Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

O integraci rovnic mezi třemi úplnými differenciály

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 1, 18--23

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123741

$$\lim p_n = a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3 a_4 + \ldots,$$

anebo ve formě symbolické

$$\lim_{n=\infty} p_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots}{a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3} \ldots} = \infty, \tag{6}$$

z čehož zřejmě jde na jevo, že součet této řady nekonečné jest hodnoty nekonečné.

O integraci rovnic mezi třemi úplnými differenciály.

Napsal

M. Lerch,

docent vysoké školy technické v Praze.

Učebné knihy počtu integrálního mnohdy vykládají integraci rovnice

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

aniž při tom užívají t. zv. integrační podmínky, jež k existenci integrálu jest nutna.

Účelem těchto řádků jest elementární výklad a odůvodnění methody k integraci této rovnice, výklad určený hlavně pro posluchače naší vysoké školy technické.

Pokusme se ustanoviti funkci z dvou proměnných x a y tak, aby úplný její differenciál dz hověl rovnici

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0, \tag{1}$$

kde P, Q, R jsou dané výrazy obsahující x, y, z.

Rovnici (1) považovati dlužno za zkrácené vyjádření požadavku

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{P}{R}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Q}{R};$$

má-li tedy funkce existovati, musí

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y},$$

t. j.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{R}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{R}\right).$$

Rozvineme-li obě strany této rovnice, majíce zřetel k okolnosti, že z je funkcí x a y, obdržíme:

$$R\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)-P\left(\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$=R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)-Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

aneb vzhledem k uvedeným hodnotám $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\left(R\frac{\partial P}{\partial y}-Q\frac{\partial P}{\partial z}\right)-P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{Q}{R}\frac{\partial R}{\partial z}\right)$$
$$=\left(R\frac{\partial Q}{\partial x}-P\frac{\partial Q}{\partial z}\right)-Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{P}{R}\frac{\partial R}{\partial z}\right),$$

z čehož plyne po krátké redukci:

$$(2)\quad P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0.$$

Rovnice tato je *nutnou* pro možnosť řešení; třeba však ukázati, že je též *dostatečnou.*

Rovnici (1) lze nahraditi rovnicí

$$P_1\,dx+Q_1\,dy+R_1dz=0,$$

kde $P_1=MP$, $Q_1=MQ$, $R_1=MR$; z toho soudíme, že musí býti též splněna rovnice vzniklší z (2) substitucí P_1 Q_1 R_1 za P, Q, R

Skutečně máme

$$\frac{\partial R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z}=M\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\left(R\frac{\partial M}{\partial y}-Q\frac{\partial M}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x}=M\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\left(P\frac{\partial M}{\partial z}-R\frac{\partial M}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}=M\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)+\left(Q\frac{\partial M}{\partial x}-P\frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

a odtud identitu:

$$P_1\left(\frac{\partial R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)+Q_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)+R_1\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)$$
$$=M^2\left[P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right],$$

kterážto většina jest dle (2) rovna nulle, c. b. d.

Nyní tvrdíme, že lze funkci M vždy tak ustanoviti, aby veličiny P_1, Q_1 byly derivacemi tétéž funkce $f(x, y, z)$ podle x a y, t. j.

$$P_1=\frac{\partial f}{\partial x},\quad Q_1=\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Za tím účelem integrujeme *obyčejnou* rovnici differencialnou

$$Pdx+Qdy=0,$$

v níž z je stálým parametrem. Obecné řešení této rovnice budiž

$$f(x, y\, z)=C,$$

kde $f(x, y, z,$ jest určitý výraz a C značí integrační stálou. Bude nak nutně existovati t. zv. integrační činitel M, tak aby platily rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial x}=MP,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=MQ.$$

Tím jest existence funkce M dokázána.

Úplný defferenciál funkce f má hodnotu

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=P_1dx+Q_1dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

a tedy bude

$$P_1dx+Q_1dy=df-\frac{\partial f}{\partial z}dz;$$

následkem toho lze rovnici (1) uvésti na tvar

$$(1a) \qquad df + \left(R_1 - \frac{\partial f}{\partial z}\right) dz = 0,$$

kde $R_1 = MR$, načež podmínka (2) obdrží tvar:

$$(2a) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial R_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) = 0.$$

Problém integrace rovnice (1) jest úplně rovnomocný s úkolem řešení rovnice (1a). Tento chceme provésti.

Rovnice (1a) má tu výhodu, že obsahuje toliko dva differenciály: df a dz; dá se očekávati, že přejde v obyčejnou rovnici differencialnou, zavedeme-li do počtu místo proměnné x veličinu Z, která s ní souvisí rovnicí

$$(3) \qquad f(x, y, z) = Z;$$

považujme tedy x za funkci veličin y, z, Z, neodvisle proměnných, definovanou rovnicí (3). Úkolem naším bude ustanoviti funkci z dvou proměnných y, Z tak, aby platila differencialná rovnice (1a), v níž dlužno x nahraditi právě stanovenou hodnotou, funkcí to liter y, z, Z. Rovnice (1a) obdrží tímto způsobem tvar:

$$(4) \qquad dZ + \Phi(y, z, Z)\, dz = 0,$$

kde

$$\Phi(y, x, Z) = R_1 - \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Tvrdíme, že litera y se ve funkci Φ nevyskytne. Uvažme za tím účelem, že pravá strana obsahuje y a x, ale že x jest funkce veličin y, z, Z definovaná rovnicí (3); bude pak částečná derivace $\frac{\partial x}{\partial y}$ dána rovnicí

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Počítejme nyní derivaci

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left(\frac{\partial R_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial y} + \left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right);$$

vložíme-li sem za $\frac{\partial x}{\partial y}$ hodnotu vypočtenou z předposlední rovnice, máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial R_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)}{\frac{\partial f}{\partial x}},$$

kterýžto výraz je dle podmínky (2a) *nullou.*

Máme tedy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0,$$

čímž dokázáno, že Φ nezávisí na y. Rovnice (4) je tedy tvaru

$$dZ + \Phi(z, Z)\, dz = 0 \tag{4*}$$

a bude jí definováno z jakožto funkce jen jedné proměnné Z, ana litera y z počtu eo ipso odpadla. Integrací rovnice (4*) pak obdržíme relaci mezi z, Z a integrační stálou C, kteréžto relaci lze uděliti tvar

$$Z = F(z, C). \tag{5}$$

Výsledek náš lze takto vysloviti:

Je-li z funkce proměnných x, y hovící differencialné rovnici (1), lze ji definovati jakožto funkci jediné proměnné Z, a sice pomocí rovnice (5), kde Z je veličina závislá na x, y, z způsobem udaným rovnicí (3).

Jinými slovy, pro hledanou funkci musí obstáti rovnice tvaru:

$$f(x, y, z) = F(z, C), \tag{6}$$

kde C jest konstanta.

Rovnice (6) *podává nejobecnější řešení differencialné rovnice* (1); zbývá ukázati, že jí hoví pro všecky hodnoty stálé C.

Tu stačí ukázati, že (6) se snáší s diff. rovnicí (1a); skutečně máme z (6)

$$df = dF(z, C);$$

ze (4*) pak plyne

$$dF(z, C) = dZ = -\Phi(z, Z)\, dz,$$

aneb, jelikož

$$\Phi\,(z, Z) = R_1 - \frac{\partial f}{\partial z},$$

posléze

$$dF(z, C) = \left(-R_1 + \frac{\partial f}{\partial z}\right) dz;$$

máme tedy

$$df = \left(-R_1 + \frac{\partial f}{\partial z}\right) dz,$$

což jest právě rovnice (1a).

O odchylce směru tížnice.

Píše

dr. V. Láska.

O geofysice psáno v naší literatuře poskrovnu, a předce poukazují novější badání zřejměji den ode dne na tuto nejmladší větev věd přírodních. Předsevzali jsme si tedy seznámiti čtenáře s výsledky a methodami této vědy. Pro tentokráte chceme promluviti o *odchylce směru tížnice.* Zjev ten má velikou důležitost jak v geodésii, tak v geologii. Za stručností odvodíme předem potřebné jednoduché mathematické vzorce.

Postačí nám úplně, myslíme-li si, že země jest koulí s poloměrem R a s hutností H. Síla, kterou země na zevnější bod působí, jest identická se silou, kterou by na tento bod působilo těžiště země, kdyby celá hmota v těžišti byla obsažena.

Potencial P vzhledem k bodu, ležícímu ve vzdálenosti D od povrchu země, bude:

$$P = k^2 \frac{M}{R + D}. \tag{1}$$

Od síly odstředivé abstrahujeme.

Předpokládejme, že v zeměkouli nalézá se excentricky položená hmota m. Tuto nazveme $+$ neb $-$, je-li její hutnost $\gtrless$ než hutnost země nebo hutnost okolních hmot. Vzdálenost