Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Poznámky o soustavě paraboloidů procházejících dvěma danýma mimoběžkama a o útvarech s nimi souvislých. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 1, 23–32

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123719

Poznámky o soustavě paraboloidů procházejících dvěma danýma mimoběžkama a o útvarech s nimi souvislých.*)

Podává **M. Lerch** v Brně.

Dvě přímky δ a δ_1, jichž rovnice buďte

$$\delta\,(z = c,\quad y = mx),\quad \text{resp.}\quad \delta_1\,(z = -c,\quad y = -mx),$$

leží na nekonečném počtu ploch druhého stupně; jich rovnice jsou tvaru

$$a_{22}(y^2 - m^2x^2) + a_{33}(z^2 - c^2) + 2a_{13}\left(xz - \frac{c}{m}y\right) \qquad (1)$$
$$+ 2a_{23}(yz - mcx) = 0.$$

Ze soustavy těchto ploch chceme uvažovati ony, které nemají středu, t. j. paraboloidy; vyčíslení diskriminantu kvadratické části dává pro ně podmínku

$$a_{22}\,[a_{13}^2 + m^2(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)] = 0.$$

Tu bychom shledali, že výraz v hranaté závorce vymizí pro plochy válcové a jen hodnota $a_{22} = 0$ podává paraboloidy.

„*Paraboloidy procházející přímkami* δ, δ_1 *mají rovnici*

$$z^2 - c^2 + 2a\left(xz - \frac{c}{m}y\right) + 2b\,(yz - mcx) = 0,\text{“} \qquad (2)$$

při čemž a, b jsou libovolné parametry.

Pro plochu necentrální

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + \ldots + a_{44} = 0$$

lze rovnice osy psáti

$$a_{h1}A_1 + a_{h2}A_2 + a_{h3}A_3 = 0 \quad (h = 1,\ 2,\ 3),$$

---

*) A. Rasche, Untersuchung der Flächen zweiten Grades, welche durch zwei windschiefe Geraden gehen. (Diss. Paderborn, 1882.)

J. Klobouček, O komplexu os ploch 2. stupně, které procházejí dvěma reálnými mimoběžkami (Třicátá roční zpráva české vyšší reálky Karlínské, 1903—4).

— Methodické poznámky k theorii komplexu A^2 (Rozpravy české Akademie cís. Františka Josefa, roč. XIV., čís. 7; 1905).

V. Simandl, O určitém konoidu stupně pátého. (Časopis pro pěstov. m. a f., roč. XLII., 1913; str. 155.)

kde položeno

$$A_k = a_{k1}x + a_{k2}y + a_{k3}z + a_{k4}.$$

V případě plochy (2) jest

$$A_1 = az - bcm,\quad A_2 = bz - \frac{ac}{m},\quad A_3 = z + ax + by,$$

a rovnice osy budou

$$A_3 = 0,\quad aA_1 + bA_2 = 0$$

t. j. po dosazení hodnot

$$z + ax + by = 0,\quad z = \frac{abc\,(1 + m^2)}{(a^2 + b^2)\,m}. \tag{3}$$

Elegantnější a zároveň pro vystižení geometrického významu vhodnější jsou rovnice, které vzniknou zavedením parametrů ω a λ

$$a = -\frac{\cos\omega}{2\lambda},\quad b = -\frac{\sin\omega}{2\lambda},$$

při čemž zároveň zavedeme úhel α na místě konstanty

$$m = \operatorname{tg}\alpha.$$

Pak máme ∞^2 paraboloidů

$$\begin{aligned}\lambda(z^2 - c^2) &= z(x\cos\omega + y\sin\omega)\\ &\quad - c(y\operatorname{cotg}\alpha\cos\omega + x\operatorname{tg}\alpha\sin\omega)\end{aligned} \tag{2*}$$

a jich osy

$$z = \frac{c\sin 2\omega}{\sin 2\alpha},\quad x\cos\omega + y\sin\omega = 2\lambda z. \tag{3*}$$

1.

Uvažujme nejprve tyto osy, jež patrně tvoří kongruenci. Zaveďme pro zkrácení veličinu stálou

$$a = \frac{c}{\sin 2\alpha},\quad c = a\sin 2\alpha,$$

která má jiný význam než měla táž litera předešle, a na místě parametru λ zaveďme

$$h = 2a\lambda\sin 2\omega = 2\lambda\frac{c\sin 2\omega}{\sin 2\alpha}.$$

Rovnice osy paraboloidu pak znějí

$$z = a\sin 2\omega,\quad x\cos\omega + y\sin\omega = h, \tag{4}$$

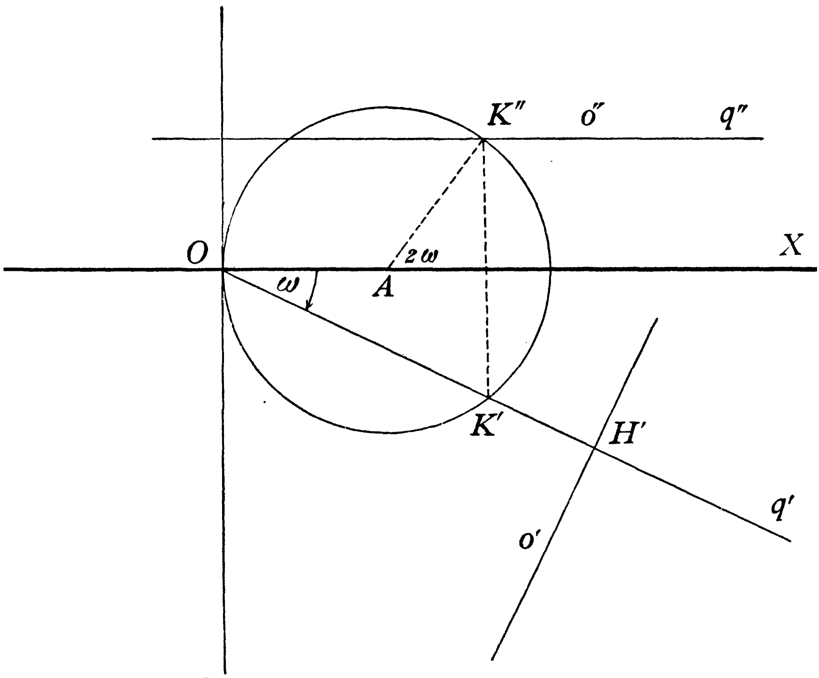
při čemž h, ω jsou parametry vespolek neodvislé.

Přímky (4) jsou charakterisovány podmínkami, že jsou rovnoběžny s rovinou Oxy a že kolmo protínají přímku

$$z = a \sin 2\omega, \quad x = h \cos \omega, \quad y = h \sin \omega \qquad (5)$$

při proměnném h, stálém ω. Tyto přímky (5) tvoří konoid Plückerův

$$z(x^2 + y^2) = 2axy, \qquad (5^*)$$



jehož konstrukce právě na základě rovnic (5) je velmi jednoducha.

Vedeme kruh se středem A, jehož poloměr $OA = a$. Rámě AK'' úhlu $XAK'' = 2\omega$ stanoví na kruhu bod K'', kdežto rámě OK' úhlu $XOK' = \omega$ v půdorysně stanoví bod K', a je právě půdorysem přímky (5), kterou značíme q.

Body K' a K'' jsou průměty určitého bodu K na přímce q, jehož souřadnice jsou

$$x = 2a \cos^2 \omega, \quad y = 2a \cos \omega \sin \omega,$$
$$z = a \sin 2\omega = y.$$

Bod K tedy opisuje ellipsu, průseč roviny $y = z$ s konoidem, jejíž oba průměty splývají s kruhem (A, a).

Osa (4) — kterou značíme o — má průměty $o'' \equiv q''$, $o' \perp q'$ a její průsek H s přímkou konoidu určuje parametr $h = OH'$.

Z konstrukce samé vyplývá, že každým bodem procházejí dvě osy a na každé rovině leží jedna osa kongruence (4).

Rovnice (4) stanoví přímku o jako průseč dvou rovin a snadno z nich odvodíme její souřadnice $p, q, r, \tilde{\omega}, \varkappa, \varrho$; *) roviny mají souřadnice

$$u_1 = -\frac{\cos\omega}{h}, \quad v_1 = -\frac{\sin\omega}{h}, \quad w_1 = 0,$$

$$u_2 = 0, \quad v_2 = 0, \quad w_2 = -\frac{1}{a\sin 2\omega},$$

takže, značí-li σ určitý faktor úměrnostní, bude

$$\sigma p = \frac{1}{2ah\cos\omega}, \quad \sigma q = \frac{-1}{2ah\sin\omega}, \quad r = 0,$$

$$\sigma\tilde{\omega} = \frac{\cos\omega}{h}, \quad \sigma\varkappa = \frac{\sin\omega}{h}, \quad \sigma\varrho = \frac{-1}{a\sin 2\omega}.$$

Eliminací σ, h, ω vycházejí odtud rovnice

$$r = 0, \quad p\tilde{\omega} + q\varkappa = 0 \qquad (4^a)$$

a

$$\frac{\tilde{\omega}}{p} - \frac{\varkappa}{q} = 2a. \qquad (4^b)$$

Z těch jest u (4^a) druhá důsledkem první $r = 0$ a vztahu základního platného pro každou přímku $p\tilde{\omega} + q\varkappa + r\varrho = 0$, a rovnice (4^b) charakterisuje kvadratický komplex složený z přímek, jež kolmo protínají přímky konoidu Plückerova (5*).

„*Orthogonální sečny přímek Plückerova konoidu vedené daným bodem tvoří kužel 2. stupně.*

Tytéž sečny ležící v dané rovině obalují kuželosečku."

Leží-li bod na konoidu, rozpadá se kužel ve dvě roviny, z nichž jedna stojí kolmo na povrchové přímce konoidu obsahu-

*) Označení totéž jako v knize Clebsch-Lindemannově (2. díl), s odchylkou, že zde užito litery $\tilde{\omega}$ místo tam zavedeného π.

jící vrchol, a druhá má rovnici

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} - \frac{z}{z_0} = 1, \tag{6}$$

při čemž $x_0\, y_0\, z_0$ značí souřadnice bodu na konoidu, z něhož vedeme kolmé sečny ku přímkám tohoto.

Nazveme tyto roviny singulárními rovinami komplexu (4^b). Souřadnice roviny (6)

$$u = -\frac{1}{x_0}, \quad v = -\frac{1}{y_0}, \quad w = \frac{1}{z_0}$$

hoví následkem vztahu (5^*) rovnici

$$2a\, uvw = u^2 + v^2, \tag{6^a}$$

t. j. obalová plocha singulárních rovin komplexu

$$q\bar{\omega} - p\varkappa = 2a\, pq$$

je třetí třídy.

Dosadíme-li do (6) za $x_0\, y_0\, z_0$ hodnoty (5), obdržíme pro obalovou plochu singulárních rovin vyjádření parametrické

$$x = h \cos 2\omega, \quad y = -h \cos 2\omega \sin \omega, \quad z = -a \sin 2\omega\,;$$

píšeme-li k za $h \cos 2\omega$, shledáváme úplnou shodu s rovnicemi (5) pro parametr $-\omega$.

„*Rovina singulární* (6) *příslušná k bodu* $x_0 y_0 z_0$ *na přímce* ω *obsahuje přímku* $-\omega$ *a dotýká se konoidu v bodě, jehož parametry jsou* $-\omega$, $h \cos 2\omega$."

Rovnice (6^a) je skutečně tangenciální rovnice konoidu (5).

Singulární rovina a singulární bod jsou útvary reciproké. Přímky komplexu (4^b) ležící v sing. rovině procházejí příslušným sing. bodem.

Poněvadž každá tečná rovina konoidu splývá se singulární rovinou příslušnou k určitému bodu, nacházíme větu: vedeme-li všemi body některé ellipsy na Plückerově konoidu přímky, které leží v její rovině a stojí kolmo na příslušných přímkách konoidu, tvoří vedené přímky svazek.

Buď S bod v prostoru mimo konoid, S_0 bod na konoidu ležící s předešlým na rovnoběžce s Oz; kolmice SP spuštěná na přímku konoidu p má tutéž patu P jako kolmice na přímku p spuštěná z bodu S_0; paty P naplňují tedy ellipsu (její půdorys je kruh), ve které konoid protíná sing. rovinu příslušnou k bodu S_0. Tato ellipsa jest řídící křivka kužele s vrcholem S, který sestává z přímek komplexu (4^b) tímto bodem vedených.

2.

Obraťme se ke kongruenci (4). Osy o protínající danou přímku rovnoběžnou s osou konoidu $x = x_0$, $y = y_0$ hoví podmínce

$$x_0 \cos \omega + y_0 \sin \omega = h$$

a tedy jsou dány rovnicemi

$$z = a \sin 2\omega, \quad (x - x_0) \cos \omega + (y - y_0) \sin \omega = 0.$$

Vyloučením ω vychází

$$z[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] + 2a(x - x_0)(y - y_0) = 0; \quad (7)$$

tedy

„přímky kongruence (4) se řadí v Plückerovy konoidy vespolek shodné a rovnoběžné,“

jak bylo očekávati, ježto přímka zůstává v kongruenci, pošine-li se rovnoběžně v téže rovině horizontální.

Znamenejme S_0 bod $(x_0 y_0 z_0)$ společný konoidu (5*) a ose konoidu (7), jeho průměty S'_0 a S''_0; hledáme průseč konoidů (5*) a (7). Přímka o konoidu (7) protíná dvě přímky konoidu (5*), které znamenejme p a p_1 a které odpovídají parametrům ω a $\frac{1}{2}\pi - \omega$. Průsek P přímek o, p na sobě kolmých je současně pata kolmice spuštěné z bodu S_0 na přímku p; souhrn bodů P jest ellipsa (P), v níž sing. rovina (6) příslušná k bodu S_0 seče základní konoid (5*). Půdorys této ellipsy je kruh nad průměrem OS'_0.

Oba konoidy mají společné útvary v nekonečnu t. j. tři přímky

$$z(x^2 + y^2) = 0,$$

a ellipsu (P); zbývající část průseče těchto ploch je čára (P_1), geometrické místo průseku P_1 přímek o a p_1. Čára ta je stupně 4. a snadno shledáme z konstrukce na základě promětných svazků, že půdorys její jest rovnostranná hyperbola mající délku OS'_0 za průměr, jejíž asymptoty jsou rovnoběžny s osama souřadnic Ox, Oy.

Určeme ještě osy o, které sekou libovolnou přímku

$$x = \alpha z + p, \quad y = \beta z + q, \tag{g}$$

jež není kolma na Oz.

Spojením rovnic (g) a (4) vychází

$$h = (\alpha \cos \omega + \beta \sin \omega)\, a \sin 2\omega + p \cos \omega + q \sin \omega,$$

kterážto podmínka charakterisuje hledané přímky; dosazením této hodnoty h do (4) vychází na místě druhé rovnice (4)

$$(x - p) \cos \omega + (y - q) \sin \omega = (\alpha \cos \omega + \beta \sin \omega)\, z,$$

při čemž jsme užili též první rovnice (4). Máme tak rovnice hledaných přímek ve tvaru

$$(x - p - \alpha z) \cos \omega + (y - q - \beta z) \sin \omega = 0,$$
$$z = a \sin 2\omega;$$

eliminace ω podá rovnici plochy, již tyto přímky tvoří, a sice

$$\begin{aligned} & z\,[(x - p - \alpha z)^2 + (y - q - \beta z)^2] \\ & + 2a(x - p - \alpha z)(y - q - \beta z) = 0; \end{aligned} \tag{5}$$

plocha ta je konoid stupně třetího, ovšem kosý.

3.

Vraťme se k paraboloidům (2*), abychom vyšetřili jejich vrcholy, tedy průsečíky jich s osami (3*). K vůli pohodlí znamenejme na okamžik

$$x = \xi \cos \alpha, \quad y = \eta \sin \alpha;$$

pak nám rovnice (2*) a (3*) dají

$$\xi \sin \alpha \sin \omega + \eta \cos \alpha \cos \omega = \frac{c^2 + z^2}{c} \lambda,$$

$$\xi \cos \alpha \cos \omega + \eta \sin \alpha \sin \omega = 2 \lambda z,$$

mimo to plyne z první rovnice (3*) — s použitím hodnoty $c = a \sin 2\alpha$ —

$$\frac{z + c}{2a} = \sin(\omega + \alpha) \cos(\omega - \alpha),$$

$$\frac{z - c}{2a} = \cos(\omega + \alpha) \sin(\omega - \alpha).$$

Z posledních čtyř rovnic vychází

$$\eta + \xi = \frac{4a\lambda}{\sin 2\alpha} \sin^2(\omega + \alpha) \cos(\omega - \alpha),$$

$$\eta - \xi = \frac{4a\lambda}{\sin 2\alpha} \sin^2(\omega - \alpha) \cos(\omega + \alpha),$$

a odtud pro souřadnice vrcholu

$$x = \frac{a\lambda}{\sin\alpha} [\sin^2(\omega + \alpha) \cos(\omega - \alpha) - \sin^2(\omega - \alpha) \cos(\omega + \alpha)],$$

$$y = \frac{a\lambda}{\cos\alpha} [\sin^2(\omega + \alpha) \cos(\omega - \alpha) + \sin^2(\omega - \alpha) \cos(\omega + \alpha)],$$

kteréžto výrazy lze též psáti

$$x = 2a\lambda \sin\omega [1 + \cos(\omega + \alpha) \cos(\omega - \alpha)],$$
$$y = 2a\lambda \cos\omega [1 - \cos(\omega + \alpha) \cos(\omega - \alpha)],$$

aneb s připojením souřadnice třetí

$$\left.\begin{aligned} x &= 2a\lambda \sin\omega (\cos^2\omega + \cos^2\alpha), \\ y &= 2a\lambda \cos\omega (\sin^2\omega + \sin^2\alpha), \\ z &= a \sin 2\omega. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Tyto rovnice poskytují parametrické vyjádření geometrického místa vrcholů V paraboloidů (2*) procházejících přímkami δ, δ_1; tyto body V tvoří plochu, která očividně je přímková, a sice přímý konoid s řídící přímkou Oz jako dvojnou, který je stupně 5. a má úběžnou přímku řídící roviny Oxy za trojnásobnou přímku, a přímky δ, δ_1 za dvojnásobné.*)

Rovnoběžným osám (3*) naší soustavy paraboloidů přísluší stálé ω, a vrcholy paraboloidů leží tedy na téže povrchové přímce konoidu (V).

4.

Buď s libovolná sečna přímek δ, δ_1; přímka q na Plückerově konoidu (5), která má půdorys q' rovnoběžný s půdorysem s' přímky s, je tímto (viz hoř. konstrukci) určena, a její nárys poskytuje současně nárys všech os o naší kongruence $(o'' \equiv q'')$,

*) V. Šimandl, l. c.

které kolmo sekou přímku q. Jedna z těchto přímek o seče též přímku s, a sice jest určena nárysem průsečného bodu V, jenž je průsečíkem přímek známých o'', s''; uvažovaná přímka o je kolmá na promítající rovině přímky s a je tedy její kolmou sečnou. Přímka s protíná kolmo osu paraboloidu a seče dvě jeho přímky δ, δ_1; ukážeme, že přímka ta (s) leží na paraboloidu naší soustavy určeném osou o; tím bude zjištěno, že s je vrcholovou přímkou paraboloidu, vrchol jeho V je průsek přímek o, s. Druhá vrcholová přímka s_1 téhož paraboloidu leží v rovině kolmé na Oz a má s přímkou s společný půdorys, jsouc kolma na o ($s''_1 \equiv o''$, $s'_1 \equiv s' \perp o'$).

Uvažujme nejprve přímky s_1; jich souhrn tvoří kongruenci

$$z = a \sin 2\omega, \quad x \sin\omega - y \cos\omega = h', \tag{10}$$

jež vznikne z kongruence (4) substitucí $\omega - \frac{1}{2}\pi$ za ω a změnou znamení při a.

Vyjádří-li se, že tato přímka leží na paraboloidu (2*), obdrží se

$$h' = 2\lambda a \sin(\omega + \alpha)\sin(\omega - \alpha). \tag{10a}$$

Pro přímku s máme stejný půdorys, pro její průseky s přímkama δ, δ_1 obdržíme souřadnice z rovnic

$$x_0 \sin(\omega - \alpha) = h' \cos\alpha, \quad x_1 \sin(\omega + \alpha) = h' \cos\alpha,$$

jež vyjdou z rovnice půdorysu

$$x \sin\omega - y \cos\omega = h'$$

dosazením hodnot $y = \pm x \operatorname{tg}\alpha$; hledané souřadnice jsou tedy po dosazení hodnoty (10^a)

$$z_0 = c, \quad x_0 = 2\lambda a \cos\alpha \sin(\omega + \alpha),$$
$$z_1 = -c, \quad x_1 = 2\lambda a \cos\alpha \sin(\omega - \alpha);$$

rovnice vrcholové přímky s tedy jsou

$$\left.\begin{aligned} x \sin\omega - y\cos\omega &= 2\lambda a \sin(\omega+\alpha)\sin(\omega-\alpha), \\ x &= \lambda z \cos\omega + 2a\lambda \cos^2\alpha \sin\omega, \\ y &= \lambda z \sin\omega + 2a\lambda \sin^2\alpha \cos\omega. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Přímým dosazením do rovnice (2*) shledáváme, že tato přímka leží na našem paraboloidu (ω, λ), čímž důkaz proveden.

Přímky vrcholové s našich paraboloidů sekou základní přímky δ, δ_1, a tvoří tedy lineární kongruenci.

Z (11) plyne dále geometrický význam parametru λ

$$\lambda = \operatorname{tg}(s, z),$$

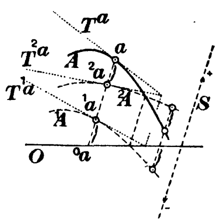
jako tangenty úhlu, jejž přímka s svírá s osou Oz; *„veličina λ rovná se kotangentě úhlu vrcholových přímek s, s_1“.*

(Pokračování.)

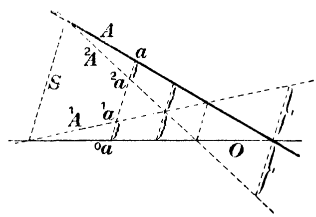
O kuželosečkových plochách translačních.

Napsal Dr. **Frant. Kadeřávek.**

Účelem tohoto článku jest podání jednoduchých důkazů geometrických a vysvětlení známých povětšině vět o translačních plochách kuželosečkových. K cíli tomu odvozeny úvodem některé jednoduché věty pomocné.



Obr. 1.



Obr. 2.

Buďtež dány dvě křivky (obr. 1.) ${}^1A$, ${}^2A$, přímka O a směr S. Sestrojme z křivek ${}^1A$, ${}^2A$ novou křivku A způsobem následným: Veďme libovolnou přímku rovnoběžnou s S, vyhledejme její průsečíky ${}^0a$, ${}^1a$, ${}^2a$, s přímkou O a s křivkami ${}^1A$, ${}^2A$ a učiňme $\overline{{}^0aa} = \overline{{}^0a\,{}^1a} + \overline{{}^0a\,{}^2a}$. Bod a náleží křivce A, již nazývejme krátce *součet* křivek ${}^1A$, ${}^2A$ směrem S při základně O; $A \equiv ({}^1A + {}^2A)_{S,\,O}$. Z obr. 2. patrno, že

1. *součet dvou přímek ${}^1A\,{}^2A$ směrem S a při základně O jest opět přímka A*; $({}^1A + {}^2A)_{S,\,O} \equiv A$.

Vytkneme-li v obr. 1. k paprsku $\overline{{}^0aa}$ nekonečně blízký a rovnoběžný s S a označíme-li jeho průsečíky s O, ${}^1A$, ${}^2A$, A