelnou zásluhu tím, co v tomto časopise roč. III. str. 50. pozn. 1. již napsáno bylo.

**) *Kvadraturou* čili stanovením plochy, která mezi křivkou, osou x-ovou a dvěma pořadnicemi v osnově pravoúhlých souřadnic se rozprostírá, obírali se již v starém věku mužové slavní (zvláště sluší jmenovati *Dinostrata*, žáka Platonova, a *Archimeda*); parabola pak byla *první* křivka, jíž kvadratura se úplně podařila. Tuto vlastnost mají jen některé křivky rovinné do sebe; plocha kruhu (πr^2) na př. nebo ellipsy (πab) dá se toliko přibližně určiti, poněvadž poměr π obvodu kruhového ku průměru má pouze přibližnou hodnotu číselnou.

1. Má-li bod M (obr. 3.) souřadnice $x = AP$, $y = MP$, jest plocha trojúhelníka $AMP = \frac{1}{2}xy$.



Obr. 3.

Rozpolme MP v bodě Q, veďme QN || PA a spojme přímkami bod N s body A i M; pořadnice $NR = \frac{1}{2}y$ a úsečka AR ustanoví se se zřetelem ku (4) z relace

$$(\tfrac{1}{2}y)^2 = 2p \,.\, AR, \text{ totiž } AR = \tfrac{1}{4}x.$$

Odtud patrno, žn plocha

$$\triangle ANR = \tfrac{1}{16}xy$$

a plocha

$$RNMP = (NR + MP)\frac{RP}{2} = \tfrac{3}{2}y\frac{x - \frac{1}{4}x}{2} = \frac{9}{16}xy;$$

pročež

$$\triangle AMN = ANR + RNMP - AMP = \frac{1}{8}xy = \frac{1}{2 \,.\, 4}xy.$$

2. Jestliže MP na čtyři rovné díly rozdělíme, vzniknou týmž jako prvé sestrojením dva nové trojúhelníky vepsané a to: $\triangle ANU$ i $\triangle NMV$, jichž ploské obsahy vyhledati dlužno.

Poněvadž

$$US = \tfrac{1}{4}y, \quad VT = \tfrac{3}{4}y,$$

zjednáme si z rovnic

$$(\tfrac{1}{4}y)^2 = 2p \,.\, AS, \quad (\tfrac{3}{4}y)^2 = 2p \,.\, AT$$

úsečky

$$AS = \tfrac{1}{16}x, \quad AT = \tfrac{9}{16}x,$$

z čehož zase plyne

$$\begin{aligned} SR &= AR - AS = \tfrac{3}{16}x \\ RT &= AT - AR = \tfrac{5}{16}x \\ TP &= AP - AT = \tfrac{7}{16}x \,. \end{aligned}$$

Nyní snadno jest určiti součet ploch obou nových trojúhelníků, neboť

$$\begin{aligned} ANU + NMV = AUS + SUNR + RNVT + TVMP \\ - (AMP + AMN) \end{aligned}$$

čili

$$\begin{aligned} ANU + NMV &= \frac{1}{2\,.\,4^3}xy + \frac{9}{2\,.\,4^3}xy + \frac{25}{2\,.\,4^3}xy + \frac{49}{2\,.\,4^3}xy \\ &- \frac{80}{2\,.\,4^3}xy = \frac{4}{2\,.\,4^3}xy = \frac{1}{2\,.\,4^2}xy \,. \end{aligned}$$

3. Rozdělivše MP na osm rovných dílů, obdržíme čtyři vepsané trojúhelníky, jichž plochy dohromady $= \frac{1}{2\,.\,4^3}xy$ a myslíme-li si, že se tímto způsobem až do nekonečna pokračovalo, splynou strany trojúhelníků s parabolou, jejíž plocha AMP obloukem AM a souřadnicemi AP i MP omezená posléze vyjádřena bude nekonečnou sestupnou řadou

$$AMP = \tfrac{1}{2}xy\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right)$$

nebo, sečteme-li dle vzorce

$$s = \frac{a}{1-q}, \quad AMP = \tfrac{1}{2}xy \,.\, \frac{4}{3} = \frac{2}{3}\,xy.$$

γ) Dráha (trajektorie, průhodnice), kterou těleso ve vzduchoprázdném prostoru buď vodorovně nebo šikmo vržené vykoná, jest parabola.

1. Budiž začátečný bod pohybu počátkem souřadnic pravoúhlých, c rychlost, kterou tělo ve směru vodorovném vrženo jest, y pak dráha v témž směru a x dráha svisno vykonaná — obě ve stejné době t — i jest, jakož známo,

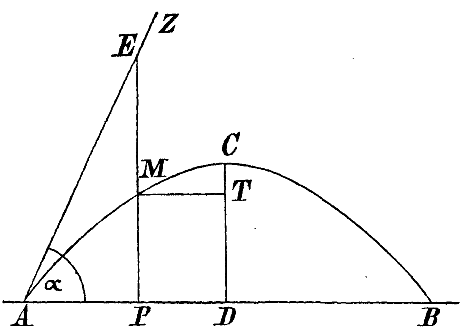
$$y = ct$$
$$x = \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Chtíce určiti relaci mezi x a y pro každou dobu, vyloučíme z těchto dvou rovnic t a nabudeme

$$y^2 = \frac{2c^2}{g}x,$$

což jest vrcholová rovnice paraboly, jejíž parametr $2p = \dfrac{2c^2}{g}$.

2. Tělo vržené rychlostí c šikmým směrem Z (obr. 4.), který s vodorovnou přímkou AB úhel α svírá, urazilo by v době



Obr. 4.

t dráhu $AE = ct$, kdyby současně silou těžnou o $EM = \tfrac{1}{2}gt^2$ dolů staženo nebylo. Souřadnice bodu M budou tudíž

$$x = AP = ct \,.\, \cos\alpha$$
$$y = MP = EP - EM = ct \,.\, \sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Vymýtíme-li t najdeme.*)

$$y = x\,tg\alpha - \frac{g}{2c^2\cos^2\alpha}x^2, \qquad (7)$$

*) Viz Dastichův „*Krok*" svaz. II. článek od Dra *F. J. Studničky* sepsaný str. 204. („Grafické znázornění zákonů vrhu v prázdném prostoru").

kde $tg\alpha = \mathrm{A}$ a $\frac{g}{2c^2\cos^2\alpha} = \mathrm{B}$ jsou veličiny stálé dávajíce rovnici parabole příslušnou

$$y = \mathrm{A}x - \mathrm{B}x^2,$$

kterou lze proměniti v rovnici vrcholovou takto:

Z pravoúhlé osnovy, jejíž počátkem jest vrchol dráhy C, osou x-ovou výška $\mathrm{CD} = \frac{c^2\sin^2\alpha}{2g}$ a y-ovou dálka vrhu $\mathrm{AB} = \frac{c^2 \,.\, \sin 2\alpha}{g}$, vychází na jevo, že

$$x = \mathrm{AD} - \eta = \frac{c^2 \,.\, \sin 2\alpha}{2g} - \eta$$

$$y = \mathrm{CD} - \xi = \frac{c^2 \,.\, \sin^2\alpha}{2g} - \xi,$$

značí-li $\eta = \mathrm{MT}$ a $\xi = \mathrm{CT}$ souřadnice bodu M v nové osnově.

Tyto hodnoty udělí rovnici (7) tvaru

$$\frac{c^2\sin^2\alpha}{2g} - \xi = \left(\frac{c^2 \,.\, \sin 2\alpha}{2g} - \eta\right) tg\alpha - \frac{g}{2c^2\cos^2\alpha}\left(\frac{c^2 \,.\, \sin 2\alpha}{2g} - \eta\right)^2$$

neb pomocí vzorce $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$

$$\frac{c^2\sin^2\alpha}{2g} - \xi - \left(\frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} - \eta\right)\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{g}{2c^2\cos^2\alpha}\left(\frac{c^2 \,.\, \sin\alpha\cos\alpha}{g} - \eta\right)^2.$$

Vykonáme-li, co naznačeno, zjednáme si

$$\frac{c^2\sin^2\alpha}{2\,g} - \xi = \frac{c^2\sin^2\alpha}{g} - \eta\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{c^2\sin^2\alpha}{2g} + \eta\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{g}{2c^2\cos^2\alpha}\,\eta^2,$$

z toho opět

$$\xi = \frac{g}{2c^2\cos^2\alpha}\,\eta^2$$

čili

$$\eta^2 = \frac{2c^2\cos^2\alpha}{g} \,.\, \xi$$

t. j. těleso šikmo vržené vykoná dráhu parabolickou o parametru *)

$$2p = \frac{2c^2 . \cos^2\alpha}{g}.$$

δ) Nauka o výtoku kapalin učí nás témuž zákonu. Kapalina z nádoby pobočním otvorem vytékající opisuje také parabolu. Působíť zde, nepřihlížíme-li ku odporu vzduchu, jako na tělo vržené síly dvě: jedna z nich jest okamžitá — tlak kapaliny nad otvorem — druhá pak stálá — tíže.

Dle theoremu *Torricelli-ova* r. 1643 vysloveného, lze rychlost výtoku vyjádřiti výrazem

$$v = \sqrt{2g . h},$$

v němž h značí výšku tlačícího sloupce.

Je-li počátek pravoúhlých souřadnic na konci otvoru a osa x-ová směr svisný, určí se pořadnice jakéhokoliv bodu proudem opsané dráhy stejninou

$$y = vt = t\sqrt{2gh}$$

a úsečka $$x = \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Vyloučivše z obou rovnic čas t nabudeme

$$y^2 = 4h . x,$$

rovnice to paraboly, kteréž parametr

$$2p = 4h.$$

ε) Obraťme nyní pozorování své k jinému neméně zajímavému úkazu jevícímu se, když se válcovitá nádoba s vodou kolem svisné osy své otáčí.

1. Dříve však nutno předeslati následující krátkou úvahu: Opíše-li tělo a (obr. 5.), které se kolem pevného bodu o stejnoměrně a rychlostí v na obvodě kruhu (poloměr $= r$) pohybuje za čas t oblouk β, jehož úhel středový jest φ, možno psáti

*) Odporem vzduchu se i vodorovná i svisná rychlost zmenšuje, ona však značněji než tato. Za tou příčinou převládá složka svisná v druhé polovičce CB a trajektorie není více parabolou, nýbrž křivkou zvanou *ballistickou*, jejíž první část AC delší jest než druhá. Viz *Kunzek's* „Studien aus der höheren Physik", pag. 239.

$$\beta = r\varphi$$

a mimo to

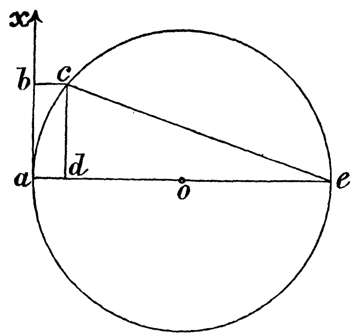
$$\beta = vt,$$

z čehož plyne

$$v = \frac{\beta}{t} = \frac{r\varphi}{t}.$$

Poměr $\frac{\varphi}{t}$ slove *rychlost úhlová* a značí se písmenem ω, pročež

$$v = r \, . \, \omega.$$



Obr. 5.

Kdyby síly dostředivé nebylo, pohybovalo by se těleso a směrem tečné ax a vykonalo by za kratičkou dobu τ dráhu

$$ab = v\tau = r\omega \, . \, \tau,$$

která se ale za příčinou stále působící síly dostředivé, jejíž zrychlenost budiž f, v oblouček ac proměniti musí.*)

Patrno, že

$$ad = \tfrac{1}{2} f \tau^2, \tag{8}$$

z $\triangle ace$ pak

$$dc^2 = ad\,(2r - ad)$$

nebo, vynecháme-li ad^2,

$$dc^2 = ad \, . \, 2r$$

a posléze

---

*) Oblouček ac lze za přímku považovati, poněvadž τ jest doba velmi krátká.

$$ad = \frac{dc^2}{2r} = \frac{ab^2}{2r} = \frac{r^2\omega^2\tau^2}{2r} = \frac{r\omega^2\tau^2}{2}. \qquad (9)$$

Spojením výrazův (8) a (9) zjednáme si

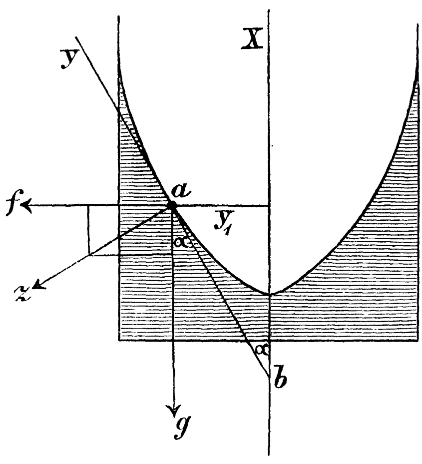
$$\tfrac{1}{2}f\tau^2 = \frac{r\omega^2\tau^2}{2}$$

čili

$$f = r \,.\, \omega^2. \qquad (10)$$

Má-li a hmotnost $m = 1$, určuje vzorec (10) přímo velikost síly dostředivé. Ježto se síla odstředivá rovná dostředivé, jest spolu f velikost odstředivosti. *)

2. V dotčeué nádobě válcovité (obr. 6.) bude kapalina otáčením kolem osy bx uprostřed klesati, po stranách pak vy-



Obr. 6.

stupovati a povrch přijme na se tvar, jenž se v průřezu co parabola jeví. Na kapalnou částečku a, kteréž hmotnost $m = 1$, působí síla odstředivá f a tíže g; tangenta by svírá s osou úhel α. Vznikne-li co do pohybu vzhůru i dolů rovnováha, musí směr az výslednice na povrchu státi kolmo a z té příčiny

*) Zhusta počítá se dle vzorce $f = \frac{4r\pi^2}{t^2}$ z doby oběžné t vyvinutého.

$$f : g = \cos\alpha : \sin\alpha$$

čili

$$tg\alpha = \frac{g}{f}.$$

Poněvadž zde

$$f = y_1 \omega,$$

jest směrnice naší tangenty

$$tg\alpha = \frac{g}{y_1 \omega^2}.$$

Tento tvar má však jen směrnice tangenty k parabole vedené;*) pročež leží částečka a na parabole o parametru**)

$$2p = \frac{2g}{\omega^2}.$$

ξ) Že tangenta kteréhokoliv bodu paraboly s průvodičem a osou (tudíž také s přímkou vedenou dotýčným bodem rovnoběžně s osou) rovné úhly činí, jest věta vůbec známá.

Proto paprsky zvuku nebo světla i tepla s osou rovnoběžně ku stěně parabolické postupující po odrazu v ohnisku se sbíhají a naopak paprsky z ohniska vyšedší směrem rovnoběžným k ose se odrážejí. Odtud zase jest, že paprsky povstalé v ohnisku jedné setkati se musí v ohnisku druhé nádoby parabolické, jestliže obě společnou osu mají.

Na těchto pravdách zakládá se užívání zrcadel parabolických ku zapalování předmětů zápalných, k osvětlování na světlárnách (majácích), při drobnohledech a dalekohledech (dalekohled Foucaultův), tolikéž při rozličných svítilnách (svítilně kouzelné, clonicí atd.). Klenba parabolická odráží vlny zvukové, mluví-li se v ohnisku jejím, přímo k posluchačům.

---

*) Rovnice této tangenty zní: $y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$ a směrnice $tg\alpha = \frac{p}{y_1}$.

**) Viz Dr. *Alb. Mousson* „Die Physik auf Grundlage der Erfahrung."