Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Čeněk Jarolímek

O rozvinutelné ploše normál kuželové plochy stupně druhého

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 8 (1879), No. 5, 247--257

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123728

kroky všeobecné fysiky, pak fysiky země a geologie co den rostou čerpajíce ze živých pramenů *analytické theorie tepla* a že památka spisovatele znamenitého toho díla, *jmeno Fourierovo* zachováno tím potomstvu i nejpozdnějšímu.! —

O rozvinutelné ploše normál kuželové plochy stupně druhého.

Od

Č. Jarolímka.

Z theorie křivosti ploch vůbec jest známo, že každé ploše křivé **P** náležejí dvě soustavy křivek křivosti. Každým bodem plochy m prochází jedna křivka soustavy první K a jedna křivka soustavy druhé K'; tečny T a T' křivek K a K' v bodě m stojí na sobě kolmo a určují s normálou plochy N v bodě m roviny (NT) a (NT') hlavních průseků normalných plochy **P** pro bod m. Normálou N jakožto osou jest dán svazek rovin určujících s plochou **P** svazek normalných průseků, jimž odpovídají v společném bodě m různé poloměry a středy křivosti na společné normále N; křivost maximalní, tedy poloměr křivosti nejmenší, odpovídá jednomu, křivost pak minimalní, tudíž poloměr křivosti největší, druhému průseku hlavnímu*). Chceme předpokládati, že prvý obsažen jest v rovině (NT), druhý v rovině (NT'). Poněvadž jest $T \perp T'$, seče každá křivka křivosti soustavy jedné veškeré křivky soustavy druhé pravoúhelně, t. j. křivky křivosti soustavy jednékaždé jsou orthogonalné trajektorie křivek soustavy druhé.

Normály odpovídající ploše **P** ve dvou soumezných bodech křivky křivosti protínají se; jest tedy geometrické místo normál plochy **P** v bodech libovolné křivky křivosti K plocha *rozvinutelná* **N**, jíž náleží určitá křivka vratná V, kteráž jest evolutou křivky K. Soustava křivek křivosti ΣK určuje soustavu rozvinu-

---

*) *Dr. F. J. Studnička.* Základové vyšší mathematiky. Vydání II. díl I., §. 58 a 59.

telných ploch normál Σ**N**, tyto pak soustavu vratných křivek ΣV, jež vyplňují plochu **S**; plocha tato jest geometrickým místem středů maximalních křivostí normalných průseků plochy **P**. Podobně odpovídá druhé soustavě křivek křivosti $\Sigma K'$ soustava rozvinutelných ploch normál Σ**N**' a soustava vratných křivek $\Sigma V'$, vyplňujících plochu středů křivostí minimalních **S**'. Každá z těchto ploch **S** a **S**' jest obalovou plochu protivné soustavy ploch normál Σ**N**', Σ**N** *).

Je-li plocha **P** *rozvinutelná*, jsou povrchové přímky její čarami křivostí minimalních, dávají tedy soustavu $\Sigma K'$; křivosť je tu patrně $= 0$, poloměr křivosti ∞. Normály plochy **P** podél povrchové přímky K' jsou rovnoběžné spolu a leží *v rovině normál* **N**', určené přímkou K' a normálou plochy **P** v kterémkoli bodě přímky K' sestrojenou. Jest tudíž Σ**N**' v případě tomto soustavou rovin, a obalová plocha jejich **S** bude přímočará a to rozvinutelná. Orthogonalné trajektorie povrchových přímek rozvinutelné plochy **P** dávají soustavu křivek křivostí maximalních ΣK; vratné křivky V příslušných ploch normál **N** vyplňují plochu středů křivostí maximalních **S**, kteráž bude dle věty předcházející rozvinutelná.

Vratná křivka V', totožná s obalovou křivkou normál plochy **P** podél povrchové přímky K', jest v případě tomto zastoupena společným úběžným bodem normál, neboť jsou tyto vespolek rovnoběžny. Je-li tedy daná plocha **P** rozvinutelná proměňuje se plocha středů křivostí minimalních **S**' ve *křivku úběžnou*, totiž ve spojnici úběžných bodů normál, jež odpovídají veškerým tečným rovinám plochy **P**. Křivku tuto lze sobě také mysliti jakožto průsek úběžné roviny se společnou řídící plochou kuželovou ploch normál Σ**N**, již obdržíme, vedeme-li libovolným bodem v prostoru normály k veškerým rovinám tečným plochy **P**; v této křivce úběžné **S**' protínají se veškeré plochy soustavy Σ**N**.

Je-li **P** *plocha kuželová*, zůstává v platnosti vše, co vztahovalo se ku rozvinutelné ploše **P** vůbec. Poněvadž jsou křivky křivosti soustavy ΣK orthogonalné trajektorie povrchových přímek plochy kuželové **P**, a tyto protínají se v bodě společném, t. v středu plochy, budou křivky ty totožny s průsečnými ča-

*) *C. F. A. Leroy.* Geométrie descriptive. Nro. 714—717.

rami plochy **P** a soustředných s ní ploch kulových. Že pak roviny normál plochy kuželové procházejí středem jejím, bude obalová plocha jejich čili plocha středů křivostí maximalních **S** taktéž plochou kuželovou s **P** soustřednou.

V úvaze následující chceme blíže vyšetřiti křivky křivosti soustavy ΣK, příslušné plochy normál $\Sigma\mathbf{N}$, jakož i plochu středů křivostí maximalních **S** *kuželové plochy stupně druhého*, a to spůsobem analytickým.

Buďtež osy plochy kuželové **P** osami soustavy souřadnic, pročež rovnice plochy

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\nu^2}=z^2, \tag{1}$$

kdež druhé odmocniny konstant $\mu = tg\,(AZ)$, $\nu = tg\,(BZ)$, značí trig. tangenty odchylek přímek plochy A a B obsažených v rovinách (XZ) a (YZ) od osy Z (obr. 1.); budiž $\mu > \nu$. Každá rovina $\perp Z$, jejíž rovnice $z = d$, seče plochu **P** v ellipse, jejíž poloosy $= \mu d$, νd. V obrazci znázorněna taková ellipsa M (střed její t), jíž plocha kuželová zároveň omezena. Plocha kulová soustředná s plochou **P** o poloměru r

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \tag{2}$$

seče plochu kuželovou v křivce křivosti K, pro kterou platí rovnice (1) a (2) zároveň; jest to patrně prostorová křivka stupně čtvrtého. Eliminujeme-li z rovnic těchto postupně z, y, x, obdržíme rovnice průmětů křivky K na rovinách (XY), (XZ), (YZ):

$$\frac{\mu^2+1}{\mu^2 r^2}x^2+\frac{\nu^2+1}{\nu^2 r^2}y^2=1, \tag{3}$$

$$\frac{\mu^2-\nu^2}{\mu^2 r^2}x^2+\frac{\nu^2+1}{r^2}z^2=1, \tag{4}$$

$$\frac{\mu^2+1}{r^2}z^2-\frac{\mu^2-\nu^2}{\nu^2 r^2}y^2=1. \tag{5}$$

Z rovnice (3) jest patrno, že průmětem křivky K na rovině (XY) jest ellipsa, a to v rozsáhlosti své celé, poněvadž jest průmětem plochy (1) rovina (XY) celá. Poměr poloos ellipsy (3)

$$a_1=\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}\,r,\quad b_1=\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+1}}\,r, \tag{6}$$

jest stálý pro každé r, t. j. kružnice křivosti promítají se na rovině (XY) v soustavě ellips podobných a dle (3) souosých.

Plochy (1) a (2) jsouce souměrny ke každé rovině souřadnicové, protínají se ve křivce tolikéž k rovinám těm souměrné; dává tedy křivka průsečná *dvě* křivky křivosti téže soustavy ΣK, z nichž každá jiné oblině plochy kuželové přináleží. Obě tyto křivky dány jsou týmiž rovnicemi (1) a (2), jedné odpovídají kladné, druhé záporné souřadnice z; ellipsa (3) jest společným jich průmětem na rovině (XY). Za touto příčinou bude v následujícím pokládán souhrn obou těchto křivek křivosti za křivku jedinou, souhrn příslušných ploch normál **N** za plochu jedinou atd., neboť útvar souhrnem takovým určený bude vyjádřen jedním výrazem analytickým. V obr. 1. zobrazena jest jen jedna část každého útvaru takového, odpovídající jedné oblině plochy **P**.

Na rovině (XZ) promítá se křivka K v obloucích ellipsy (4) obsažených mezi přímkami A, C a osou Z, kterážto část roviny (XZ) obsahuje průmět plochy P; ostatní dva oblouky ellipsy (4) nacházející se mezi přímkami A, C a osou X jsou liché. Poloosy ellipsy (4) jsou

$$a_2 = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}\, r,\quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{\nu^2 + 1}}\, r; \tag{7}$$

patrně jest i zde poměr poloos stálý, tak že i na rovině (XZ) promítají se křivky křivosti v obloucích ellips podobných a dle (6) souosých.

Konečně jsou dle rovnic (5) průměty křivek křivosti, z nichž skládá se průsek K ploch (1) a (2), na rovině (YZ) dva oblouky hyperboly (5), obsažené mezi přímkami B, D, v nichž plochu **P** rovina (YZ) protíná, a osou Z; ostatní části hyperboly jsou liché. Poloosy hyperboly (5) jsou

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}}\, r,\quad b_3 = \frac{\nu}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}\, r; \tag{8}$$

poměr jejich jest pro libovolné r konstantní. —

Zjednejme sobě spůsobem známým z rovnice (1) rovnice průmětů normály*) ku ploše **P** v bodě jejím, jehož souřadnice buďtež ξ, η, ζ, na rovinách souřadnic:

---

*) *Dr. F. J. Studnička.* Základ. vyšší math. I. pag. 228.

$$\mu^2 \eta (x - \xi) = \nu^2 \xi (y - \eta) \tag{9}$$
$$\mu^2 \zeta (x - \xi) = - \xi (z - \zeta) \tag{10}$$
$$\nu^2 \zeta (y - \eta) = - \eta (z - \zeta); \tag{11}$$

zároveň jest dle (1)

$$\frac{\xi^2}{\mu^2} + \frac{\eta^2}{\nu^2} = \zeta^2, \tag{12}$$

a nachází-li se bod (ξ, η, ζ) také na křivce křivosti K, mají dle (2) ... (5) platnosť rovnice

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2 \tag{13}$$
$$\nu^2 (\mu^2 + 1) \xi^2 + \mu^2 (\nu^2 + 1) \eta^2 = \mu^2 \nu^2 r^2 \tag{14}$$
$$(\mu^2 - \nu^2) \xi^2 + \mu^2 (\nu^2 + 1) \zeta^2 = \mu^2 r^2 \tag{15}$$
$$\nu^2 (\mu^2 + 1) \zeta^2 - (\mu^2 - \nu^2) \eta^2 = \nu^2 r^2. \tag{16}$$

Normála jest určena kterýmikoli dvěma ze tří rovnic (9)... (11), křivka pak K dvěma z pěti rovnic (12) ... (16); považujeme-li ξ, η, ζ za proměnné a vyloučíme-li je ze čtyř rovnic takových, obdržíme rovnici rozvinutelné plochy normál **N** odpovídající ploše **P** podél křivky K. Eliminace tato vyžaduje řešení obecné rovnice stupně čtvrtého; ale vlastnosti plochy **N**, k nimž poukázati zamýšlíme, vyvodíme snadně, aniž bychom eliminaci řečenou prováděli.

Vyšetříme především průseky plochy **N** s rovinami souřadnic. Abychom určili průsek s rovinou (XY), položme v rovnicích (10) a (11) $z = o$, načež obdržíme řešením

$$\xi = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} x, \tag{17}$$
$$\eta = \frac{\nu^2}{\nu^2 + 1} y. \tag{18}$$

Substituce hodnot těchto do rovnice (14) dává rovnici křivky žádané

$$\frac{\mu^2}{(\mu^2 + 1) r^2} x^2 + \frac{\nu^2}{(\nu^2 + 1) r^2} y^2 = 1; \tag{19}$$

jest to ellipsa, jejíž poloosy

$$a_1' = \frac{\sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu} r, \quad b'_1 = \frac{\sqrt{\nu^2 + 1}}{\nu} r \tag{20}$$

mají zase poměr stálý při proměnném r. Avšak substitucí $z = o$ plyne z rovnic (10) a (11) kromě rovnic (17) a (18) ještě hodnota $\zeta = 0$, která z rovnic (12) a (13) určuje

$$\xi = \pm \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}} r, \quad \eta = \pm \frac{\nu}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}} ir;$$

dosazením hodnot těchto do (9) obdržíme

$$\mu x \pm i\nu y = \pm r \sqrt{\mu^2 - \nu^2}, \tag{21}$$

kdež platí znaménka souhlasná i protivná; druhá část průseku plochy **N** s rovinou (XY) skládá se tedy ze čtyř přímek imaginarných.

Podobně zjednáme sobě rovnici průseku plochy **P** s rovinou (XZ), položíme-li $y = 0$ v rovnicích (9) a (11), načež dosadíme hodnoty z rovnic těchto vyplývající

$$\xi = \frac{\mu^2}{\mu^2 - \nu^2} x, \quad \zeta = \frac{1}{\nu^2 + 1} z$$

do rovnice (15):

$$\frac{\mu^2}{(\mu^2 - \nu^2) r^2} x^2 + \frac{1}{(\nu^2 + 1) r^2} z^2 = 1; \tag{22}$$

rovnice tato odpovídá ellipse s poloosami

$$a'_2 = \frac{r}{\mu} \sqrt{\mu^2 - \nu^2}, \quad b'_2 = r \sqrt{\nu^2 + 1}. \tag{23}$$

Substituce $y = 0$ dává z rovnic (9) a (11) kromě toho hodnotu $\eta = 0$, z čehož jde jako nahoře užitím rovnic (12), (13) a (10)

$$\mu x \pm z = \pm r \sqrt{\mu^2 + 1}, \tag{24}$$

t. j. další část průseku plochy **N** s rovinou (XZ) skládá se ze čtyř přímek realných a k osám X, Z souměrných; jsou to normály (v obr. znázorněny dvě z nich N_a, N_c) sestrojené ku ploše kuželové v průsečících přímek A, C s plochou kulovou, ve vrcholech obou křivek křivosti. Snadně lze se analyticky přesvědčiti, že přímky tyto (24) jsou tečnami ellipsy (22).

Posléze obdržíme rovnici průseku plochy **N** s rovinou (YZ)

$$\frac{1}{(\mu^2 + 1) r^2} z^2 - \frac{\nu^2}{(\mu^2 - \nu^2) r^2} y^2 = 1 \tag{25}$$

substitucí $x = o$ v rovnicích (9) a (10) a eliminací ξ, η a ζ z rovnice (9), (10), (16). Průsek tento jest hyperbolou, jejíž poloosy

$$a'_3 = r \sqrt{\mu^2 + 1}, \quad b'_3 = \frac{r}{\nu} \sqrt{\mu^2 - \nu^2}. \tag{26}$$

Z rovnic (9) a (10) jde za $x = 0$ dále $\xi = 0$, což dává z rovnic (12), (13) a (11)

$$vy \pm z = \pm r \sqrt{v^2 + 1}; \tag{27}$$

ostatní část průseku v rovině (YZ) skládá se ze čtyř k osám Y a Z souměrných přímek realných, povrchových to přímek plochy **N**, odpovídajících vrcholům křivky K (v obr. znázorněny dvě N_b, N_d); přímky tyto jsou tečnami hyperboly (25).

Ješto rozvinutelná plocha **N** ke všem rovinám souřadnicovým souměrná jest, jsou křivé části průseků jejích s rovinami těmito *vlastní průseky* plochy, i dlužno je pokládati za dvojnásobné křivky její; ellipsa (19) jest společným průsekem částí plochy normál, jež odpovídají oběma křivkám křivosti, v nichž protínají se plochy (1) a (2).

Srovnáním rovnic (3) a (19), (4) a (22), (5) a (25) nalezneme, že průmět křivky křivosti K na kteroukoli rovinu souřadnic a vlastní průsek plochy **N** na této rovině jsou vždy kuželosečky souosé a souhlasné, ellipsy neb hyperboly; a ješto poměry poloos jejich, jak z porovnání rovnic (6) a (20), (7) a (23), (8) a (26) na jevo jde, jsou reciproké, že každé takové dvě křivky jsou sobě podobny, co do polohy však hlavní osa křivky jedné že obsahuje pobočnou osu křivky druhé.

V obr. 1. zobrazena, jak již svrchu podotčeno, jedna část útvarů K a **N**, odpovídající jedné oblině kuželové plochy **P**: jedna z křivek křivosti K obsažených ve ploše (2) a příslušná část plochy normál **N**, kteráž omezena průseky F a G s dvěma rovinami $\perp Z$, položenými body f a g, kteréžto křivky průsečné však ellipsami nejsou. Vlastní průsek plochy **N** v rovině (XZ) jest oblouk $\alpha v \gamma$ ellipsy E (22), jejíž velká poloosa $= \overline{ov} = a'_2$, malá $= \overline{om} = \overline{on} = b'_2$ (23), vlastní pak průsek v rovině (YZ) oblouk $\beta u \delta$ hyperboly H (25), jejíž poloosa realná $= \overline{ou} = a'_3$, imaginárná $= \overline{op} = \overline{oq} = b'_3$ (26); průsek s rovinou $(XY($ zobrazen není. Oblouky tyto končí v dotyčných bodech α, γ, β, δ na povrchových přímkách plochy **N** obsažených v rovinách souřadnic, N_a, N_c, N_b, N_d; jim odpovídají souměrné ku X a Y oblouky na druhé oblině plochy **N**, ostatní pak části ellipsy (22) a hyperboly (25) jsou liché, nenáležejíce k vlastním průsekům plochy.

Abychom ustanovili *řídící plochu kuželovou* odpovídající rozvinutelné ploše **N**, veďme počátkem souřadnic rovnoběžku ku normále (9), (10):

$$y = \frac{\mu^2 \eta}{\nu^2 \xi} x, \tag{28}$$

$$z = -\frac{\mu^2 \zeta}{\xi} x; \tag{29}$$

eliminací proměnných ξ, η, ζ, z rovnic (28), (29), (1) a (2) obdržíme rovnici plochy žádané

$$\mu^2 x^2 + \nu^2 y^2 = z^2; \tag{30}$$

jest to plocha kuželová stupně druhého, normalná ku ploše (1).

Přistupme nyní ku vyšetření *vratné křivky* rozvinutelné plochy normál **N**. Průměty její na rovinách souřadnic jsou totožny s obalovými křivkami souhlasných průmětů povrchových přímek plochy **N**. Pro průmět normály plochy **P** v bodě (ξ, η, ζ) křivky K platí rovnice (9) a (14), kteréž napišme ve tvaru

$$F \equiv (\mu^2 - \nu^2)\,\xi\eta - \mu^2 \eta x + \nu^2 \xi y = 0 \tag{31}$$

$$\varphi \equiv \nu^2 (\mu^2 + 1)\,\xi^2 + \mu^2 (\nu^2 + 1)\,\eta^2 - \mu^2 \nu^2 r^2 = 0; \tag{32}$$

v rovnicích těchto jsou ξ a η parametry proměnné. Zjednáme-li sobě částečné poměry differencialní

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = (\mu^2 - \nu^2)\,\eta + \nu^2 y, \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = (\mu^2 - \nu^2)\,\xi - \mu^2 x,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 2\nu^2 (\mu^2 + 1)\,\xi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 2\mu^2 (\nu^2 + 1)\,\eta,$$

a dosadíme-li je do známé podmínky pro křivku obalovou *)

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0,$$

vyjde

$$\mu^2 (\nu^2 + 1)\,\eta\,[(\mu^2 - \nu^2)\,\eta + \nu^2 y] - \nu^2 (\mu^2 + 1)\,\xi\,[(\mu^2 - \nu^2)\,\xi - \mu^2 x] = 0. \tag{33}$$

Řešením rovnic (31) a (33) obdržíme

$$\xi = \frac{\mu^2 x + \sqrt[3]{\dfrac{\nu^2 + 1}{\mu^2 + 1} \mu^4 \nu^2 x y^2}}{\mu^2 - \nu^2} \tag{34}$$

$$\eta = -\frac{\nu^2 y + \sqrt[3]{\dfrac{\mu^2 + 1}{\nu^2 + 1} \mu^2 \nu^4 x^2 y}}{\mu^2 - \nu^2}, \tag{35}$$

*) *Dr. F. J. Studnička.* Základ. vyšší math. I. pag. 263.

substituce pak hodnot těchto do rovnice (32) či (14) dává rovnici průmětu křivky vratné V na rovině (XY):

$$\mu^2(\mu^2+1)\left[x+\sqrt[3]{\varrho x y^2}\right]^2+\nu^2(\nu^2+1)\left[y+\sqrt[3]{\frac{1}{\varrho}x^2 y}\right]^2=(\mu^2-\nu^2)^2 r^2, \qquad (36)$$

kdež položeno $\varrho=\dfrac{\nu^2(\nu^2+1)}{\mu^2(\mu^2+1)}$.

Obdobným způsobem sestrojíme rovnici průmětu křivky V na rovině (XZ); částečným differencováním rovnic (10) a (15) dle proměnných parametrů ξ, ζ, a substitucí poměrů získaných do podmínky pro křivku obalovou obdržíme

$$(\mu^2-\nu^2)\,\xi\,[(\mu^2+1)\,\xi-\mu^2 x] - \mu^2(\nu^2+1)\,\zeta\,[(\mu^2+1)\,\zeta-z]=0. \qquad (37)$$

Eliminace proměnných ξ a ζ z rovnic (10), (15) a (37) dává rovnici žádanou

$$\mu^2(\mu^2-\nu^2)\left[x+\sqrt[3]{\tau x z^2}\right]^2+(\nu^2+1)\left[z+\sqrt[3]{\frac{1}{\tau}x^2 z}\right]^2=(\mu^2+1)^2 r^2, \qquad (38)$$

kdež $\tau=\dfrac{\nu^2+1}{\mu^2(\mu^2-\nu^2)}$.

Konečně nabudeme týmž způsobem rovnice obalové křivky průmětů normál na rovině (YZ), t. j. rovnici průmětu křivky vratné V na téže rovině

$$(\mu^2+1)\left[z-\sqrt[3]{\frac{1}{\sigma}y^2 z}\right]^2-\nu^2(\mu^2-\nu^2)\left[y-\sqrt[3]{\sigma y z^2}\right]^2=(\nu^2+1)^2 r^2 \qquad (39)$$

při čemž $\sigma=\dfrac{\mu^2+1}{\nu^2(\mu^2-\nu^2)}$.

Prostorová tato křivka V skládá se ze dvou oddělených, uzavřených a k rovině (XY) souměrných částí, z nichž každá jest evolutou jedné z obou křivek křivosti, daných rovnicemi (1) a (2); v obr. 1. znázorněna jest část jedna, $\alpha\nu\gamma\delta u\beta\alpha$, evoluta křivky K. Každá část tato rozdělena jest rovinami (XZ) a (YZ) ve čtyři shodné a k rovinám těmto souměrné čtvrti, jež souvisí body úvratu α, γ, β, δ, v týchž rovinách obsaženými.

Abychom určili souřadnice bodů úvratu (α, γ) v rovině (XZ), položme $y = o$ v rovnicích (36) a (39), načež obdržíme

$$x = \pm \frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu\sqrt{\mu^2+1}}\, r, \quad y = o, \quad z = \pm \frac{\nu^2+1}{\sqrt{\mu^2+1}}\, r, \tag{40}$$

kdež platí znaménka souhlasná i protivná; jest tedy čtvero bodů úvratu v rovině (XZ) souměrných k osám X a Z. Za $x = o$ plynou z rovnic (36) a (38) souřadnice čtyř bodů úvratu (k nimž náležejí β a δ,) obsažených v rovině (YZ):

$$x = o, \quad y = \pm \frac{\mu^2 - \nu^2}{\nu\sqrt{\nu^2+1}}\, r, \quad z = \pm \frac{\mu^2+1}{\sqrt{\nu^2+1}}\, r. \tag{41}$$

Tyto body úvratu (40) a (41), z nichž čtyři, jimž odpovídá z negativné, v obrazci znázorněny, jsou totožny s dotyčnými body povrchových přímek (24) a (27) plochy **N**, jakožto tečen vlastních průseků plochy (22) a (25).

Považujíce v rovnicích (36), (38), (39) poloměr plochy kulové r za proměnný, obdržíme všemi hodnotami jeho od o do ∞ soustavu křivek vratných ΣV, jež vyplňují *plochu středů křivostí maximalních* **S**. Eliminace proměnné r z kterýchkoli dvou z rovnic (36), (38), (39) dává rovnici této plochy; tak na př. podílem rovnic (36) a (39), dělíme-li je zároveň z, obdržíme

$$\frac{\mu^2(\mu^2+1)\left[\frac{x}{z} + \sqrt[3]{\varrho\frac{x}{z}\left(\frac{y}{z}\right)^2}\right]^2 + \nu^3(\nu^2+1)\left[\frac{y}{z} + \sqrt[3]{\frac{1}{\varrho}\left(\frac{x}{z}\right)^2\frac{y}{z}}\right]}{(\mu^2+1)\left[1 - \sqrt[3]{\frac{1}{\sigma}\left(\frac{y}{z}\right)^2}\right]^2 - \nu^2(\mu^2-\nu^2)\left[\frac{y}{z} - \sqrt[3]{\sigma\frac{y}{z}}\right]^2}$$

$$= \left(\frac{\mu^2-\nu^2}{\nu^2+1}\right)^2, \tag{42}$$

kterážto rovnice, jsouc tvaru

$$F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0,$$

náleží ploše kuželové. Že plocha **S** jest kuželová, vysvítá také z toho, že je totožna s obalovou plochou rovin normál plochy kuželové **P**, jež vesměs středem jejím procházejí.

Roviny (XZ) a (YZ) protínají plochu **S** v přímkách realných, jež obsahují body úvratu (jako α, β, γ, δ) křivek vratných ΣV; rovnice přímek $U\alpha$ a $U\gamma$ v rovině (XZ) obdržíme z rovnice (42) substitucí $y = 0$:

$$x = \pm \frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu(\nu^2 + 1)} z, \tag{43}$$

a rovnice přímek $U\beta$ a $U\delta$ v rovině (YZ) z rovnic (36) a (38) substitucí $x = 0$ a eliminací proměnné r:

$$y = \pm \frac{\mu^2 - \nu^2}{\nu(\mu^2 + 1)} z. \tag{44}$$

Rovina (XY) posléze seče plochu **S** ve dvou přímkách imaginarných

$$y = \pm \frac{\mu(\nu^2 + 1)}{\nu(\mu^2 + 1)} ix, \tag{45}$$

kterážto rovnice jest výsledkem eliminace r z rovnic (38), (39), a substituce $z = 0$.

V obr. 1. znázorněna část plochy **S** omezená průsekem L s rovinou $\perp Z$ položenou bodem l; každá taková křivka L má dvě osy k sobě kolmé v rovinách (XZ), (YZ) a v průsečících os s přímkami $U\alpha$ . . . δ čtyři body úvratu.

Přehled novějších pokroků v astronomii.

Sepsal

dr. **August Seydler**

(Pokračování).

7. Závěrečné úvahy o slunci.

V dosavadních článcích hleděl jsem vypsati nejdůležitější *faktické* vymoženosti v oboru vědomostí našich o slunci, vystříhaje se při tom, pokud jen bylo lze, všech domněnek, všech hypothetických vět, které, určeny k překlenutí těch propastí, jež jednotlivá fakta od sebe dělí, nechovají ve své duchaplnosti vždy také i záruku své pravdivosti. Jedině tímto spůsobem lze sobě ve vlnobití nejrůznějších náhledů, jež na nás ze všech stran doráží, zachovati jakýsi přehled, jakousi střízlivosť úsudku, jenž zevnějším leskem vzdušné často budovy vědecké nenechá se ihned oslepiti. Při vší stručnosti*) výkladů mých seznal zajisté

*) Slovo to jest zajisté oprávněno, uvážíme-li, že spis Secchiho čítá stran 852, Lockyerův str. 676, Proctorův str. 503.