František Koláček
O attrakci ellipsoidů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 1, 1--15

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123739

O attrakci ellipsoidů.

Píše

Dr. Fr. Koláček.

Následující stať obsahuje stručné řešení *dvou*, pro mathematickou fysiku důležitých úloh. Prvá z nich týká se uspořádání elektrické hmoty na povrchu kovového ellipsoidu a prostorového uspořádání potenciálu, panuje-li rovnováha elektrická. Řešení této úlohy vede k výpočtu kapacity takového ellipsoidu, a následkem toho též ku kapacitě elliptické desky, kterýž pojem v četných problémech fysiky k applikaci přichází. Budiž vzpomenuto Helmholtzovy theorie resonatorů u píšťal, korrekce při vyšetření odporu rtuti odražené ve skleněné trubici, ústí-li tato do většího množství rtuti, jíž se proud přivádí. (Určování Siemensovy jednotky.) Methodou reciprokých radiů dá se, jak William Thomson dokázal, z rovnovážného rozdělení elektřiny na kruhové desce vyšetřiti rozdělení na kulové kovové mísce atd.

Pomocí prvního problému dá se okamžitě řešiti druhá úloha, staroslavný problém o attrakci ellipsoidů, k jehož důležitosti v hydrodynamice, geodoesii, magnetismu, netřeba dále poukazovati.

Budiž poznamenáno, že obě úlohy řešívají se o sobě, methodami různými, ač příbuznost themat poukazuje k jich vniterné mathematické souvislosti. Výsledky zde podané jsou protož co do věcného obsahu z větší části známé; spůsob však, jakým v této stati vyvozeny jsou, zdá se míti některé přednosti proti methodám obyčejně užívaným.

I.

Tážeme se, za kterých okolností potenciál P, Laplace-ově rovnici

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=0$$

vyhovující, uspořádán býti může dle konfokálných ellipsoidů, znázorněných rovnicí

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1.$$

Otázka tedy zní, zdali P může býti funkcí jen λ. Předpokládejme $P=f(\lambda)$; z toho obdržíme

$$\frac{\partial P}{\partial x}=f'(\lambda)\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial x};\quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=f''(\lambda)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+f'(\lambda)\cdot\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2},$$

a podobné dva výrazy, v nichž x nahraženo y, resp. z. Výsledek substituce do Laplace-ovy rovnice jest:

$$(2)\qquad \frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)}=-\frac{\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial\lambda}{x\partial}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2}.$$

V této rovnici musí pravá strana, tak jako levá, záviseti jen na λ, má-li otázka nahoře položená míti smysl. Differenciací rovnice (1) obdržíme

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}\left(\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right)=\frac{2x}{a^2+\lambda},$$

či, položí-li se

$$(2')\qquad \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}=m,$$

$$(3)\quad m\frac{\partial\lambda}{\partial x}=2\cdot\frac{x}{a^2+\lambda},\quad m\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial y}=2\cdot\frac{y}{b^2+\lambda},\quad m\frac{\partial\lambda}{\partial z}=2\cdot\frac{z}{c^2+\lambda}.$$

Opětným differencováním dostaneme:

$$(4)\quad \frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}m+\frac{\partial\lambda}{\partial x}\cdot\frac{\partial m}{\partial x}+\frac{\partial m}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2=\frac{2}{a^2+\lambda}-\frac{2x}{(a^2+\lambda)^2}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial x}$$

a podobné dvě rovnice, v nichž x nahraženo y a z. Součet všech tří dává rovnici

$$(5)\qquad m\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right)$$

$$+4\left(\frac{x}{(a^2+\lambda)^2}\cdot\frac{\partial\lambda}{dx}+\frac{y}{(b^2+\lambda)^2}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{z}{(c^2+\lambda)^2}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)$$

$$+\frac{\partial m}{\partial\lambda}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2\right]=2\left(\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right).$$

Z rovnice (2') obdržíme

$$\frac{\partial m}{\partial\lambda}=-2\left(\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^3}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^3}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^3}\right),$$

z rovnic (3) jde

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2=\frac{4}{m}.$$

Tím přejde rovnice (5) v

$$m\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right)-\frac{4}{m}\frac{\partial m}{\delta\lambda}+\frac{4}{m}\cdot\frac{\partial m}{\partial\lambda}$$

$$=2\left(\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right).$$

Dosazením do rovnice (2) obdržíme

$$\frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right)$$

a integrací

$$f'(\lambda)=\frac{C}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}};$$

podobně

$$(6)\qquad P=f(\lambda)=C\int_\infty^\lambda\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Arbitrarní dolní meze volena v posledním integralu ∞, čehož třeba, má-li v nekonečnu potencial P býti roven nulle.

Řešení (6) vyhovuje Laplace-ově rovnici, má pro $\lambda=0$ na povrchu kovového vodiče hodnotu *stálou*. Srovnává se tedy s rovnováhou elektřiny na povrchu vodiče.

Dle věty Coulombovy jest složka síly, kolmá ku povrchu vodiče, rovna 4π násobné hustotě ϱ.

Síla (na jednotku kladné elektřiny) obnáší podél x-ové osy

$$-\frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{či} \quad -\frac{\partial P}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial x} \text{ atd.}$$

Směr normaly v bodě x, y, z, v kterémkoliv z konfok. ellipsoidů sestrojené, svírá s osami kosinusy směru

$$\cos nx = \frac{x}{a^2+\lambda}p, \quad \cos ny = \frac{py}{b^2+\lambda}, \quad \cos nz = \frac{pz}{c^2+\lambda},$$

při čemž p či $\frac{1}{\sqrt{m}}$ značí délku kolmice, jež se ze středu ellipsoidu spustiti dá na rovinu dotyčnou v x, y, z zřízenou.

Složka normaly jest tudíž

$$-\frac{\partial P}{\partial \lambda}\cdot\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\cos nz\right)$$

či $$-2\frac{\partial P}{\partial \lambda}p \quad \text{neb} \quad -\frac{2Cp}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

protož hustota ϱ na povrchu ($\lambda = 0$)

$$\varrho = -\frac{2Cp}{4\pi abc}.$$

Vzorec ten praví, že v každém bodě ellipsoidu hustota poměrna jest délce kolmice p.

Integrační konstanta C se snadno vyjádří celým množstvím elektřiny E, obsaženým na povrchu koule. Budiž df element povrchu; pak jest pdf trojnásobným krychlovým obsahem kužele určeného středem ellipsoidu a ploškou df; jest tedy

$$\int pdf = 4\pi\,.\,abc.$$

Z toho plyne

$$E = \int \varrho df = -\frac{2C}{4abc\pi}\cdot 4abc\pi \quad \text{neb} \quad C = -\frac{E}{2}.$$

Nachází-li se tedy na povrchu kovového ellipsoidu o poloosách a, b, c množství elektřiny E, jest potencial v kterémkoliv bodě prostoru x, y, z mimo ellipsoid určen výrazem

$$P = \frac{E}{2}\int_{\lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

kdež λ znamená onen kořen rovnice

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1,$$

který přísluší konfokálnímu ellipsoidu, procházejícímu tímže bodem x, y, z.

Síla, jíž podléhá jednotka hmoty v témže místě, jest vzhledem k ose x-ové

$$X = -\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{E}{2}\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}$$

a podobně dle osy y-ové a osy z. Není-li uvnitř ellipsoidu kovového hmoty elektrické, má tam místo Laplaceova rovnice. Potencial pochodící od hmot rozložených na povrchu jest stálým, jest proto dle vět o potencialu též uvnitř stálým, to jest účinek povrchové hmoty elektrické na vnitřek ellipsoidu zmizí.

Mezi povrchem ellipsoidu a nekonečnem obnáší rozdíl v potencialech $P_{(\lambda=0)}$, dále jest dle definice množství elektřiny E rovno P-násobné kapacitě ellipsoidu; pročež jest posledně jmenovaná hodnota vyjádřena vzorcem

$$2 : \int_{0}^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Kapacita kruhové desky $a = b$ jakožto limity ellipsoidu ($c = 0$) rovná se pak $\frac{2R}{\pi}$, kdež R značí poloměr desky.

II.

Buďtež dány dva souosé ellipsoidy sobě nekonečně blízké, *podobné*, o poloosách abc, $a'b'c'$. Poloměr společným středem vedený měj délku r, potažmo r'. Z podobnosti plyne

$$\frac{a'-a}{a}=\frac{b'-b}{b}=\frac{c'-c}{c}=\frac{r'-r}{r}=k,$$

při čemž k od polohy bodu na ploše nezávisí. Tloušťka vrstvy mezi oběma ellipsoidy t jest v určitém místě dána vzorcem

$$t=(r'-r)\cos\chi,$$

kdež χ značí úhel sevřený poloměrem a normalou. Proto lze psáti

$$t=(r'-r)\left(\frac{x}{r}\cdot\frac{xp}{a^2}+\frac{y}{r}\cdot\frac{yp}{b^2}+\frac{z}{r}\cdot\frac{zp}{c^2}\right)=\frac{r'-r}{r}\cdot p=kp.$$

Vyplněna-li mezera hmotou o hustotě rovnající se jedničce, jež hmotu téhož druhu odpuzuje dle zákona $\frac{mm'}{r^2}$, jest účinek její v limitě identický s účinkem hmoty, plošně rozdělené dle zákona v odstavci prvém uvedeného.

Značí-li E množství hmoty, platno jest

$$(7)\qquad -\frac{dP}{\partial x}=X=\frac{E}{2}\,\frac{1}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial x}$$

$$=E\,.\,\frac{x}{a^2+\lambda}\cdot\frac{[(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)]^{-\frac{1}{2}}}{\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}}.$$

Mysleme si nyní ellipsoid o poloosách α, β, γ vyplněný zcela hmotou té vlastnosti, že, rozdělíme-li jej podobnými, nekonečně blízkými ellipsoidy na vrstvy, hustota hmoty jest pro všechny body téhož podobného ellipsoidu stejnou. Značí-li n číslo mezi 0 a 1, budou $n\alpha$, $n\beta$, $n\gamma$ osami podobného ellipsoidu. Prostor mezi dvěma podobnými ellipsoidy, jimž určité n, resp. $n+dn$ přísluší, jest patrně

$$\frac{4\pi}{3}\alpha\beta\gamma\,[(n+dn)^3-n^3]=4\pi\alpha\beta\gamma\,.\,n^2\,.\,dn.$$

Hustota σ jest dle toho závislou na n; lze tudíž psáti $\sigma=F(n^2)$.

Hmota E tenké vrstvy jest tedy

$$4\pi\alpha\beta\gamma\,.\,n^2\,.\,dn\,F(n^2).$$

Dosadíce tuto hodnotu do rovnice (7) jakož i uvážíce, že $a=n\alpha$,

$b = n\beta$, $c = n\gamma$, obdržíme pro účinek této vrstvy v bodě x, y, z mimo hlavní ellipsoid (o osách α, β, γ) položený, výraz

$$X = \frac{4\pi\alpha\beta\gamma \, . \, n^2 dn \, . \, F(n^2)\, x}{(\alpha^2 n^2 + \lambda)\sqrt{(\alpha^2 n^2 + \lambda)(\beta^2 n^2 + \lambda)(\gamma^2 n^2 + \lambda)}}$$
$$. \frac{1}{\frac{x^2}{(\alpha^2 n^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(\beta^2 n^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(\gamma^2 n^2 + \lambda)^2}},$$

v němž λ se určí rovnicí

$$(8) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2 n^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\beta^2 n^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\gamma^2 n^2 + \lambda} = 1 .$$

Poloha bodu x, y, z, pro nějž se velikost síly hledá, jest veličinou danou a při výpočtu účinku všech vrstev stálou. Jest tedy dle rovnice (8) λ jedině funkcí veličiny n.

Hořejší výraz třeba jen integrovati od $n = 0$ až do $n = 1$, by se obdržel účinek celého ellipsoidu.

Odporučuje se však tato proměna: Značiž l funkci veličiny n, definovanou vzorcem $\lambda = l \, . \, n^2$; pak vyhovuje l rovnici

$$\frac{x^2}{\alpha^2 + l} + \frac{y^2}{\beta^2 + l} + \frac{z^2}{\gamma^2 + l} = n^2$$

a pro výsledné X obdrží se výraz

$$X = 4\pi\alpha\beta\gamma x \int_{n=0}^{n=1} \frac{F(n^2)\, dn \, . \, n}{(\alpha^2 + l)\sqrt{(\alpha^2 + l)(\beta^2 + l)(\gamma^2 + l)}}$$
$$. \frac{1}{\frac{x^2}{(\alpha^2 + l)^2} + \frac{y^2}{(\beta^2 + l)^2} + \frac{z^2}{(\gamma^2 + l)^2}} .$$

Do posledního výrazu zaveďme integrační proměnnou l na místě n; pak jest

$$2n \, . \, dn = -\left(\frac{x^2}{(\alpha^2 + l)^2} + \frac{y^2}{(\beta^2 + l)^2} + \frac{z^2}{(\gamma^2 + l)^2}\right) dl .$$

Je-li $n = 0$, jest patrně $l = \infty$; je-li $n = 1$, určí se příslušná veličina l_1 horní mez označující z rovnice

$$(10)\qquad \frac{x^2}{\alpha^2+l_1}+\frac{y^2}{\beta^2+l_1}+\frac{z^2}{\gamma^2+l_1}=1.$$

Bude tedy

$$\mathrm{X}=-2\pi\alpha\beta\gamma x\int_{l=\infty}^{l_1}\frac{dl\,.\,\mathrm{F}(n^2)}{(\alpha^2+l)\sqrt{(\alpha^2+l)(\beta^2+l)(\gamma^2+l)}}.$$

Zbývá ještě vyjádřiti veličinu $\mathrm{F}(n^2)$ integrační proměnnou l; toho lze dosíci pomocí rovnice (8)

$$n^2=\frac{x^2}{\alpha^2+l}+\frac{y^2}{\beta^2+l}+\frac{z^2}{\gamma^2+l}.$$

Odtud plyne

$$(11)\qquad \mathrm{X}=2\pi\alpha\beta\gamma x\int_{l_1}^{\infty}\frac{dl}{(\alpha^2+l)\sqrt{(\alpha^2+l)(\beta^2+l)(\gamma^2+l)}}$$

$$.\,\mathrm{F}\left(\frac{x^2}{\alpha^2+l}+\frac{y^2}{\beta^2+l}+\frac{z^2}{\gamma^2+l}\right);$$

dolní mez jde z rovnice (10); analogicky se najde Y a Z; dostačíť $\alpha\beta\gamma$, xyz cyklicky zaměniti.

Běží-li o bod vnitřní xyz, dostačí tato úvaha. Položme jím ellipsoid podobný ellipsoidu hlavnímu. Vrstvy mezi oběma obsažené neúčinkují na náš bod, jenž jedině podlehá účinku zbývajícího jádra ellipsoidického o osách $n\alpha$, $n\beta$, $n\gamma$; n^2 určíme z rovnice

$$\frac{x^2}{\alpha^2n^2}+\frac{y^2}{\beta^2n^2}+\frac{z^2}{\gamma^2n^2}=1.$$

Účinek na povrchu ellipsoidu vůbec jest dle (11)

$$\mathrm{X}=2\pi\alpha\beta\gamma x\int_{0}^{\infty}\frac{dl}{(\alpha^2+l)\sqrt{(\alpha^2+l)(\beta^2+l)(\gamma^2+l)}}$$

$$.\,\mathrm{F}\left(\frac{x^2}{\alpha^2+l}+\frac{y^2}{\beta^2+l}+\frac{z^2}{\gamma^2+l}\right),$$

jelikož souřadnice x, y, z vyhovují rovnici

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1,$$

z čehož vyplývá $l_1=0$.

Vrátíme-li se k účinku na bod položený uvnitř ellipsoidu, musíme za α, β, γ položiti $n\alpha$, $n\beta$, $n\gamma$.

Z toho jde

$$X=2\pi x n^3 . \alpha\beta\gamma \int_0^\infty \frac{dl}{(\alpha^2 n^2+l)\sqrt{(\alpha^2n^2+l)(\beta^2n^2+l)(\gamma^2n^2+l)}}$$

$$. F\left(\frac{x^2}{\alpha^2n^2+l}+\frac{y^2}{\beta^2n^2+l}+\frac{z^2}{\gamma^2n^2+l}\right).$$

Nahradí-li se integralní proměnná l výrazem $n^2\varepsilon$,

$$(11') \quad X=2\pi x . \alpha\beta\gamma \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{(\alpha^2+\varepsilon)\sqrt{(\alpha^2+\varepsilon)(\beta^2+\varepsilon)(\gamma^2+\varepsilon)}}$$

$$. F\left(\left[\frac{x^2}{\alpha^2+\varepsilon}+\frac{y^2}{\beta^2+\varepsilon}+\frac{z^2}{\gamma^2+\varepsilon}\right].\frac{1}{n^2}\right).$$

Běží-li o hmoty, jež se jako v gravitaci přitahují, nutno X, Y, Z opatřiti protivným znaménkem; má-li hmota všude stejnou hustotu $=1$, jest funkce F pro všechny argumenty veličinou stálou.

III.

Rovněž jednoduše se najde potencial ellipsoidu v libovolném bodě x, y, z mimo hlavní ellipsoid. Příspěvek vrstvy omezené dvěma nekonečně blízkými podobnými ellipsoidickými plochami jest dle předešlého

$$(11^a) \quad 2\pi\alpha\beta\gamma n^2 . dn . F(n^2) \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(\alpha^2n^2+\lambda)(\beta^2n^2+\lambda)(\gamma^2n^2+n\lambda)}}.$$

Dolní meze jest při tom funkcí veličiny n vzhledem k relaci

$$\frac{x^2}{\alpha^2n^2+\lambda}+\frac{y^2}{\beta^2n^2+\lambda}+\frac{z^2}{\gamma^2n^2+\lambda}=1.$$

Zavede-li se za integrační proměnnou jiná definovaná rovnicí $\lambda = ln^2$, má platnost, ježto se jedná o příspěvek určité vrstvy, t. j. určitého n k potencialu a ježto n za stálé musí býti považováno $d\lambda = dl \,.\, n^2$, z čehož obdržíme

$$(12^a) \qquad 2\pi\alpha\beta\gamma\, \mathrm{F}(n^2)\, ndn \int_l^\infty \frac{dl}{\sqrt{(\alpha^2+l)(\beta^2+l)(\gamma^2+l)}},$$

kdež dolní meze plyne ze vztahu

$$(12) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2+l} + \frac{y^2}{\beta^2+l} + \frac{z^2}{\gamma^2+l} = n^2.$$

Dle toho jest dolní meze l funkcí veličiny n^2, již nazveme ε'.

Elliptický integral $\int_l^\infty \frac{dl}{\sqrt{(\alpha^2+l)(\beta^2+l)(\gamma^2+l)}}$ jsa funkcí dolní meze l, jest následkem rovnice (12) též funkcí n^2 či ε'.

Budiž

$$\int_l^\infty \frac{dl}{\sqrt{(\alpha^2+l)(\beta^2+l)(\gamma^2+l)}} = \psi(l) = \chi(\varepsilon').$$

Tato funkce má pro svou definici tyto vlastnosti

$$\frac{d\psi(l)}{dl} = -\frac{1}{\sqrt{(\alpha^2+l)(\beta^2+l)(\gamma^2+l)}}, \qquad \psi(\infty) = 0$$

Budiž dále

$$\frac{d\mathrm{H}(\varepsilon')}{d\varepsilon'} = \mathrm{F}(\varepsilon'),$$

pak jest potencial všech vrstev vyjádřen vzorcem

$$\mathrm{P} = \alpha\beta\gamma\pi \int_{\varepsilon'=0}^{\varepsilon'=1} d\varepsilon' \,.\, \frac{\partial \mathrm{H}(\varepsilon')}{\partial\varepsilon'}\, \chi(\varepsilon').$$

Integrování po částech dává

$$(13)\qquad P = \pi\alpha\beta\gamma\left[\int_{\varepsilon'=0}^{\varepsilon'=1} H(\varepsilon')\,\chi(\varepsilon') - \int_{\varepsilon'=0}^{\varepsilon'=1} H(\varepsilon')\,.\,\frac{\partial\chi(\varepsilon')}{d\varepsilon'}\,.\,d\varepsilon'\right].$$

Je-li $\varepsilon' = 1$, jest $n = 1$, a příslušné l, jež nyní l_1 zoveme, jest určeno rovnicí

$$(14)\qquad \frac{x^2}{\alpha^2 + l_1} + \frac{y^2}{\beta^2 + l_1} + \frac{z^2}{\gamma^2 + l_1} = 1;$$

proto jest

$$\chi(1) = \int_{l_1}^{\infty} \frac{dl}{\sqrt{(\alpha^2 + l)(\beta^2 + l)(\gamma^2 + l)}}.$$

Je-li $\varepsilon' = 0$, jest $n = 0$, příslušné pak l určeno rovnicí (12) a jest patrně ∞; proto

$$\chi(0) = \psi(\infty) = \int_{\infty}^{\infty} \frac{dl}{\sqrt{(\alpha^2 + l)(\beta^2 + l)(\gamma^2 + l)}}$$

jest nullou.

Prvý výraz v závorce rovnice (13) jest tedy

$$H(1)\int_{l_1}^{\infty} \frac{dl}{\sqrt{(\alpha^2 + l)(\beta^2 + l)(\gamma^2 + l)}}.$$

V druhém výraze nahraďme $\frac{\partial\chi(\varepsilon')}{\partial\varepsilon'}$ výrazem

$$\frac{\partial\psi(l)}{dl}\cdot\frac{dl}{d\varepsilon'} = -\frac{dl}{d\varepsilon'}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\alpha^2 + l)(\beta^2 + l)(\gamma^2 + l)}}.$$

Pišme za $\frac{dl}{d\varepsilon'}\,d\varepsilon'$ prostě dl, a uvažme, že mezem $\varepsilon' = 0$ $\varepsilon' = 1$ meze $l = \infty$, potažmo $l = l_1$ odpovídají, z nichž l_1 určeno jest rovnicí (14). Nahraďme dále výraz $H(\varepsilon')$ čili $H(n^2)$ výrazem $H\left(\frac{x^2}{\alpha^2 + l} + \frac{y^2}{\beta^2 + l} + \frac{z^2}{\gamma^2 + l}\right)$.

Pro potencial v zevnějším bodu xyz obdržíme následkem řečených změn

$$P = \pi\alpha\beta\gamma \int_{l_1}^{\infty} . H(1) \frac{dl}{\sqrt{(\alpha^2+l)(\beta^2+l)(\gamma^2+l)}}$$

$$+ \pi\alpha\beta\gamma \int_{\infty}^{l_1} \frac{dl}{\sqrt{(\alpha^2+l)(\beta^2+l)(\gamma^2+l)}} . H\left(\frac{x^2}{\alpha^2+l}+\frac{y^2}{\beta^2+l}+\frac{z^2}{\gamma^2+l}\right)$$

neb

$$P = \pi\alpha\beta\gamma \int_{\infty}^{l_1} \frac{dl}{\sqrt{(\alpha^2+l)(\beta^2+l)(\gamma^2+l)}} \tag{15}$$

$$. \left[H\left(\frac{x^2}{\alpha^2+l}+\frac{y^2}{\beta^2+l}+\frac{z^2}{\gamma^2+l}\right) - H(1)\right],$$

kdež meze l_1 určena jest rovnicí

$$\frac{x^2}{\alpha^2+l_1}+\frac{y^2}{\beta^2+l_1}+\frac{z^2}{\gamma^2+l_1} = 1.$$

Co se týče funkce $H(\varepsilon)$, budiž opětně připomenuto, že jest to úkon, jenž derivaci dle argumentu dává $F(\varepsilon)$; $F(n^2)$ značí zákon, dle něhož se mění hustota jednotlivých podobných ellipsoidů, jejichž karakteristikon jest číslo n.

Je-li hustota všude stejnou a rovnou 1, jest

$$\frac{\partial H(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 1, \quad H(\varepsilon) = \varepsilon + \text{konst.}$$

Pak platí pro potencial ellipsoidu hmotou o hustotě $= 1$ vyplněného, známý vzorec

$$P = \pi\alpha\beta\gamma \int_{\infty}^{l_1} \left[\frac{x^2}{\alpha^2+l}+\frac{y^2}{\beta^2+l}+\frac{z^2}{\gamma^2+l} - 1\right] \frac{dl}{\sqrt{(\alpha^2+l)(\beta^2+l)(\gamma_2+l)}}.$$

Správnost vzorce (15) dá se kontrolovati derivací dle x. Obdržíme, majíce zření k tomu, že l_1 závisí na x, y, z

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \alpha\beta\gamma\pi \int_{\infty}^{l_1} \frac{dl}{\sqrt{(\alpha^2+l)(\beta^2+l)(\gamma^2+l)}}$$

$$. F\left(\frac{x^2}{\alpha^2+l}+\frac{y^2}{\beta^2+l}+\frac{z^2}{\gamma^2+l}\right) . \frac{2x}{\alpha^2+l}$$

$$+\alpha\beta\gamma\pi\,.\,\frac{dl_1}{dx}\,.\,\frac{1}{\sqrt{(\alpha^2+l_1)(\beta^2+l_1)(\gamma^2+l_1)}}$$
$$.\left[H\left(\frac{x^2}{\alpha^2+l_1}+\frac{y^2}{\beta^2+l_1}+\frac{z^2}{\gamma^2+l_1}\right)-H(1)\right].$$

Vzhledem k rovnici (14) odpadne člen druhý, člen prvý souhlasí s rovnicí (11).

Potencial na povrchu ellipsoidu, kdež za příčinou

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

musí býti $l_1=0$, jest

$$(17)\qquad P=\alpha\beta\gamma\pi\int_\infty^0\frac{dl}{\sqrt{(\alpha^2+l)(\beta^2+l)(\gamma^2+l)}}$$
$$.\left[H\left(\frac{x^2}{\alpha^2+l}+\frac{y^2}{\beta^2+l}+\frac{z^2}{\gamma^2+l}\right)-H(1)\right].$$

Vyšetřiti jest ještě potencial na bod vnitřní. Podobný ellipsoid, na němž bod onen leží a jenž tvoří hranici jádra vnitřního, má poloosy $n\alpha$, $n\beta$, $n\gamma$, tak že jest v platnosti

$$(18)\qquad \frac{x^2}{n^2\alpha^2}+\frac{y^2}{n^2\beta^2}+\frac{z^2}{n^2\gamma^2}=1.$$

K potencialu v řečeném bodě přispívá předně potencial jádra; ten se obdrží, jestliže do (17) za α, β, γ dosadíme $n\alpha$, $n\beta$, $n\gamma$, kdež n jest definováno rovnicí (18).

Výraz takto vzniklý transformujme, zavedouce za integrační proměnnou l jinou ε, jež s ní souvisí pomocí rovnice

$$l=n^2\varepsilon.$$

Prvý tento příspěvek jest

$$(19)\qquad \alpha\beta\gamma\,.\,\pi\int_\infty^0\frac{n^2d\varepsilon}{\sqrt{(\alpha^2+\varepsilon)(\beta^2+\varepsilon)(\gamma^2+\varepsilon)}}$$
$$.\left[H\left(\frac{\frac{x^2}{\alpha^2+\varepsilon}+\frac{y^2}{\beta^2+\varepsilon}+\frac{z^2}{\gamma^2+\varepsilon}}{n^2}\right)-H(1)\right],$$

kdež n plyne z rovnice (18).

Druhý příspěvek zjednávají vrstvy, jež jádro obklopují. Pro ně jest bod x, y, z bodem vnitřním. Ellipsoidická nekonečně tenká vrstva určitého plynulého n nedává uvnitř vzniknouti silám, což znamená, že vzbuzuje uvnitř týž potencial jako na svém povrchu. Tento dle dřívějších vývodů (11[a]) jest

$$2\pi\alpha\beta\gamma \,.\, n^2 dn\, \mathrm{F}(n^2) \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(\alpha^2 n^2+\lambda)(\beta^2 n^2+\lambda)(\gamma^2 n^2+\lambda)}},$$

což změnou integrační proměnné redukuje se na

$$2\pi\alpha\beta\gamma \,.\, n dn\, \mathrm{F}(n^2) \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\sqrt{(\alpha^2+\varepsilon)(\beta^2+\varepsilon)(\gamma^2+\varepsilon)}}.$$

Příspěvek zevních vrstev k potencialu (od $n = n$ až do $n = 1$) jest tudíž vzhledem k dřívějšímu označení $n^2 = \varepsilon'$,

$$(20)\qquad \pi\alpha\beta\gamma \,.\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\sqrt{(\alpha^2+\varepsilon)(\beta^2+\varepsilon)(\gamma^2+\varepsilon)}} \cdot \int_{n^2}^1 \mathrm{F}(\varepsilon')\,.\,d\varepsilon'$$

aneb

$$(20')\qquad \pi\alpha\beta\gamma \,.\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\sqrt{(\alpha^2+\varepsilon)(\beta^2+\varepsilon)(\gamma^2+\varepsilon)}} \cdot \left[\mathrm{H}(1) - \mathrm{H}\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)\right]$$

Sečtouce výrazy (19) a (20′) obdržíme hodnotu potencialu pro vnitřní bod x, y, z tvaru

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} = {} & \alpha\beta\gamma\pi \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\sqrt{(\alpha^2+\varepsilon)(\beta^2+\varepsilon)(\gamma^2+\varepsilon)}} \cdot \left[\mathrm{H}(1) - \mathrm{H}\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)\right] \\
& + \alpha\beta\gamma\pi \left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right) \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\sqrt{(\alpha^2+\varepsilon)(\beta^2+\varepsilon)(\gamma^2+\varepsilon)}} \\
(21)\qquad & \cdot \left[\mathrm{H}(1) - \mathrm{H}\left(\frac{\frac{x^2}{\alpha^2+\varepsilon}+\frac{y^2}{\beta^2+\varepsilon}+\frac{z^2}{\gamma^2+\varepsilon}}{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}}\right)\right].
\end{aligned}$$

Je-li hustota všude stejná a rovna jedničce, jest $\mathrm{H}(\varepsilon) = \varepsilon$, proto obdržíme známý výraz

$$P = \alpha\beta\gamma\pi \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\sqrt{(\alpha^2+\varepsilon)(\beta^2+\varepsilon)(\gamma^2+\varepsilon)}} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2+\varepsilon} - \frac{y^2}{\beta^2+\varepsilon} - \frac{z^2}{\gamma^2+\varepsilon}\right).$$

Vzorce (15), jakož i (21), jimiž řešení problemu potencialu založené dosud na trojnásobné integraci redukováno jest na integraci jednoduchou i v tom případu, kdy hustota dle zmíněného zákona proměnlivou jest, jsou po mém soudu novými.

Příspěvek k nauce o nekonečných řetězcích.

Napsal

prof. dr. F. J. Studnička.

V nauce o nekonečných řetězcích dokazuje se, že

$$-\underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{F}}}\left(\frac{a_k}{a_k+1}\right) = 1\,, \tag{1}$$

a to spůsobem jednoduchým sice, ale rozvláčným,*) takže vzniká odůvodněné přání, aby se důkaz tento vedl co možná nejkratčeji, *přímo*. A toho dosáhnouti možná takto:

Značí-li p_n a q_n čitatele a jmenovatele n-té hodnoty přibližné všeobecného řetězce

$$-\mathrm{F}\left(-\frac{a_k}{b_k}\right) = \cfrac{a_1}{b_1 - \cfrac{a_2}{b_2 - \cfrac{a_3}{b_3 - \dots}}}\,,$$

platí, jak známo,

$$p_n = a_1 \begin{vmatrix} b_2, & 1, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ a_3, & b_3, & 1, & \dots, & 0, & 0 \\ 0, & a_4, & b_4, & \dots, & 0, & 0 \\ \vdots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & a_n \dots & b_n \end{vmatrix}, \tag{2}$$

což představuje determinant stupně $(n-1)$-ho, a podobně

---

*) Viz *Studnička:* „Všeobecné tvarosloví algebraické“ pag. 224.