Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

O rekurrentní rovnici $c_n = \sum_{v=0}^{n} (-1)^v \binom{n}{v} c_v$

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 1, 31--33

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123732

společných vrcholů těchto stran kružnice, procházející pevným bodem příslušné strany.

c) Otáčejí-li se strany libovolného, třemi vrcholy a_k, a_l, a_m podobného n-úhelníka určeného trojúhelníka kolem pevných svých bodů.

O rekurrentní rovnici

$$c_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \binom{n}{\nu} c_{\nu}$$

Napsal

M. Lerch,

docent vysoké školy technické v Praze.

Nadepsaná rovnice rekurrentní, jíž lze symbolicky též psáti $c^n = (1-c)^n$, má tu vlastnost, že nedefinuje veličiny $c_1, c_2, c_3 \ldots$ naprosto, nýbrž že tyto veličiny obsahují určité libovolné konstanty.

Abychom ustanovili řešení nadepsané rovnice, předpokládejme, že pro jedno z nich řada

$$\text{(1)} \qquad F(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} y^\nu$$

konverguje v jistém okolí bodu $y = 0$. Pak bude

$$e^y F(-y) = \sum \frac{y^\mu}{\mu!} \sum (-1)^\nu \frac{c_\nu}{\nu!} y^\nu = \sum_{\mu,\nu} \frac{(-)^\nu c_\nu}{\mu!\,\nu!} y^{\mu+\nu},$$

$$(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots);$$

součinitel při y^n je zde tedy

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu c_\nu}{\nu!\,(n-\nu)!} = \frac{c_n}{n!},$$

poněvadž $\frac{n!}{\nu!\,(n-\nu)!} = \binom{n}{\nu}$. Máme tedy

$$e^y \, F(-y) = F(y), \tag{2}$$

z čehož následuje pro $y = 2x$:

$$e^x \, F(-2x) = e^{-x} \, F(2x), \tag{2a}$$

což vyjadřuje, že $e^{-x} F(2x)$ je funkce sudá, takže

$$e^{-x} F(2x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \, x^{2\nu},$$

. j.:

$$F(2x) = e^x \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \, x^{2\nu} = \sum_{\mu,\,\nu} \frac{A_\nu}{\mu!} x^{2\nu+\mu}. \tag{3}$$

Je-li naopak rovnice (3) splněna, je splněna též rovnice 2a), tudíž i (2) a veličiny c_ν dané rovnicí

$$F(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c^\nu}{\nu!} x^\nu$$

hoví nadepsané rovnici rekurrentní.

Máme tedy dle (3):

$$\frac{2^n c_n}{n!} = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{A_\nu}{(n-2\nu)!}, \tag{4}$$

kde $\left[\frac{n}{2}\right]$ značí $\frac{n}{2}$ neb $\frac{n-1}{2}$, jak jest n sudé neb liché.

V tomto vzorci (4) jsou veličiny A_ν naprosto libovolné, a veličiny c_n takto stanovené hoví relaci rekurrentní, z níž jsme vyšli.

Volíme-li $A_\nu = 0$ obecně, jenom $A_m = 1$, máme

$$c_n = \frac{n!}{2^n (n - 2m)!}$$

pokud $n \geqq 2m$, ale $c_n = 0$ pro $n < 2m$.

Tím dokázán vztah

$$\sum_{\nu=2m}^{n} (-1)^\nu \frac{\nu! \binom{n}{\nu}}{2^\nu (\nu - 2m)!} = \frac{n!}{2^n . (n - 2m)!}$$

čili:

$$\sum_{\nu=2m}^{n} (-1)^\nu \frac{1}{2^\nu (n-\nu)! (\nu - 2m)!} = \frac{1}{2^n . (n - 2m)!},$$

jenž sám stačí k důkazu, že veličiny c^n dané vzorcem (4) hoví naší čovnici rekurrentní při libovolných A.

Elektrické přenášení energie z Lauffenu do Frankobrodu.

Referuje

Karel Novák,
assistent elektrotechniky při české vysoké škole v Praze.

Mezi nejdůležitější práce na poli elektrotechnickém patří bez odporu projekt elektrického přenášení energie do velikých vzdáleností, který na mezinárodní elektrické výstavě ve Frankobrodě r. 1891 uskutečněn byl. Podařilo se tu přenésti energii 200 HP do vzdálenosti 175 *km* s účinností 75%.

Jakožto pramen energie byla v Lauffenu turbina o 300 HP. Tato pomocí konických kol byla spojena se strojem dynamoelektrickým na proudy točivé, který byl konstruován na napjetí 50 V a intensitu 4000 A. Stroj tento upraven byl tak, že ma-