

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bohumil Kučera

O některých analogiích mezi hydrodynamikou a naukou o elektřině

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 1, 74--103

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123720>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1917

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Tedy $z = \pi ab$.

$$z = \pi \frac{a^2}{\cos \beta} \sqrt{\sin(\beta + \psi) \sin(\psi - \beta)}$$

a dosadíme-li za a (1), bude

$$z = \frac{\pi}{\cos \beta} \cdot \frac{m^2 \sin^2 2\beta}{4 \sin^2(\psi - \beta)} \sqrt{\sin(\beta + \psi) \sin(\psi - \beta)}$$

a tedy

$$K = \frac{1}{3} \frac{\pi}{\cos \beta} \frac{m^2 \sin^2 2\beta}{4 \sin^2(\psi - \beta)} \sqrt{\sin(\beta + \psi) \sin(\psi - \beta)} \cdot m \sin \varepsilon,$$

kde $\varepsilon = \psi + \beta$, tedy po úpravě vložením některých činitelů pod odmocnínku

$$K = \frac{1}{6} \pi m^3 \sin 2\beta \sin \beta \sqrt{\left[\frac{\sin(\psi + \beta)}{\sin(\psi - \beta)} \right]^3},$$

kterýžto výraz je schopný logaritmického počítání.

(Dokončení.)

O některých analogiích mezi hydrodynamikou a naukou o elektřině *).

Žákům středních škol píše prof. Dr. **Bohumil Kučera**.

Hydrodynamikou nazývá se nauka o pohybu kapalin. Některé vlastnosti proudící kapaliny jeví velikou formální podobnost s vlastnostmi elektrického (magnetického) pole nebo s vlastnostmi proudící elektřiny, takže duch lidský, zvyklý objasňovati si neznámé zjevy z denní zkušenosti běžnými a názornými zjevy mechanickými, začasté podléhal pokušení, viděti v těchto podobnostech více než *analogii*, viděti v nich *výklad* zjevů neznámých. V dalších vývodech poznáme, že začasté není toto počínání si oprávněno, ježto oba druhy zjevů jeví vedle podobností také rozpory, jež ovšem stávají se začasté patrnými teprve tehdy, sledujeme-li zjevy podrobně, nejlépe cestou mathematické analýse.

*) Tento článek řadí se k dřívějším „O pohybu otáčivém“ a „O rázu těles“ v ročníku loňském a předloňském a platí o něm totéž, co tam bylo řečeno. Učebnice fysiky pro vyšší třídy středních škol Jeništa-Mašek Nachikalova, jejíž vývody článku doplňuje, jest citována dílem (I. či II.) a stránkou a to na prvním místě vydání pro gymnasia, na druhém vydání pro realky. Článek přináší současně materiál pro řešení fysikálních úloh.

K usnadnění úvah hydrodynamických předpokládáme za-
časté, že kapalina nejeví *vnitřního tření*, že není viskosní, nemá
viskositu, to jest že při vzájemném posunutí jejich částic ne-
vzniká odporující síla (I, 114, 123), že kapalina je *ideální*. Od
ideální kapaliny požadujeme ještě i jiné vlastnosti, jež se nám
ozřejmí teprve průběhem dalších výkladů. Výsledky, k nimž
dojdeme, platí pak zcela přesně ovšem pouze pro kapaliny ide-
ální, leč chování se kapalin skutečných se často od nich liší
velmi málo, neboť kapaliny jako voda, alkohol, aether a j. jeví
vnitřní tření poměrně malé.

1. *Postupný pohyb kapaliny jakožto celku*. Máme-li uzavřenou
a kapalinou zcela vyplněnou nádobu, podléhá při pohybu po-
stupném týmž zákonům jako těleso tuhé, nenastane v kapalině
žádného vzájemného posunutí částic. To lze snadno pokusem
dokázat, vytvoříme-li na př. ve vodě kapkou anilínové modře
nebo několika úlomky inkoustové tužky zbarvená vlákna.

Je-li kapalina podrobená vlivu zemské tíže v klidu, jest
tlak v téže hloubce pod povrchem stejný, každý horizontální řez
kapalinou jest *hladinou* (I. 116, 126). Stejně je tomu, pohybuje-li
se kapalina rovnoměrně. Při pohybu zrychleném (neb zpzděném,
o zrychlení záporném) směrem různým od vertikálního tomu
tak není.

Dejme tomu, že se kapalina specifické hmoty s i s nádo-
bou pohybuje horizontálně se zrychlením rovným a . Představme
si v ní horizontální váleček délky l a průřezu q , jehož osa sou-
hlasí se směrem zrychlení. Na přední straně sloupečku účinkujž
hydrostatický tlak p_1 , na zadní pak p_2 . Pak je úhrnná síla účin-
kující směrem pohybu na váleček rovna $f = (p_2 - p_1) q$. Ježto
je hmota válečku $m = q l s$, a síla dle základního zákona New-
tonova rovna součinu z hmoty a zrychlení (I. 18, 19.), musí

$$(p_2 - p_1) q = q l s a \quad \text{čili} \quad \frac{p_2 - p_1}{l} = sa. \quad (1)$$

Roste tedy tlak v téže horizontální rovině, postupujeme-li
proti směru zrychlení a sice vzroste při postupu o jednotku
délkovou o veličinu sa . Je-li tlak dán vertikálním sloupcem
kapaliny výšky h , máme

$$p_1 = h_1 s g \quad p_2 = h_2 s g \quad \text{a} \quad \frac{h_2 - h_1}{l} = \frac{a}{g}, \quad (2)$$

kde g je zrychlení zemské tíže. Volný povrch kapaliny jest skloněn k horizontále o úhel ϑ , kde

$$tg \vartheta = \frac{h_2 - h_1}{l} = \frac{a}{g}, \quad (3)$$

takže kapalina stojí ve směru (kladného) zrychlení níže. Je-li pohyb rovnoměrný, $a = 0$, je $h_2 = h_1$ volný povrch horizontální. Kdyby nebylo otřesů, udával by volný povrch vody ve sklenici každou změnu rychlosti železničního vozu. Zjev námi studovaný vysvětluje, proč se přejeje voda ve sklenici, pohneme-li jí rychle na stole.

2. Rotace kapaliny jakožto celku. Otáčíme-li nádobou, v níž jest kapalina opatřena anilinem zbarvenými vlákny kolem vertikální osy, pozorujeme dívající se shora, že kapalina zprvu zůstává v klidu, a později, že otáčivý pohyb postupuje od stěn blíže k ose otáčečí, až konečně se dostane celá kapalina v otáčení jako tuhý celek, takže vzájemná poloha její částic se nemění. Při tom nabyl volný povrch kapaliny vydutého tvaru, jehož povahu můžeme počtem zjistiti.

Znenáhlé postupování rotace od stěn k ose rotační vysvětluje se vnitřním třením. Rotující nádoba strhuje s sebou nejprve částice kapaliny, které lpějí na stěnách; tato vrstva strhuje následkem vnitřního tření k rotaci další koncentrickou vrstvu kapaliny od stěn vzdálenější a podobně šíří se pohyb dále. Když nastal svrchu zmíněný stav ustálený (stacionární), přestává vnitřní tření působiti a bude tedy výsledek naší úvahy od viskosity kapaliny nezávislý.

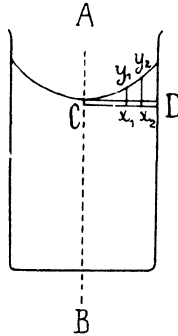
Představme si v kapalině (obr. 1.), která jakožto celek se otáčí se stálou úhlovou rychlostí ω kolem osy AB , horizontální váleček CD průřezu q , který počínaje od nejnižšího bodu C povrchu, charakterisovaného vzdáleností $x_0 = 0$ od osy otáčečí, jde až ku stěně nádoby ve vzdálenosti $x_n = R$, kde R je poloměr nádoby. Výška volného povrchu kapaliny nad válečkem budíž označena písmenou y s příslušným indexem, takže patrně $y_0 = 0$. Uvažujeme-li o elementu válečku mezi x_1 a x_2 , jehož hmota jest $m = (x_2 - x_1) \cdot q \cdot s$, tedy vidíme, že na něj musí působiti dostředivá síla $m \cdot r \cdot \omega^2$, kde r jest jeho vzdálenost od osy otáčečí, aby udržoval se v rovnoměrném otáčení (I 59, 63).

Ježto lze klásti $r = \frac{1}{2}(x_2 + x_1)$, jest síla dostředivá dána výrazem

$$(x_2 - x_1) q \cdot s \cdot \frac{1}{2} (x_2 + x_1) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} q s \omega^2 (x_2^2 - x_1^2).$$

Jedinou vnější silou na element působící jest hydrostatický přetlak sloupečku y_2 nad y_1 , rovný $(y_2 - y_1) q \cdot s \cdot g$, takže lze psáti podmínku rovnovážného stacionárního stavu

$$y_2 - y_1 = \frac{\omega^2}{2g} (x_2^2 - x_1^2).$$



Obr. 1.

Myslíme-li si celý váleček rozdělený na n elementů řezy ve vzdálenostech $x_0 = 0, x_1, x_2 \dots x_{n-1}, x_n = R$, můžeme pro všechny psáti obdobně

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= \frac{\omega^2}{2g} (x_1^2 - x_0^2), \\ y_2 - y_1 &= \frac{\omega^2}{2g} (x_2^2 - x_1^2) \\ &\vdots \\ y_n - y_{n-1} &= \frac{\omega^2}{2g} (x_n^2 - x_{n-1}^2). \end{aligned}$$

Sečteme-li všech n rovnic, tedy, ježto $x_0 = 0$ a $y_0 = 0$, zbude

$$y_n = \frac{\omega^2}{2g} x_n^2. \quad (4)$$

Integrálním počtem*) obdrželi bychom tž výsledek rychleji. Podmínkou rovnováhy, píšeme-li za

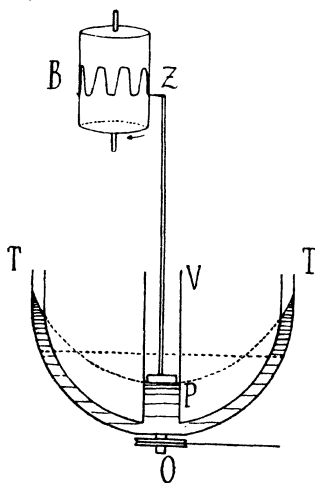
$$x_2 - x_1 = dx \quad y_2 - y_1 = dy \quad \text{a} \quad r = x,$$

jest

$$q \cdot s \cdot dx \cdot x \cdot \omega^2 = dy \cdot q \cdot s \cdot g$$

čili

$$\int_0^{y_n} dy = y_n = \frac{\omega^2}{g} \int_0^{x_n} x dx = \frac{\omega^2}{2g} x_n^2.$$



Obr. 2.

Vidíme, že každý osový řez volným povrchem jest *parabola*, že tedy má volný povrch tvar *rotačního paraboloidu*, a to u různých kapalin téhož, neboť jediná tuto různost charakterisující konstanta, totiž specifická hmota kapaliny, z počtu vypadla. Na velikosti vnitřního tření závisí pouze doba, za kterou nastane stav ustálený při dané rychlosti rotační a tvaru nádoby.

*) Viz *Bydžovský-Vojtěch*: Matematika pro nejvyšší třídu gymnasií a reálných gymnasií, str. 55 n. nebo *Dr. J. Vojtěch*, Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických (Praha 1916, nákladem Jednoty českých matematiků a fysiků), str. 108 n. Tuto knihu lze doporučiti k studiu těm, kdož jsou obeznámeni s matematikou středoškolskou, chtějí poznati základy vyšší analýse, potřebné k hlubšímu studiu fysiky.

Leží na snadě, jak lze užití popsaného zjevu v praxi ku měření rychlostí rotačních nebo takových postupných, které se soukolím, hnacím řemenem a pod. na rotační dají převést. Obr. 2. znázorňuje schematicky zařízení, kterým se na válci B , hodinovým strojem otáčeném, automaticky zaznamenává rychlost, kterou sjíždí klec do šachty resp. rychlost otáčecí bubnu, na kterém se navíjí těžné lano, na němž je zavěšena.*) Sestává ze železného válce V opatřeného dvěma trubnicemi T a částečně naplněného rtutí, na níž spočívá pohyblivý plavák P opatřený psacím zařízením Z . Válec uvádí se v otáčení kol osy O , jsa pevně soukolím sprážen s navíjecím bubnem. Z diagrammu napsaného lze zjistiti, kolikrát, kdy a s jakou okamžitou rychlostí klec sjela nebo vyjela. Nečiní zvláštních obtíží podati theorii tohoto zařízení.

3. *Boční a čelní tlaky u rotujícího válce kapalinového.* Z předchozího odstavce jest patrno, že postranní (boční) tlak, kterým na rotující válec kapalinový působí stěna nádoby, musí býti větší, než kdyby kapalina byla v klidu. Představme si válcovitou nádobu poloměru R úplně kapalinou vyplněnou a kolem osy válce rotující (obr. 3.). Aby částice u stěny rotovaly, musí na ně působiti dostředivá síla, která, jak jsme našli v odst. 2., je dána tlakem sloupce kapalinového výšky y_n , patřícího k vzdálenosti od osy $x_n = R$. Ježto výška sloupce jest

$$y_n = \frac{\omega^2}{2g} R^2,$$

jest příslušný tlak, t. j. síla na jedničku plošnou

$$P = y_n \cdot s \cdot g = \frac{1}{2} s \omega^2 R^2. \quad (5)$$

Tento tlak musí přistupovati k obyčejnému tlaku hydrostatickému, má-li býti rovnováha; stejným tlakem reakčním, pochodícím od reakční síly odstředivé, působí rotující válec kapalinový na stěny nádoby.

Kdyby kapalina nebyla v nádobě uzavřena, nýbrž měla horní povrch volný, tu by se kolem osy povrch snížil, počínaje

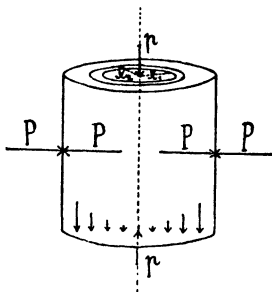
*) Jest to patentované zařízení čes. inž. *Karlíka*, které jsem laskavostí majitele p. Augsteina a techn. ředitele p. ing. *Wojciechowskiho* měl příležitost pozorovati v chodu na důlu „Anna“ v Lánech.

jistou vzdáleností pak zvýšil. Z toho usuzujeme, že horní i spodní dno nádoby podléhá jiným tlakům, než za rovnováhy v klidu. Vypočítáme je jednoduchou úvahou. Vedle hydrostatického tlaku působí ve vzdálenosti r od osy od rotace tlak $P = \frac{1}{2} s \omega^2 r^2$, jenž se ovšem v kapalině šíří stejnoměrně na všechny strany. Na mezikruží plochy $\pi(x_2^2 - x_1^2)$ horního dna nádoby působí tedy od rotace kapaliny síla

$$\begin{aligned} R \cdot \pi(x_2^2 - x_1^2) &= \frac{1}{2} \pi s \omega^2 (x_2^2 - x_1^2) \cdot r^2 \\ &= \frac{1}{2} \pi s \omega^2 (x_2^2 - x_1^2) \cdot \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2), \end{aligned}$$

píšeme-li za kvadrát střední vzdálenosti mezikruží od osy

$$r^2 = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2).$$



Obr. 3.

Rozdělíme-li celé dno na n mezikruží kruhy o poloměrech

$$x_0 = 0, x_1, x_2 \dots x_{n-1}, x_n = R$$

a sečteme-li veškeré síly od rotace na dno působící, t. j.

$$f_{01} = \frac{1}{4} \pi s \omega^2 (x_1^4 - x_0^4)$$

$$f_{12} = \frac{1}{4} \pi s \omega^2 (x_2^4 - x_1^4)$$

$$\vdots$$

$$f_{n-1, n} = \frac{1}{4} \pi s \omega^2 (x_n^4 - x_{n-1}^4)$$

obdržíme sílu výslednou F , již se snaží válec kapalinový prodloužit se

$$F = \frac{1}{4} \pi s \omega^2 R^4. \quad (6)$$

Ve výpočtu je zase skryta integrace. Síla dF na elementární mezikruží šířky dx poloměru x a plochy $2\pi x \cdot dx$ jest

$$dF = 2\pi x \cdot dx \cdot \frac{1}{2} s \omega^2 x^2 = \pi s \omega^2 x^3 \cdot dx$$

a síla celková

$$F = \pi s \omega^2 \int_0^R x^3 dx = \frac{1}{4} \pi s \omega^2 R^4.$$

Tato síla jest ovšem po dnu nestejnomořně rozdělena rostouc od osy směrem k vnějšmu obvodu, leč je-li poloměr válce velmi malý, můžeme ji mysliti nahraeznu tlakem p , působícím stejnořně na celé dno. Pak ovšem je $F = \pi R^2 p$ a tedy tento tlak

$$p = \frac{1}{4} s \omega^2 R^2 = \frac{1}{2} P. \quad (7)$$

Jest zajímavo a důležitó, že průměrný tlak, který musí přistoupiti k obyčejnému tlaku hydrostatickému na koncích rotujícího válce, jest jen poloviční než tlak na stěnách jeho. Kdybychom tedy celý rotující válec ponořili do kapaliny a vedle tlaku hydrostatického podrobili stejnořnému tlaku vnějšmu P , způsoběnému na př. pístem na kapalině spočívajícím, museli bychom na koncích válce dáti působiti tahům rovným $\frac{1}{2} P$, aby byla rovnořaha. Neboť teprve tehdy by na koncích působil vnější tlak

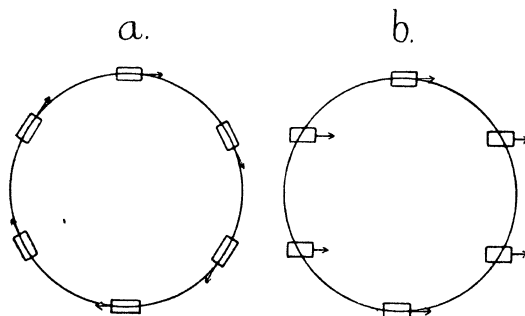
$$P - \frac{1}{2} P = \frac{1}{2} P = p,$$

rovný tlaku rotujícího sloupce. Kdyby tahu $\frac{1}{2} P$ nebylo, tu by se rotující válec snažil zkrátit vnějším přetlakem $\frac{1}{2} P$.

4. *Vírová vlákná.* Vírovým vláknem nebo s *Lordem Kelvinem* správněji *vírovým sloupcem* (vlastně sloupcovým vírem, „columnar vertex“) nazýváme válcovitou část tekutiny, která rotuje jako těleso tuhé se stejnořnou úhlovou rychlostí, jsouc obklopena tekutinou, která, byť se i pohybovala, přece se neotáčí. Po smyslu *Helmholtzově*, který prvý svým slavným pojednáním z r. 1858 „Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen“, nauku o vířivých pohybech kapalin založil, jsou vírovými vlákný (Wirbeläden) části kapaliny vyplněné vířivým pohybem, t. j. vírovými sloupci nekonečně malých poloměrů, a omezené čarami, které v celém svém průběhu udávají směr okamžité osy rotační, a to části průřezu nekonečně malého. Nám bude sloužit název vírové vláknó pro vírové sloupce libovolných poloměrů. Podstatnou vlastností vířivého pohybu jest, že se část kapaliny otáčí jako celek, jako těleso tuhé. Částice znázorněná ve svém pohybu

obr. 4a jest tedy částí vírového vlákna, kdežto částice obr. 4b jí není, byť i sledovala dráhu kruhovou.

Viděli jsme, že vírové vlákno může být v rovnováze, je-li podrobena všestrannému tlaku $\frac{1}{2}s\omega^2R^2$, kdežto jeho konce jsou současně podrobena tahu $\frac{1}{4}s\omega^2R^2$. Z toho plyne, že vírové vlákno může končit pouze tam, kde tento tah může působit, t. j. na stěně, nebo že může být samo v sobě ve tvaru prsténce uzavřeno, že však nemůže končiti ve volném povrchu kapaliny, neboť pak by tento byl tažen dolů, ani volně v kapalině. Příklad vírových vláken máme ve vírech, které vzniknou v klidné kapalině rychlým pohybem tuhého tělesa opatřeného ostrou hranou, na př. lžičky v číšce čaje, vesla ve vodě. Tato vírová vlákna



Obr. 4. a, b.

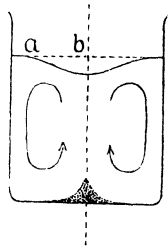
ovšem poměrně rychle zanikají následkem vnitřního tření každé skutečné kapaliny.

Připínají-li se konce vírového vlákna ke dvěma pohyblivým tuhým tělesům, tedy longitudinálním tahem jejich se obě tělesa k sobě přibližují, jako by se přitahovala. I leží na snadě myšlenka, vysvětlovati obdobně přitažlivou sílu mezi dvěma tělesy opačně zeledrovanými (zmagnetisovanými).

Dle *Faraday-Maxwellovy* theorie (II. 26, 29) pochází vzájemné přitahování i odpuzování takovýchto těles od siločar (resp. silotubic jimi omezených), které spojují opačné náboje elektrické (magnetické, viz II. obr. 1. a 14., resp. 3. a 18.), a které se snaží právě tak jako vírová vlákna podélně se zkrátit a příčně rozšířit. Mohly by tedy snad silokřivky býti vírovými vlákny

v etheru světelném. Ale dá se dokázati (viz na př. *J. J. Thomson*, *Elemente der mathem. Theorie des Elektr. und des Magnetismus*. Do němčiny přeložil Wertheim, Brunšvík), že v silotrubicích je příčný tlak přesně roven podélnému tahu, takže v mediu o všestranném tlaku P musí na koncích silotrubice k udržení rovnováhy působit tah $2P$, kdežto u vírového vlákna, jak jsme viděli, pouze $\frac{1}{2}P$. Tím možnost podobného výkladu padá.

Rozvříme-li vodu v cylindrické nádobě tyčinkou nebo lžičkou, nabude povrch její tvaru v obr. 5. přibližně znázorněného. U stěn a dna se následkem přilnavosti a vnitřního tření voda téměř nepohybuje. Ježto by se voda u dna následkem přetlaku v místech a nad místy b udržovala v rovnováze, kdyby rotovala s ostatní vodou ve volné nádobě, vzniká právě tímto pře-



Obr. 5.

tlakem ve vodě nerotující pohyb směrem od a ku b , takže se voda vedle rotace uvede také v proudění směrem šipek. Nacházejí-li se blíže dna lehké předměty (křídový prášek), odnášejí se směrem k ose nádoby, kdež se nakupí, jak snadno můžeme zjistiti. Týž zjev vykládá, proč potoky nebo říčky v prudkých záhybech podrývají a vyhlubují břeh ve vnějším oblouku, kdežto u vnitřního se tvoří nánosem mělčina. Jestliže patrně, že záhyb jednou, třeba náhodně vzniklý, se časem stává ostřejším. Přísloušným je od časů klassických u řeky Maiandros (odtud v architektuře „meandr“), dnes zvané Menderes, v Malé Asii.

5. Zdroje proudění. Pojednavše krátce o vírech, musíme se zmíniti o druhém typu pohybu kapalínového. Představme si, že v nesmírně velikém objemu kapaliny jsou jednotlivá význačná místa, body, v nichž kapalina neustále stejnoměrně — takže

sekundové množství je stálé — vzniká (tvorí se) neb zaniká (mizí). Takovéto body nazýváme *zdroje*, a to buď kladné, *vzniky*, nebo záporné, *zániky*.

Tato naše představa jest ovšem vzhledem k nezničitelnosti hmoty pouze ideální, leč můžeme ji přibližně uskutečniti, myslíme-li, že do vzniků přivádí se kapalina velmi tenkými trubiciemi z nějaké vnější nádrže, kdežto ze zániku podobně odtéká. Rozdíl mezi poměry nastávajícími v ideálním obraze a v tomto uskutečnění bude tím menší, čím trubice jsou užší. Vlivem zdrojů vzniká ovšem v kapalině pohyb, takže rychlost kapaliny v každém místě má za ustáleného stavu zcela určitou stálou velikost i stálý směr. Dále jest patrné, že v libovolném objemu úplně ohraničeném, t. j. omezeném myšlenou uzavřenou plochou, není-li v něm zdrojů, musí množství *nestlačitelné* kapaliny být stálé, neproměnné, jinými slovy, kolik kapaliny v jednotce časové do tohoto objemu vstupuje, tolikéž jej v témž čase opouští.

Postupujeme-li v kapalině od bodu k bodu stále ve směru rychlosti, vzniká souvislá čára, *křivka proudová*, jejíž tečná v každém bodě udává směr toku kapaliny. Proložíme-li proudové křivky všemi body obvodu malé plošky, na toku kolmé, vzniká *trubice proudová*, útvar význačný tím, že jeho stěnami žádná kapalina ani nevstupuje dovnitř trubice ani nevystupuje z ní ven. Snadnou úvahou docházíme k poznatku, že proudové trubice mohou začínati nebo končiti pouze na zdrojích, nebo u nekonečně rozlehlé kapaliny v nekonečnu. Jest patrné, že proudová trubice nemůže spojovati vznik se vznikem nebo zánik se zánikem — spojuje vždy vznik se zánikem. Mluvíme-li o izolovaném zdroji, myslíme tím zdroj tak vzdálený od jiných, že kapalina od něho proudí na všechny strany stejně, čímž trubice proudové nabývají tvaru kuželů, jichž vrchol jest ve zdroji.

Množství *nestlačitelné* kapaliny, které v časové jednotce prostupuje libovolným průřezem proudové trubice, jest ovšem u všech průřezů stejné, neboť uvnitř trubice není zdrojů a kapalina následkem své *nestlačitelnosti* nemůže se nikde v trubici hromaditi. Myslíme-li si v některém místě trubice kolmý průřez plochy q_1 , jímž proudí kapalina rychlostí v_1 , jest objem za jednotku časovou prošeďší kapaliny patrně $v_1 q_1$ a její hmota — je-li s hmota specifická — jest $sv_1 q_1$. Z definice proudové trubice

plyne dle hořejšího pro jiný kolmý průřez q_2 vztah

$$sv_1q_1 = st_2q_2$$

čili

$$v_1 : v_2 = q_2 : q_1, \quad (8)$$

to jest, rychlosti nestlačitelných kapalin jsou v obráceném poměru průřezů proudových trubíc. Velmi snadné jest sevšeobecnění těchto vývodů na kapaliny stlačitelné. I tu plyne z definice proudové trubice, že každým průřezem prochází současně totéž množství kapaliny — ač ovšem ne týž její objem. Spec. hmoty v různých průřezech jsou různé a platí tudíž všeobecnější vztah

$$s_1v_1q_1 = s_2v_2q_2.$$

Na snadě leží analogie s ustáleným prouděním elektřiny ve hmotných vodičích, na př. ve vodivém roztoku. Isolovaný drát tvoří proudovou trubici. Ježto intenzitu proudu J definujeme jakožto množství elektřiny průřezem trubice v jednotce časové procházející, jest patrně

$$J_1 = s_1v_1q_1, \quad J_2 = s_2v_2q_2,$$

kde s_1 a s_2 jsou hustoty elektřiny. Rychlost proudění jest ovšem stálá, takže $v_1 = v_2$. Definujeme-li *hustotu proudovou* i jakožto množství elektřiny procházející za vteřinu jedničkovým průřezem na směru proudu kolmým, jest patrně

$$i_1 = \frac{J_1}{q_1} \quad \text{a} \quad i_2 = \frac{J_2}{q_2}.$$

Poněvadž pak $J_1 = J_2$, platí

$$i_1 : i_2 = q_2 : q_1;$$

hustota proudová je obráceně úměrna kolmému průřezu trubice proudové.

Vydatností (méně vhodně „silou“ nebo „mohutností“) *zdroje* nazýváme množství kapaliny ve zdroji za jedničku časovou vzniklé nebo zaniklé; její znamení je kladné u vzniků, záporné u zániků. Myslíme-li si část kapaliny omezenou uzavřenou plochou, která obsahuje zdroj, jest patrně množství kapaliny celkem za vteřinu vystupující z oné plochy dáno algebraickým součtem vydatností všech v ní uzavřených zdrojů.

Mějž ona plocha tvar koule o poloměru r , tedy plošném obsahu rovném $4\pi r^2$, v jejímž středu jest zdroj vydatnosti Q . Považujeme-li poloměr plochy za velmi malý oproti vzdálenosti od nejbližšího zdroje nebo od nejbližší stěny (ohraničení kapaliny), děje se proudění na všechny strany stejnoměrně, takže radiální rychlost kapaliny na ploše kulové jest rovna v , kde

$$sv \cdot 4\pi r^2 = Q,$$

takže radiální rychlost proudu ve vzdálenosti r od zdroje jest rovna

$$v = \frac{Q}{4\pi r^2 s}. \quad (9)$$

Je-li kapalina nestlačitelná, jest její specif. hmota s všude stejná, takže potom ubývá rychlosti proudění se čtvercem vzdálenosti od zdroje. U zdroje negativního, zániku, má Q znamení záporné, takže i rychlost v je záporná; to znamená pouze, že směřuje radiálně dovnitř plochy zdroj obepínající.

6. Rychlostní potenciál. V každém bodě nekonečné nestlačitelné kapaliny, v níž se nachází zdroj, jest rychlost proudění obráceně úměrná čtverci vzdálenosti uvažovaného bodu od zdroje. Přímo do očí bije obdoba s intenzitou pole gravitačního (I. 97, 103) nebo elektrického (II. 27, 29). A vskutku stejně jako si zjednodušujeme problémy gravitační nebo elektrické zavádějíce pojem gravitačního či elektrického potenciálu, můžeme si zjednodušiti hydrodynamické problémy pomocí *potenciálu rychlostního**), ježž definujeme pomocí úvah zcela obdobných.

Jako jest
rozdíl elektrického potenciálu $V_2 - V_1$ mezi blízkými místy A_1 a A_2 (II, obr. 18. resp. 22.) měřen součinem ze složky intenzity elektrického pole F_{21} ve směru spojnice A_2A_1 násobené vzdáleností d obou míst

tak jest
rozdíl rychlostního potenciálu $\psi_2 - \psi_1$ mezi blízkými místy A_1 a A_2 měřen součinem ze složky proudové rychlosti v_{21} ve směru spojnice A_2A_1 násobené vzdáleností d obou míst.

*) Tento název pochází od *Helmholtze*. Zavádíme zde potenciál rychlostní s opačným znamením, než je obvyklé, a to pro analogii s elektrickým.

Jsou tedy rychlostní potenciál a rychlost spojeny vztahem

$$\psi_2 - \psi_1 = v_{21} \cdot d \quad \text{čili} \quad v_{21} = \frac{\psi_2 - \psi_1}{d}. \quad (10)$$

Když od bodu A_n v blízkosti zdroje nakreslíme čáru k bodu A_1 v nekonečné vzdálenosti od zdroje, kde rychlost je blíže rovna nulle, rozdělíme ji na elementy, vypočítáme rozdíly rychlostního potenciálu mezi konci elementů a sečteme všechny, obdržíme rychlostní potenciál ψ_n v daném místě A_n kapaliny. Zcela obdobným způsobem *) jako v Jeništa-Mašek-Nachtikalové učebnici v článku „Potenciál pole elektrostatického“ obdržíme za výsledek, že potenciál ψ ve vzdálenosti r od zdroje vydatnosti Q jest roven

$$\psi = \frac{Q}{4\pi s \cdot r}, \quad (11)$$

což odpovídá úplně potenciálu elektrostatickému, v němž na místě náboje píšeme $\frac{Q}{4\pi s}$, stejně jako jsme to museli učiniti ve vzorci (9), aby rychlost odpovídala intenzitě elektrostatického pole, jak plyne ze zákona Coulombova. Z výrazu (11) je patrné, že *plochami stejného potenciálu čili hladinami* jsou u jediného osamělého zdroje soustředné koule. Rovněž snadno nahlédneme, že křivky proudové stojí vždy kolmo na hladinách. Kdyby tomu tak nebylo, padala by složka rychlosti do hladiny a kdybychom postupovali podél ní, přicházeli bychom na místa nižšího potenciálu rychlostního, což odporuje definici hladiny.

Od ideální kapaliny požadujeme, aby v libovolném jejím bodě se skládaly rychlosti, pocházející od jednotlivých zdrojů, v rychlost výslednou dle pravidla známého z rovnoběžníka sil, nebo což jest totéž, aby v daném bodě způsoboval určitý zdroj touž rychlost toku, jako by ostatních zdrojů nebylo. Tento nový požadavek nazýváme principem superposice rychlostí, a jest tím lépe splněn, čím menší vnitřní tření v kapalině stává. Pripustíme-li platnost principu superposice, můžeme snadno naléztí výsledný rychlostní potenciál, který panuje v určitém bodě A

*) Metoda integrálního počtu je aplikována na týž případ ve *Vojtěchových* „Základech“ str. 165.

působením libovolného počtu zdrojů. Mysleme si z bodu A libovolnou čaru vedenou do nekonečna a rozdělenou na nesmírně mnoho elementů délkových d . Jsou-li $v_1, v_2, v_3 \dots$ složky rychlostí ve směru prvního délkového elementu d myšlené čáry pocházející od zdrojů $Z_1, Z_2, Z_3 \dots$, pak celková potenciální difference mezi začátkem elementu A a jeho koncem je rovna $(v_1 + v_2 + v_3 + \dots)d$, t. j. rovna součtu potenciálních difference pocházejících od různých zdrojů jednotlivě. Z toho plyne: Jsou-li vzdálenosti $AZ_1 = r_1, AZ_2 = r_2$ atd. a vydatnost zdroje Z_1 rovna Q_1 atd., pak je výsledný rychlostní potenciál ψ v bodě A dán vztahem

$$\psi = \frac{1}{4\pi s} \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} + \dots \right) \quad (12)$$

Pocházejí-li tedy rychlosti toku pouze od zdrojů (kladných vzniků a záporných zániků), jest jak patrně rychlostní potenciál zcela určitou, nebo jak říkáme jednoznačnou funkcí bodovou, závislou pouze na poloze uvažovaného bodu A . Proudění, které za těchto podmínek nastává, zoveme *potenciálovým*.

Porovnáme-li výraz (12) s výrazem pro elektrostatický potenciál V , který, nazveme-li náboje v místech $Z_1, Z_2 \dots$ postupně $e_1, e_2 \dots$, má tvar

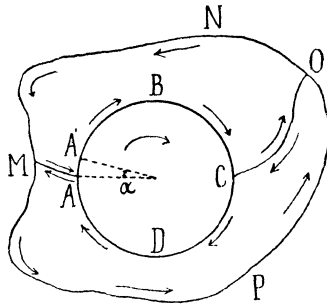
$$V = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \dots \quad (13)$$

vidíme, že formálně $\psi = \frac{1}{4}V/\pi s$. Oba potenciály jsou si úměrny a křivky toku jsou totožny se silokřivkami, plochy téhož potenciálu rychlostního jsou zároveň hladinami elektrickými. Řešení úloh elektrostatických dává nám současně řešení hydrodynamických úloh o proudění potenciálovém, takže na př. obr. 23. II. dílu Fysiky pro reálky znázorňuje zároveň hladiny a proudové křivky vzbuzené dvěma zdroji (vzniky). U dvou zániků obrátil by se pouze směr šipek u proudových křivek.

7. Cirkulace. Mysleme si v kapalíně libovolnou uzavřenou křivku K , rozdělme ji počínajíc bodem A na samé kraťounké elementy délkové d , určeme rozdíly rychlostního potenciálu mezi začátkem a koncem každého elementu a všechny tyto difference sečteme tak, aby křivka byla spojitě dokola kolem

proběhnuta. Tento součet, který nám dává potenciálovou diferencí kolem křivky nazýváme dle *Stokesa cirkulací* kolem křivky. Pochází-li pohyb v kapalině pouze od zdrojů v ní porůznu umístěných, má rychlostní potenciál v každém bodě jedinou určitou hodnotu a proto, vrátivše se do téhož bodu A , z něhož jsme vyšli, dojdeme k téže hodnotě potenciálu, cirkulace kolem uzavřené křivky je rovna nulle.

Představme si nyní, že v kapalině nachází se vírové vlákno, jehož na ose kolmý řez jest dán kruhem $ABCD$ (obr. 6.). Je-li jeho poloměr r a úhlová rychlost vlákna ω , jest tangenciální rychlost v rovna po celém obvodu $r\omega$. Rozdíl potenciálu rychlost-



Obr. 6.

ního mezi body A a A' o vzájemné vzdálenosti $d = r\omega$ jest dán součinem

$$v \cdot d = \overline{AA'} \cdot r\omega = r\alpha \cdot r\omega = \omega r^2 \alpha$$

a součet všech potenciálových rozdílů při oběhu kruhu jednou kolem jest

$$\sum cd = \omega r^2 \cdot \sum \alpha = \omega \cdot r^2 \cdot 2\pi. \quad (14)$$

O tento obnos klesne potenciál, počítáme-li cirkulaci směrem otáčení vírového vlákna, nebo naopak stoupne, počítáme-li ji proti směru otáčení. Všimněme si, že πr^2 je rovno průřezu u vírového vlákna. Poloviční cirkulaci kolem vlákna, t. j. součin ωa , nazýváme dle *Helmholtze vírovou intenzitou vlákna*. Jindy nazývá se též *vírovým momentem* vlákna. Takové pohyby kapaliny, když cirkulace rychlosti kolem okraje libovolného ma-

lého elementu plošného je rovna nulle, zvali jsme potenciálovými neboli nevířivými; má-li cirkulace konečnou hodnotu od nully různou jsou v kapalině víry.

Kdybychom ve výpočtu cirkulace byli do plošky oběhnuté pojali jiné části kapaliny, kde není vířivého pohybu, byli bychom došli k témuž výsledku. Počítejme cirkulaci kolem dráhy $MPONM$ za předpokladu, že mimo vírové vlákno není pohybu vířivého. To vyjádříme vzorcem

$$\text{Cirk } MABCONM = 0 \quad \text{Cirk } OCDAMPO = 0,$$

kde předpis o počítání cirkulace je označen operátorem „Cirk“. Sečteme-li, můžeme patrně nahraditi součet vzorcem

$$\begin{aligned} \text{Cirk } ABCDA + \text{Cirk } MPONM + \text{Cirk } MA + \text{Cirk } AM \\ + \text{Cirk } OC + \text{Cirk } CO = 0. \end{aligned}$$

Ježto však dle předpisu početního

$$\text{Cirk } MA = - \text{Cirk } AM \quad \text{Cirk } OC = - \text{Cirk } CO$$

a

$$\text{Cirk } MPONM = - \text{Cirk } MNOPM$$

plyne to, co jsme chtěli dokázati, že totiž

$$\text{Cirk } MNOPM = \text{Cirk } ABCDA = 2\omega a. \quad (15)$$

Z toho plyne však snadným sevšeobecněním, že cirkulace rychlosti kolem libovolné uzavřené dráhy v kapalině se rovná dvojnásobnému algebraickému součtu vírových intenzit všech vírových vláken, které dráhová křivka obepíná (při čemž vírové intenzity jsou počítány v témž směru oběhu jako myšlená křivka).

Všimněme si, že v kapalině, v níž se nacházejí víry, přestává rychlostní potenciál býti jednoznačným; můžeť míti v témž bodě hodnotu ψ nebo $\psi \pm n2\omega a$ a pod. dle toho, zdali při nějakém myšleném oběhu po uzavřené dráze tato dráha neobejmá žádné vírové vlákno, nebo obepíná n -kráte proběhnuta v jednom či opačném směru vlákno vírové intenzity ωa a pod. Jest tomu podobně jako s datem na zeměkouli, když vyšedše z určitého bodu vrátíme se do něho buď neobešedše nebo obešedše osu zemskou (pól). V tomto druhém případě museli jsme totiž překročiti datovou mez (I, 87. 89.).

8. **Základní věty o vírových vláknech.** Vírovou intenzitou vlákna zvali jsme součin $\pi r^2 \omega = \omega a$, kde r je poloměr vlákna. Lze obecně dokázat, že *není možno v ideální kapalině změnit vnějšími prostředky vírovou intenzitu*. Vnější síly mohou působiti pouze na pevné hranice kapaliny (stěny nádoby), nikoli však na jednotlivé její částice. Proto nemůžeme v kapalině bez vnitřního tření působiti tangenciálními silami na otáčející se vírové vlákno, a nelze tudíž změnit otáčecí moment jeho kolem osy, jehož změna jest vázána na působení dvojic silových.*)

Bylo by však možno vlákno prodloužiti nebo zkrátiti, změnit jeho délku l . Energie vlákna jest čistě kinetická a rovna $\frac{1}{2} K \omega^2$, kde K , moment setrvačnosti rotujícího válce o hmotě M , je roven

$$K = \frac{1}{2} M r^2 = \frac{1}{2} \pi r^2 l s \cdot r^2 = \frac{1}{2} \pi s l r^4. \quad (16)$$

Jest tudíž kinetická energie vlákna rovna $\frac{1}{4} \pi s l r^4 \omega^2$. Nechť se nyní délka vlákna změni z l na $l + \lambda$. K tomu cíli musí působiti na konci vlákna (§ 3. (7)) tah

$$\pi r^2 \cdot \frac{1}{4} s r^2 \omega^2,$$

který vykoná po trati λ práci

$$\frac{1}{4} \pi s \lambda r^4 \omega^2,$$

jež zvýší energii vlákna. Předpokládáme-li pro jednoduchost, že kapalina je nestlačitelná, nezmění se prodloužením objem válce, a nevykoná tudíž tlak působící kolmo na plášť válce žádné práce, která jinak je dána součinem z tlaku a změny objemové. Jest tedy celková energie vlákna, ovšem stále kinetická, rovna

$$\frac{1}{4} \pi s l r^4 \omega^2 + \frac{1}{4} \pi s \lambda r^4 \omega^2 = \frac{1}{4} \pi s (l + \lambda) r^4 \omega^2. \quad (17)$$

Zvýšila se elongací v poměru $(l + \lambda) : l = k$.

Jest ovšem myslitelné, že po elongaci nerotuje již vlákno jako tuhý celek, nýbrž že různé částice mají různé vlastní úhlové rychlosti. Leč není tomu tak. Rozdělme vlákno na částice $m_1, m_2, m_3 \dots$ ve vzdálenostech $q_1, q_2, q_3 \dots$ od osy vlákna před elongací, kteréž se změni na $R_1, R_2, R_3 \dots$ po ní. Před elongací měly společnou úhlovou rychlost ω , po ní mají různé $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \dots$. Pak byla

*) Viz můj článek „O pohybu otáčivém“ v ročníku 44. tohoto Časopisu.

kinetická energie vlákna před elongací rovna

$$\frac{1}{2}(m_1 \varrho_1^2 \omega^2 + m_2 \varrho_2^2 \omega^2 + \dots) = \frac{1}{2} \Sigma m \varrho^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \Sigma m \varrho,$$

po ní jest

$$\frac{1}{2}(m_1 R_1^2 \Omega_1^2 + m_2 R_2^2 \Omega_2^2 + \dots) = \frac{1}{2} \Sigma m R^2 \Omega^2.$$

Větu (17) právě nalezenou, že se kinetická energie vlákna elongací zvýší v poměru k , vyjadřuje vztah

$$\Sigma m R^2 \Omega^2 = k \cdot \Sigma m \varrho^2 \omega^2. \quad (18)$$

Výrok dřívější, že totiž otáčecí moment vlákna nelze změnit, a ovšem že ani elongací se nemění, rovněž snadno vyjádříme. Hybnost první částice byla před elongací $m_1 \varrho_1 \omega$ a tedy moment hybnosti (moment otáčecí) byl $m_1 \varrho_1^2 \omega$. Po elongaci jest pak podobně $m_1 R_1^2 \Omega_1$. Můžeme tedy psati

$$\Sigma m R^2 \Omega = \Sigma m \varrho^2 \omega. \quad (19)$$

Ježto předpokládáme kapalinu nestlačitelnou, nemění se její objem, a byl-li poloměr vlákna před elongací r , a po ní \bar{r} , jest

$$\pi r^2 l = \pi \bar{r}^2 (l + \lambda)$$

čili

$$\frac{r^2}{\bar{r}^2} = \frac{l + \lambda}{l} = \kappa.$$

Moment setrvačnosti K před elongací byl roven

$$K = \Sigma m \varrho^2 = \frac{1}{2} M r^2$$

a po ní, ježto se jedná o válec téže hmoty M a poloměru \bar{r} , jest

$$\Sigma m R^2 = \frac{1}{2} M \bar{r}^2,$$

takže

$$k \Sigma m R^2 = \Sigma m \varrho^2. \quad (20)$$

Z rovnic (18), (19) a (20) obdržíme stav vlákna po elongaci nejsnáze tak, že násobíme (19) faktorem μ a (20) faktorem ν , které mohou mít všechny hodnoty vyjma nullu a všechny rovnice sečteme. Pak

$$\Sigma \left\{ m R^2 (\Omega^2 + \mu \Omega + \nu k) \right\} = \Sigma \left\{ m \varrho^2 k \left(\omega^2 + \frac{\mu}{k} \omega + \frac{\nu}{k} \right) \right\} \quad (21)$$

Tato rovnice platí jen pro všechny konečné hodnoty μ a ν . Volme je tak, aby pravá strana se rovnala nulle. Ježto je ω stálé, u všech částic stejné, stačí k tomu voliti

$$\frac{\mu}{k} = -2\omega, \quad \frac{\nu}{k} = \omega^2$$

čili

$$\mu = -2\omega k, \quad \nu = k\omega^2.$$

Tak obdržíme z levé strany

$$\Sigma \{mR^2(\Omega^2 - 2\omega k\Omega + k^2\omega^2)\} = \Sigma mR^2(\Omega - k\omega)^2 = 0.$$

Aby poslední součet členů vesměs kladných se rovnal nulle, musí každý člen o sobě rovnat se nulle, čili musí

$$\Omega_1 - k\omega = 0, \quad \Omega_2 - k\omega = 0 \text{ atd.},$$

to jest

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \dots = k\omega. \quad (22)$$

Z toho jest patrnó:

Prodloužíme-li vírové vlákno na délku k -násobnou, vzroste úhlová rychlost jeho otáčení rovněž k -kráte; ale vlákno se zase otáčí jako celek, úhlovou rychlostí $k\omega$, všem částicím společnou. Ježto pak se otáčecí moment vlákna elongací nezměnil, jest

$$\frac{1}{2}Mr^2\omega = \frac{1}{2}M\bar{r}^2\Omega$$

a tedy také

$$\pi r^2\omega = \pi \bar{r}^2\Omega, \quad (23)$$

čímž je dokázána věta z počátku uvedená, že vírová intenzita vlákna jest veličina časově stálá, vnějšími prostředky nezměnitelná. Nemůžeme tudíž v ideální kapalině vírové vlákno vytvořiti, ani zase vírové vlákno jednou existující zničiti, ba nemůžeme vůbec ani jeho vírovou intenzitu změnit. Dá se dále dokázati, že částice kapaliny, které tvoří vírové vlákno, jsou stále tytéž, čili žádné nové částice ve vírové vlákno nevstupují, aniž je opouští, a to ani tehdy ne, když se vlákno v kapalině pohybuje.

Ovšem, všechny kapaliny skutečně jeví vnitřní tření, které nám umožňuje, abychom v nich vzbudili vířivé pohyby, působíce tangenciálními silami na stěny, které kapalinu obklopují. Viděli jsme to přímo v § 2., kde jsme o vzniku vířivého pohybu promlouvali. Viskosita vede však stejně ku konečné době trvání a znenáhlemu zániku vírových vláken, jichž energie se mění v teplo.

9. *Proudění kapaliny kolem vírového vlákna.* I dokonalá kapalina v okolí vírového vlákna dostane se do proudění, byť i zůstala nevířivou. To jest nutným důsledkem věty (15), že

cirkulace v libovolné uzavřené křivce kolem vlákna má konečnou, od nuly rozdílnou hodnotu. Jest totiž dle předpisu početního cirkulace součtem součinů z komponenty rychlostí a elementu délkového v určitém směru proběhnutého, a kdyby tudíž všechny rychlosti byly rovny nulle, musil by výsledek počtu být rovněž roven nulle.

Představme si v nekonečné kapalině dlouhé, přímé vírové vlákno, a myslíme si v rovině na ose vlákna kolmé kruh poloměru R , jehož střed je v ose vlákna.

Ježto, jak jsme právě viděli, nastává podél kruhu R proudění, bude vzhledem k všestranné symetrii jeho tangenciální rychlost všude stejná a rovna v . Cirkulace rychlosti v kruhu jest

$$2 \pi R v = 2 i$$

čili

$$v = \frac{1}{\pi} \frac{i}{R}, \quad (24)$$

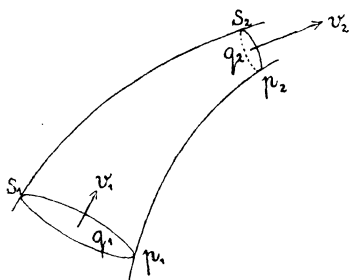
kde i značí vírovou intenzitu vlákna ve směru oběhu kruhu. Klesá tedy rychlost proudění mimo vlákno se vzdáleností od jeho osy, kdežto ovšem ve vlákně samém rychlost tangenciální rv s touto vzdáleností stoupá. Tím jest také na prvý pohled patrný rozdíl pohybu vířivého a nevířivého.

Zde máme nový příklad analogie mezi hydrodynamikou a naukou o elektřině. Zákon Biot-Savartův, jak těmito dvěma učenými původně byl experimentálně nalezen, učí, že magnetické pole kolem dlouhého přímkového vodiče, protékaného proudem intenzity I , jest kruhové a že klesá se stoupající vzdáleností R , takže jest úměrno podílu I/R . Týž vztah plyne ovšem integrací z elementárního zákona Laplaceova (II. 50, 45). Úplná obdoba vírové intenzity a intenzity el. proudu a podobně rychlosti proudění a intenzity magnetického pole padá přímo do očí, a již *Helmholtz* ve výše citovaném slavném pojednání na ni poukázal.

Lze ji vésti dále; kinetická energie systému vírových vláken odpovídá úplně magnetické energii systému proudovodičů a pod. Zde nemůžeme se jí dále zabývat.

10. *Přenášení energie podél proudových trubic.* Jest zřejmo, že pláštěm proudové trubice nepřenáší se ven žádná mechanická

energie, ježto žádné částice kapalinové jím neprostupují. Ovšem je možno, že pláštěm trubice prostupuje ven či dovnitř energie ve tvaru tepla. Je-li kapalina v trubici podrobena vlivu tíže, může se — není-li trubice horizontální — měniti její potenciální energie, stoupajíc či klesajíc dle toho, zdali těžiště kapaliny se zvedá nebo snižuje. Zcela všeobecně však platí zákon o zachování energie, který praví, že žádná energie nepřichází na zmar, ač ovšem také žádná nevzniká z ničeho.



Obr. 7.

Představme si část proudové trubice (obr. 7.), do níž vstupuje kapalina kolmým průřezem q_1 za tlaku p_1 rychlostí v_1 , a z níž vytéká průřezem q_2 za tlaku p_2 rychlostí v_2 . Vstupujíc do trubice, působí kapalina jako píst, který tlačí na kapalinu před ní se nacházející silou $p_1 q_1$, a kterýž posouvaje se v krátkém čase τ o délku $v_1 \tau$, koná práci $p_1 q_1 v_1 \tau$, takže práce v jedničce časové vykonaná jest $p_1 q_1 v_1$. Mimo to jest hmota do trubice za vteřinu vstupující $q_1 v_1 s_1$, kde s_1 je spec. hmota kapaliny v průřezu q_1 , a tato hmota má rychlost v_1 , takže její kinetická energie jest rovna $\frac{1}{2} s_1 q_1 v_1^3$. Celkem tedy vstupuje v jedničce časové do trubice množství mechanické energie

$$p_1 q_1 v_1 + \frac{1}{2} s_1 q_1 v_1^3 = q_1 v_1 (p_1 + \frac{1}{2} s_1 v_1^2).$$

Zcela podobněme dojde k poznání, že množství mechanické energie tokem kapaliny z trubice za vteřinu vystupující jest $q_2 v_2 (p_2 + \frac{1}{2} s_2 v_2^2)$. V trubici samé, jak jsme viděli, může se ztráceti energie mechanická měnic se třením v teplo, ztráceti či nabývati energie gravitační nebo postupem skrze stěny ener-

gie tepelná. Množství energie uvnitř trubice se nacházející musí za ustáleného, stacionárního stavu býti stálé, neboť kdyby neustále rostlo, muselo by se v ní hromaditi do nekonečna, nebo kdyby mělo stále klesati, byla by musela trubice původně mít nekonečnou zásobu energie. Z principu o zachování energie plyne pak zcela obecně:

$$q_2 v_2 (p_2 + \frac{1}{2} s_2 v_2^2) - q_1 v_1 (p_1 + \frac{1}{2} s_1 v_1^2) = \text{sekundovému} \\ \text{zisku energie uvnitř trubice.} \quad (25)$$

Tato rovnice platí zcela všeobecně.

Jedná-li se o *tok nestlačitelné kapaliny v horizontální trubici stálého průřezu* a je-li *kapalina dokonalá* (ideální), bez tření, tu pro

$$q_1 = q_2, \quad s_1 = s_2$$

a všeobecně platné u trubic neproměnného tvaru

$$q_1 v_1 s_1 = q_2 v_2 s_2 \quad (26)$$

plyne $v_2 = v_1$ a dále, poněvadž pravá strana (25) se rovná nulle,

$$p_2 = p_1.$$

Není tlakového spádu podél trubice. Ostatně není tento výsledek ničím jiným než vyjádřením principu setrvačnosti.

Jedná-li se v témž případě o *kapalinu skutečnou*, vede vnitřní tření k ztrátě energie mechanické, jež se mění na energii tepelnou. Jsou-li průřezy q_1 a q_2 vzdáleny o délku l , a ztrácí-li jednotka objemová na jedničkové dráze množství energie E , ztrácí objem $q_1 v_1 = q_2 v_2$ na délce l množství energie $q_1 v_1 l E$ a rovnice (25) přechází v

$$q_2 v_2 (p_2 + \frac{1}{2} s_2 v_2^2) - q_1 v_1 (p_1 + \frac{1}{2} s_1 v_1^2) = - q_1 s_1 v l E \quad (27)$$

čili, ježto za daných poměrů

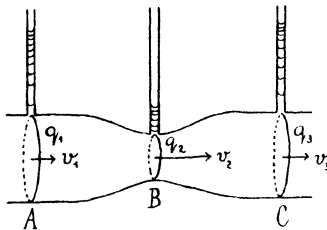
$$s_1 = s_2, \quad q_1 = q_2, \quad v_1 = v_2,$$

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = E. \quad (28)$$

Podél trubice nastává stálý spád tlakový, jak je znázorněn ve vaší fysice (I. obr. 117. resp. 143.), jehož názorný význam objasňuje rovnice (28).

Protéká-li elektrický proud drátem stejného průřezu, nastává dissipace elektrické energie ve tvaru Jouleova tepla a energie proměněná v teplo při průchodu jedničkového množství jedničky délky drátu určuje potenciální spád, t. j. klesnutí potenciálu na jedničce délky drátu (srov. II. 56, 62). Potud se podobá proudění elektriny toku skutečné kapaliny; ale uvidíme hned v příštím odstavci, že tato podobnost rychle mizí za případů jen poněkud složitějších.

11. *Tlak nestlačitelné kapaliny trubici proměnného průřezu.* Není-li průřez trubice všude stejný, nýbrž je-li na příklad (obr. 8.) v místě B zúžena, tedy i tehdy, jedná-li se o kapalinu ideální, bez tření tekoucí trubici horizontální, musí v místech šir-



Obr. 8.

šího průřezu A a C býti tlak větší než v B . Nahlédneme to snadno i bez počtu. Ježto za ustáleného toku je sekundový objem kapaliny každým průřezem procházející stejný, musí

$$q_1 v_1 = q_2 v_2$$

a tudíž je rychlost v malém průřezu q_2 totiž

$$v_2 = \frac{q_1}{q_2} v_1$$

větší než ve větším. Kapalina musí se na trati AB zrychlovati, k čemuž je potřebí stálé zrychlující síly, kterouž je právě přetlak $p_1 - p_2$. Naopak mezi B a C je pohyb kapaliny zpzděný, její rychlost klesá a to zase následkem opačně působícího přetlaku $p_3 - p_2$.

Vidíme tedy přímo: Teče-li kapalina zúženou trubici a není-li nikde ani ztráty ani zisku gravitační nebo thermické energie, je její tlak největší tam, kde je rychlost nejmenší.

Početně plyne pro ideální kapalinu nestlačitelnou v horizontální trubici dosazením

$$s_1 = s_2 = s \quad \text{a} \quad v_2 = v_1 \cdot \frac{q_1}{q_2}$$

do rovnice (25), v níž pravá strana je rovna nulle

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} s v_1^2 \left\{ \left(\frac{q_1}{q_2} \right)^2 - 1 \right\} \quad (29)$$

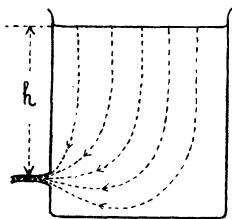
Ovšem předpokládá tato rovnice přibližně platná i pro kapaliny skutečné, že rychlost kapaliny nepřestoupí jisté meze, kdy v kapalině s vnitřním třením přestává pohyb dle proudových čar a nastává *stav turbulentní*, takový, že proudové čáry se spirálovitě stáčí, kapalina tvoří víry. Prakticky užívá se našeho výsledku ve *Venturiho vodoměru*, který není než kusem trubice se zúžením uprostřed, podobně jako znázorňuje obr. 8. Místo tlakových trubiček je v místě *A* a *B* opatřen manometry, nejčastěji samoregistrujícími. Z rozdílu jejich údajů usuzuje se na rychlost proudění resp. na sekundové množství procházející kapaliny.

Z jiných aplikací znáte vodní vývěvu (I, 131, 144) nebo nassávání vzduchu do Bunsenova hořáku v místech, kde do široké trubice vchází malým otvorem plyn či konečně známý malý pokus následující: Kolmo na spodní konec skleněné trubičky připevníme kruhovou destičku s centrálním otvorem pozorně tak, aby trubička z ní nevyčnívala. Foukáme-li trubičkou a přiblížíme-li k destičce lehký rovný předmět (prázdnou škatulku od sirek), jest k destičce zcela proti očekávání přitahován. V posledně jmenovaných případech jedná se ovšem o pohyb plynu, který jest snadno stlačitelný, takže náš jednoduchý vztah pozbývá platnosti; leč stačí říci, že, není-li změna tlaková příliš veliká, zůstávají hořejší úvahy v hlavních rysech platny.

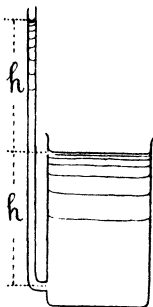
Nyní vidíme podstatný rozdíl mezi tokem kapaliny a elektrickým proudem. Prochází-li tento vodičem *AC*, v němž jest zúžené místo *B* (obr. 8.), tu sice klesá potenciál elektrický od místa *A* k *B*, ale nestoupá, nýbrž klesá dále, postupujeme-li od *B* k *C*.

12. *Výtok kapaliny z nádoby.* O výtoku kapaliny z nádoby jest pojednáno ve vaší učebnici fysiky (I. 130, 146), takže se zde můžeme omeziti na několik poznámek.

Vytéká-li kapalina z nádoby postranním otvorem, mají trubice proudové tvar tečkováním v obr. 9. přibližně naznačený. Je patrné, že jejich průřez u povrchu je velmi veliký oproti průřezu v otvoru, takže u povrchu je rychlost proudění velmi malá. Tlak na povrchu je roven atmosférickému tlaku P , stejně jako tlak ve vodním paprsku blízko u výtokového otvoru v místech, kde se stal paprsek stejnoměrným. Kdyby byl totiž větším, rozšiřoval by se paprsek, kdyby byl menším, stahoval by se.



Obr. 9.



Obr. 10.

Také zde platí rovnice (25), jejíž pravá strana, značící zisk na gravitační energii, zde je dána výrazem $sqvg \cdot h$, je-li q průřez vytékajícího paprsku, v rychlost toku, h pak výška od volné hladiny kapaliny k výše zmíněnému místu paprsku. Z rovnice (25) plyne tedy, píšeme-li

$$s_1 = s_2 = s, \quad p_1 = p_2 = P \quad \text{a} \quad q_2 v_2 = q_1 v_1 = qv, \\ qv(P + \frac{1}{2}sv^2) - qv(P + \frac{1}{2}sv_1^2) = sqvgh.$$

Dle toho, co jsme nahoře řekli, je rychlost v , u povrchu kapaliny velmi malá a lze tedy člen $\frac{1}{2}sv^2$ v druhé závorce levé strany vynechat, čímž dospíváme k známému zákonu *Torricelliovu*

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (30)$$

Nechceme se zmiňovati od odchylkách, které ve skutečnosti od tohoto zákona nastávají, nýbrž přejdeme hned k následujícímu pokusu.

Spojme výtokový otvor s trubicí vertikálně vzhůru ohnutou (obr. 16.) a představme si, že je z prvu prázdná, že otvor v nádobě, ležící v hloubce h pod povrchem jest uzavřen zasunutým šoupátkem. Otevřeme-li jej, počne kapalina — budiž ideální — v trubicí stoupat, a stoupá tak dlouho, až zisk gravitační energie kapaliny v trubicí se rovná práci na ní vykonané. Budiž takto dosažená výška rovna H a průřez trubice q . Ježto těžiště vodního sloupce výšky H a hmoty sqH , tedy váhy $sqHg$, se nachází v polovině výšky, ve výši $\frac{1}{2}H$ nad otvorem, je energie polohy rovna $sqHg \cdot \frac{1}{2}H$, tedy, rovnajíc se práci vykonané při pádu hmoty sqH z výše h , dává nám vztah

$$\frac{1}{2}sqH^2g = sqHgh \quad \text{čili} \quad H = 2h. \quad (31)$$

Ideální kapalina vystoupí tedy do výše rovnající se dvojnásobné výšce tlakové. Ježto však tento stav není rovnovážný, vyprázdní se trubice znova a tato hra by se opakovala u kapaliny ideální do nekonečna. U kapaliny skutečné ustálí se následkem ztrát energie vnitřním třením po několika kyvech kapalina ve výšce dané zákonem spojitých nádob.

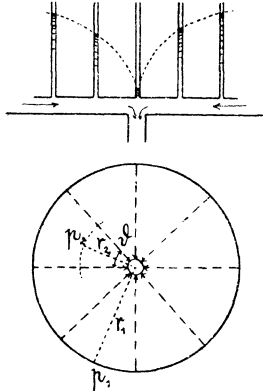
Zcela analogický zjev nastává při nabíjení kondensatoru baterií o stálé elektromotorické síle. Vyžaduje-li kondensator náboje Q , aby se nabil na potenciál V batterie, tedy energie, kterou batterie kondensatoru dodá, je rovna QV , kdežto konečná energie v kondensatoru trvale nahromaděná je rovna $\frac{1}{2}QV$. (II, 32. a 37., resp. 36. a 42.); polovina energie baterií dodané se promění v teplo, tím, že při nabíjení kondensatoru vznikají elektrické oscillace, kde z počátku se mění potenciál kondensatoru mezi přibližně $2V$ a nullou, Oscillace však velmi rychle uhasínají. Přebytečná energie $\frac{1}{2}QV$ promění se v Jouleovo teplo.

13. *Radiální tok kapaliny.* Nechť teče kapalina mezi dvěma rovnoběžnými kruhovými deskami se všech stran k středovému otvoru v desce spodní (obr. 11.). Takovýto tok nazývá se radiálním, ježto patrně omezením trubic proudových jsou poloměry kruhu. Je-li vzdálenost obou desk rovna d , a je-li ϑ úhel mezi dvěma sousedními přímkami proudovými, je průřez trubice proudové ve vzdálenosti r_2 od středu roven $r_2\vartheta d$. Panuje-li v této vzdálenosti tlak p_2 , kdežto na okraji desky poloměru r_1 tlak p_1 ,

máme u nestlačitelné kapaliny a horizontálních desk dle rovnice (25), v níž $q_1 v_1 = q_2 v_2$, dále $q_1 = r_1 \vartheta d$ a $q_2 = r_2 \vartheta d$, takže $v_2 = v_1 \cdot \frac{r_1}{r_2}$, a kde pravá strana se rovná nulle,

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1 \right). \quad (32)$$

Ježto pravá strana je kladná, je tlak p_2 menší než p_1 , tlaku zase s přibývajícím rychlostí kapaliny ubývá, jak bychom mohli stanovit manometrickými trubicemi, v obr. 11. zakreslenými. Ve skutečnosti často pozorujeme, že, vyprazdňuje-li se nádoba vodou naplněná středovým otvorem ve dně, prohlubuje se

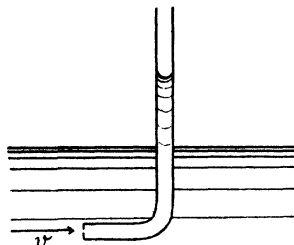


Obr. 11.

povrch nad otvorem, někdy tak silně, že se i vzduch do otvoru nassává. Někdy dostane se sice náhodně voda do rotačního pohybu, leč hlavní příčinou prohlubování jest radiální tok. Kdyby v obrazci 11. kapalina středním otvorem tekla vzhůru, tedy stejně jako je nakresleno vzniká negativní tlak uprostřed desk. Ostatně přiléhá tento případ úzce k pokusu popsánému na konci 11. paragrafu tohoto článku.

14. *Síla působící v průřezu proudové trubice.* Je-li kapalina v klidu, působí na ploše q silou pq , která stejně jako hydrostatický tlak má touž velikost, nechť postavíme plošku q do libovolného směru. Pohybuje-li se však kapalina, působí vedle

toho další silou, která má směr jejího pohybu. Průřezem q prošlo v čase τ množství $sqv\tau$ kapaliny, která měla hybnost jako vždy danou součinem z hmoty a rychlosti $sqv^2\tau$. Změna hybnosti v jednotce časové jest dle základního zákona Newtonova silou. Na přední straně průřezu proudové trubice vymizela v jednotce časové hybnost sqv^2 . Působí tudíž kapalina před průřezem na kapalinu za ním se nacházející jednak všestrannou silou pq , jednak silou ve směru pohybu kapaliny působící sqv^2 , takže jest celková síla ve směru pohybu $q(p + sv^2)$. Dle principu akce a reakce, ježto se nejedná o pohyb zrychlený, působí touž silou směru opačného kapalina za průřezem se nacházející na kapalinu před ním. O této síle přesvědčuje nás t. zv. *Pitotova trubice*, staré to zařízení k měření rychlosti proudící kapaliny. Jest to prostě



Obr. 12.

skleněná, proti směru proudící kapaliny v pravém úhlu ohnutá trubice, opatřená na konci velmi jemným otvorem (obr. 12.). Výstupová výše kapaliny je měrou její rychlosti. Kdyby normála k rovině otvoru svírala se směrem rychlosti úhel 90° , nevystoupila by kapalina v trubici nad okolní hladinu.

Applikujme tento výsledek na výtok kapaliny z nádoby otvorem průřezu q_1 (viz § 12). Zanedbáváme-li vnitřní tření kapaliny je výtoková rychlost $v = \sqrt{2gh}$. Buď q_2 průřez vodního paprsku v místech, kde se stal stejnoměrným. Pak, jak jsme řekli, je vnitřní tlak v paprsku roven tlaku atmosférickému P a kapalina právě průřez ten opouštějící jest do předu poháněna silou $q_2 (P + sv^2) = q_2 (P + 2ghs)$. Touž silou je kapalina před průřezem tlačena zpět. Paprsek jest počínaje od otvoru

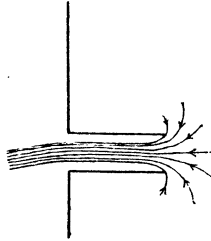
zúžen z průřezu q_1 na menší q_2 a atmosférický tlak tlačí tuto konickou část paprsku do nádoby zpět silou $P (q_1 - q_2)$. Jest tedy u výtoku tlačena kapalina zpět silou

$$P (q_1 - q_2) + q_2 (P + 2 ghs) = Pq_1 + 2 ghsq_2.$$

Na plošku q_1 stěny působila, pokud byl výtokový otvor uzavřen, síla $q_1 (P + gsh)$.

„Předpokládáme-li, že rozdělení tlaku po stěně, v níž je otvor, se nezměnilo, byl-li otvor otevřen,“ tu, poněvadž kapalina zůstává jako celek v rovnováze i proudí-li paprsek ven, je

$$q_1 (P + gsh) = Pq_1 + 2 ghsq_2 \quad \text{čili} \quad q_2 = \frac{1}{2}q_1.$$



Obr. 13.

Pokusy o výtokové rychlosti otvorem ve stěně podávají však výsledkem přibližně $q_2 = 0.62 q_1$ (I, 130, 142). Tento rozdíl má jednak původ ve vnitřním tření, jednak v tom, že uvozovkami vyznačený předpoklad není správný. Podél stěny nastává totiž jakýsi druh radiálního proudění (viz § 13), čímž se výsledný tlak na stěnu mění. Radiální proudění vymýtíme, užijeme-li *Bordova zpětného násadce* (obr. 13.), který posunuje výtokový otvor dále od stěny, více než o dvojnásobný jeho průměr. V tomto případě odpovídá nalezený vztah $q_2 = \frac{1}{2}q_1$ daleko lépe skutečnosti.