Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Granát
Vypočítávání obsahu šikmo seříznutého kužele. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 1, 71--74

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123714

Středem ω prstence veďme paprsek S, středem ${}^1o$ meridiánu světelného ${}^1F$ k němu kolmici $\overline{{}^1o\sigma}$, průsečíkem jejím σ s S kolmici k $\overline{\omega{}^1o}$ a průsečíky l', ${}^1l'$ této s ${}^1F$ kružnice L, ${}^1L$, na nichž položené body mezi stínu vlastního mají společný vržený stín, tedy určují dvojný bod meze stínu vrženého. Konstrukci tuto možno snadno odůvodniti počtem; jeť při hyperbole, jejíž asymptota jest S, osy XY, délky poloos a, b a jeden její bod l' o souřadnicích (x, y), subnormála $\overline{l^{*}{}^1o}$ budu l' dána výrazem $\frac{b^2}{a^2}x$; v obr. 6. $\overline{l^{*}{}^1o} \,.\, x = \overline{l^{*}\sigma^2}$, $\frac{l^{*}\sigma}{x} = \frac{b}{a}$, tedy $\overline{l^{*}{}^1o} = \frac{b^2}{a^2}x$. (Mannheim A., Cours de géométrie descriptive, 1880, str. 340. Srv. zejména čl. p. Dra. Q. Vettera: Kuželosečky dvojnásobně se dotýkající dvou kružnic. Tohoto časopisu roč. XLIV. str. 415.).

Vypočítávání obsahu šikmo seříznutého kužele.

Žákům středních škol podává Fr. Granát, prof. reálky v Kostelci n. Orl.

Protneme-li rotační kužel rovinou, je známo, že řezem je kuželosečka. Je-li odchylka povrchových přímek od osy kužele β, je odchylka myšlené roviny základny (kolmé k ose kužele) od povrchových přímek $\alpha = R - \beta$, a odchylka roviny řezu od osy kužele ψ, tedy od základny $\omega = R - \psi$, platí, že řez je kruhový pro $\psi = R\,(\omega = 0)$, řez je elliptický pro $\psi > \beta\,(\omega < \alpha)$, parabolický pro $\psi = \beta\,(\omega = \alpha)$ a hyperbolický pro $\psi < \beta\,(\omega > \alpha)$.

Vezmeme-li v úvahu právě odchylku roviny řezu od osy, můžeme mluviti o nekonečné ploše kuželové seříznuté rovinou, vedenou bodem na povrchové přímce v určité vzdálenosti od vrcholu, bez ohledu na velikost poloměru základny kužele. Tím se nám naskýtá úloha vypočísti obsah takto odříznutého kužele a také ovšem kužele komolého, vzniklého oddělením tohoto od úplného kužele, který musíme ovšem omeziti řezem kolmým k ose kužele v určité vzdálenosti od jeho vrcholu.

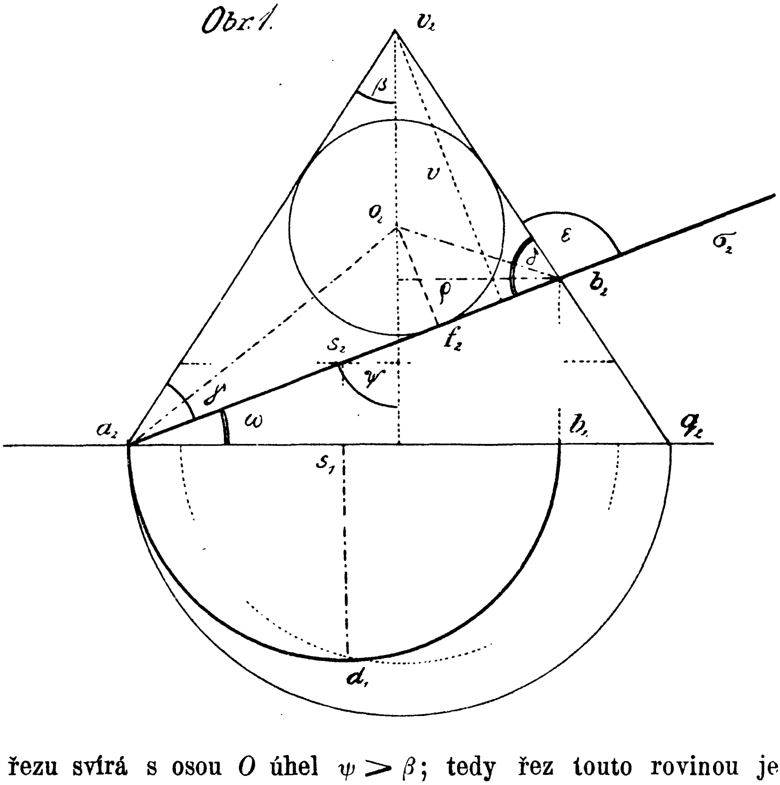
Ku stanovení krychlového obsahu odříznutého kužele musíme znáti rozměry kuželoseček.*) Rozměry tyto lze s výho-

*) Srovnej pojednání: *Václav Hübner* „O plášti rotačního kužele, seříznutého rovinou.“ Výroční zpráva c. k. reálky na Král. Vinohradech, šk. r. 1903—4, a jednotlivé články v Č. Č. M. roč. 33, 38.

dou určiti užitím poučky Quetelet-Daudelinovy, že *ohnisko řezu je v dotyčném bodě koule, dotýkající se obliny kužele i roviny řezu.* —

Budiž (obr. 1.) v rovině listu dán osový řez rotačního kužele za podmínky, že rovina σ kolmá k rovině tohoto osového

Obr. 1.



řezu svírá s osou O úhel $\psi > \beta$; tedy řez touto rovinou je elliptický. Krychlový obsah takto odříznutého kužele je

$$K = \tfrac{1}{3} z \, . \, v,$$

kde z je plocha řezu, v výška takto vzniklého šikmého kužele, t. j. vzdálenost vrcholu od roviny řezu. Z analytické geometrie je známo, že $z \equiv E = \pi a \, . \, b$, při čemž a, b jsou poloosy ellipsy. Určeme tyto jednoduše z $\Delta a_2 b_2 v_2$, kde

$$2a = \frac{m \sin 2\beta}{\sin \gamma},$$

pro $\gamma = \psi - \beta$ tedy

$$2a = \frac{m \sin 2\beta}{\sin(\psi - \beta)};$$

z toho

$$a = \frac{m \sin 2\beta}{2 \sin(\psi - \beta)}, \tag{1}$$

kde $m = \overline{v_2 b_2}$.

Pro ellipsu platí: $b^2 = a^2 - e^2$; jedná se tedy o vypočtení excentricity e.

Z $\varDelta\, a_2 f_2 o_2$ plyne, že

$$\varrho = (a + e) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\psi - \beta) \tag{2}$$

a z $\varDelta\, b_2 f_2 o_2$ plyne, že

$$\varrho = (a - e) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\delta; \tag{3}$$

$$\delta = 2R - (\gamma + 2\beta)$$

čili

$$\delta = 2R - (\psi + \beta).$$

Porovnáme-li tyto rovnice, určíme z nich jednoduchými početními úkony e.

$$(a + e) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\psi - \beta) = (a - e) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\psi + \beta)$$

$$a[\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}[2R - (\psi + \beta)] - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\psi - \beta)]$$
$$= e[\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}[\psi - \beta) + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}[2R - (\psi + \beta)]],$$

čili

$$a \frac{\sin(R - \psi)}{\sin \frac{1}{2}(\psi + \beta) \cos \frac{1}{2}(\psi - \beta)} = e \frac{\sin(R - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\psi - \beta) \,.\, \sin \frac{1}{2}(\psi + \beta)}$$

a tedy

$$a \cos \psi = e \cos \beta;$$

z toho

$$e = a \frac{\cos \psi}{\cos \beta} \tag{4}$$

a tedy

$$b^2 = a^2 - a^2 \frac{\cos^2 \psi}{\cos^2 \beta}$$

$$b^2 = a^2 \frac{\cos^2 \beta - \cos^2 \psi}{\cos^2 \beta}$$

$$b = \frac{a}{\cos \beta} \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \psi} = \frac{a}{\cos \beta} \sqrt{(\cos \beta - \cos \psi)(\cos \beta + \cos \psi)}$$

a nahradíme-li výrazy schopnými logarithmování, bude

$$b = \frac{a}{\cos \beta} \sqrt{\sin(\beta + \psi) \sin(\psi - \beta)}. \tag{5}$$

Tedy $z = \pi ab$.

$$z = \pi \frac{a^2}{\cos\beta} \sqrt{\sin(\beta + \psi)\sin(\psi - \beta)}$$

a dosadíme-li za a (1), bude

$$z = \frac{\pi}{\cos\beta} \cdot \frac{m^2 \sin^2 2\beta}{4\sin^2(\psi - \beta)} \sqrt{\sin(\beta + \psi)\sin(\psi - \beta)}$$

a tedy

$$K = \tfrac{1}{3} \frac{\pi}{\cos\beta} \frac{m^2 \sin^2 2\beta}{4\sin^2(\psi - \beta)} \sqrt{\sin(\beta + \psi)\sin(\psi - \beta)} \,.\, m \sin\varepsilon,$$

kde $\varepsilon = \psi + \beta$, tedy po úpravě vložením některých činitelů pod odmocnítko

$$K = \tfrac{1}{6} \pi m^3 \sin 2\beta \sin\beta \sqrt{\left[\frac{\sin(\psi + \beta)}{\sin(\psi - \beta)}\right]^3},$$

kterýžto výraz je schopný logarithmického počítání.

(Dokončení.)

O některých analogiích mezi hydrodynamikou a naukou o elektřině *).

Žákům středních škol píše prof. Dr. **Bohumil Kučera.**

Hydrodynamikou nazývá se nauka o pohybu kapalin. Některé vlastnosti proudící kapaliny jeví velikou formální podobnost s vlastnostmi elektrického (magnetického) pole nebo s vlastnostmi proudící elektřiny, takže duch lidský, zvyklý objasňovati si neznámé zjevy z denní zkušenosti běžnými a názornými zjevy mechanickými, začasté podléhal pokušení, viděti v těchto podobnostech více než *analogii*, viděti v nich *výklad* zjevů neznámých. V dalších vývodech poznáme, že začasté není toto počínání si oprávněno, ježto oba druhy zjevů jeví vedle podobností také rozpory, jež ovšem stávají se začasté patrnými teprve tehdy, sledujeme-li zjevy podrobně, nejlépe cestou mathematické analyse.

*) Tento článek řadí se k dřívějším „O pohybu otáčivém“ a „O rázu těles“ v ročníku loňském a předloňském a platí o něm totéž, co tam bylo řečeno. Učebnice fysiky pro vyšší třídy středních škol Jeništa-Mašek Nachtikalova, jejíž vývody článek doplňuje, jest citována dílem (I. či II.) a stránkou a to na prvém místě vydání pro gymnasia, na druhém vydání pro reálky. Článek přináší současně materiál pro řešení fysikálních úloh.