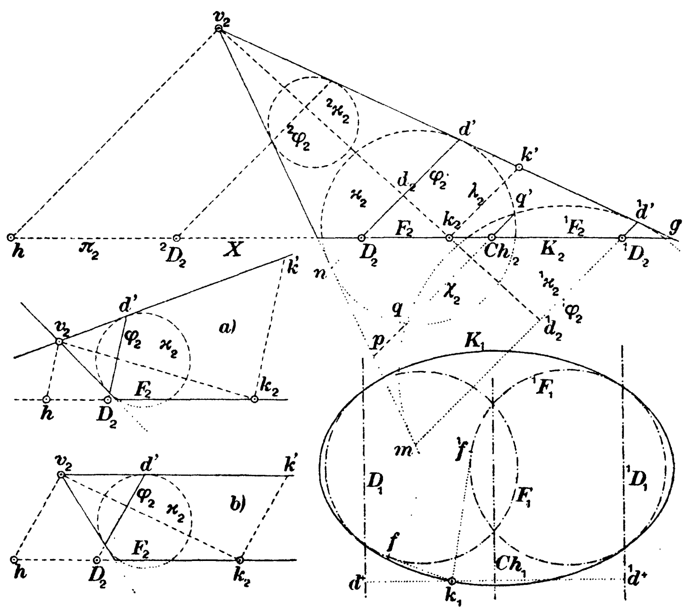
Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O fokálních kružnicích kuželoseček.

Napsal Dr. Fr. Kadeřávek.

Dán buď rotační kužel, jehož vrchol buď bod v a osa buď rovnoběžna s nárysnou, nakloněna však k půdorysně (obr. 1.). Vyhledejme stopu K kužele na půdorysně jakož i kružnici F,



Obr. 1.

v níž seče první průmětna π plochu kulovou $\varkappa$, vepsanou do daného kužele a dotýkající se ho podél kružnice φ. Dále narýsujme půdorysnou stopu D roviny křivky φ. Po té vytkněme obecný bod k křivky K a veďme jím k ploše kulové $\varkappa$ tečny

$\overline{kf}$ — jest to přímka položená v půdorysně a tečna kružnice F a $\overline{kd}$ — totožnou s povrchovou přímkou $\overline{kdv}$; nárys $\overline{k_2d_2}$, pravá velikost $\overline{k'd'}$ vyhledána pomocí bodem k proložené kružnice λ na daném kuželi. Délky těchto tečen jsou si rovny; $\overline{d'k'} = \overline{fk}$. Spustíme-li s bodu k kolmici $\overline{kd^+}$ k přímce D, jest

$$\overline{d^+k_1} = \overline{D_2k_2},$$

proto poměr

$$\overline{d^+k_1} : \overline{k_1f} = \overline{D_2k_2} : \overline{d'k'} = \overline{hg} : \overline{gv_2} = c$$

veličinou stálou. Z toho jest patrno, že, nazveme-li „vzdáleností" bodu k_1 od kružnice F délku tečny $\overline{kf_1}$, platí věta:

1. Geom. místo bodů, pro něž poměr vzdáleností od dané přímky D a dané kružnice F jest stálý, jest kuželosečka K.

Kružnice F nazývá se fokální kružnicí křivky K a přímka D jest příslušnou přímkou řídící. Ježto koule $\varkappa$ se podél kružnice φ daného kužele dotýká, patrno, že

2. Kuželosečka K dotýká se fokální kružnice v průsečných bodech jejích s přímkou řídící.

Sestrojme další plochu kulovou ${}^1\varkappa$, která se plochy kuželové dané dotýká podél kružnice ${}^1\varphi$, jejíž rovina mějž prvou stopu v přímce ${}^1D$; půdorysný řez plochy kulové ${}^1\varkappa$ buď kružnice ${}^1F$. Poměr vzdáleností libovolného bodu k_1 křivky K od útvarů ${}^1D$, ${}^1F$ jest

$$\overline{k_1{}^1d} : \overline{k_1{}^1f} = \overline{k_2{}^1D_2} : \overline{k'{}^1d'} = \overline{hg} : \overline{gv_2} = c,$$

tedy opět stálý a týž jako prvé. Kuželosečka K se dotýká též kružnice ${}^1F$ v průsečících jejích s přímkou ${}^1D$. Patrno z toho, že

3. Každá kružnice, která se dotýká dvakráte kuželosečky K, jest její fokální kružnice; spojnice dotyčníků jest příslušná řídící přímka.

Mezi fokální kružnice přináleží též ohnisko, které tvoří přechod od reálných k imaginárným kružnicím fokálným. Tak na př. plocha kulová ${}^2\varkappa$ protíná půdorysnu v imaginárné kružnici fokální, k níž však náleží reálná přímka řídící ${}^2D$ (nárys ${}^2D_2$).

4. Pro veškery dvojiny fokálních kružnic a příslušných řídících přímek má při téže kuželosečce (neb kuželosečkách po-

dobných) stálá hodnota c touž velikost a to při ellipse jest $c < 1$ (viz obr. 1.); při hyperbole jest $c > 1$ (obr. 1. a); při parabole jest $c = 1$ (obr. 1. b).

Na základě uvedených vět snadno lze sestrojiti kuželosečku, dána-li fokální kružnice, přímka řídící a buď bod neb hodnota stálého poměru c, neb dána-li osa kuželosečky, fokální kružnice a dva body.

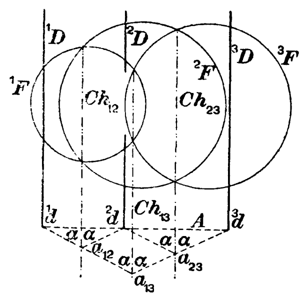
Koule $\varkappa$ a ${}^1\varkappa$ protínají se v kružnici χ, půdorysná stopa Ch roviny této křivky jest chordálou kružnic F a ${}^1F$. Ježto jest

$$\overline{np} = \overline{mp} = \sqrt{\overline{pq} \cdot \overline{pq'}},$$

jest i

$$\overline{D_2 Ch_2} = \overline{Ch_2 {}^1D_2}$$

a proto i vzdálenost přímek D, ${}^1D$ od chordály Ch stejná.



Obr. 2.

5. Přímky řídící D, ${}^1D$ příslušící k fokálním kružnicím F, ${}^1F$ jsou stejně vzdáleny od jejich chordály.

Na základě této věty snadno určíme přímku řídící ${}^1D$, dána-li kružnice fokální F, přímka řídící D a další kružnice fokální ${}^1F$ kuželosečky. (Centrála křivek F, ${}^1F \perp D$.) Též možno uvedenou větou provésti řešení kuželosečky dané 3 kružnicemi ${}^1F$, ${}^2F$, ${}^3F$ fokálními (středy samozřejmě v jedné přímce), obr. 2. Vyhledejme chordály $Ch_{1,2}$, $Ch_{1,3}$, $Ch_{2,3}$ a na jedné z nich na př. $Ch_{1,3}$ vytkněme bod $a_{1,3}$. Jím veďme obě od přímky $Ch_{1,3}$ o libovolný úhel α odchýlené přímky, jejichž průsečíky $a_{1,2}$, $a_{2,3}$ s chordálami $Ch_{1,2}$, $Ch_{2,3}$ opět přímky pod týmž úhlem α. Průsečíkem ${}^2d$ posledně sestrojených přímek veďme paprsek $A \perp Ch_{1,3}$ a vyšetřme průsečíky jeho ${}^1d$, ${}^3d$ s přímkami bodem $a_{1,3}$ vedenými. Body ${}^1d$, ${}^2d$, ${}^3d$ vedené kolmice ${}^1D$, ${}^2D$, ${}^3D$ k paprsku A jsou řídící přímky příslušné k daným fokálním kružnicím, neboť jsou vždy po dvou stejně vzdáleny od příslušných chordál.

Konstrukce této lze použíti k vyšetření obrysu plochy 2. stupně, známy-li 3 kruhové průměty tří kuželoseček povrchových neb jsou-li dány orthog. obrysy tří ploch kulových dané rotační plochy 2° se dotýkajících.

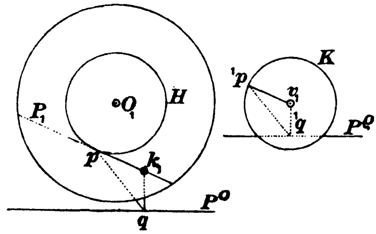
Z obr. 1. dále patrno, že vzhledem k rovnostem

$$\overline{k_1 f} = d'k'; \quad \overline{k_1 {}^1f} = k'{}^1d'$$

algeb. součet

$$fk_1 + k_1{}^1f = d'k' + k'{}^1d' = d'{}^1d' = C$$

jest pro křivku K konstantní. I jest



Obr. 3.

6. geom. místo bodů, pro něž alg. součet vzdáleností (měřených délkami tečen) od dvou pevných kružnic F, ${}^1F$ jest konstantní, kuželosečka, dané kružnice jsou její kružnice fokální.

V obr. 3. buď O_1 orth. průmět osy sborceného hyperboloidu rotačního, jehož hrdlo H buď v průmětně. P_1 buď průmět obecné povrchové přímky P; $\overline{{}^1pv_1}$ průmět s přímkou P rovnoběžné přímky řídícího kužele (Kv) daného hyperboloidu, který protněme rovinou σ. Stopa její buď P^σ, P^ϱ buď stopa roviny $\varrho \parallel \sigma$ a jdoucí vrcholem v řídícího kužele. Průsečík k přímky P s rovinou σ stanovíme následovně: Bodem v veďme přímku největšího spádu $\underline{v{}^1q}$ v rovině ϱ, dále stopou p přímky P rovnoběžku $\overline{pq}$ k $\underline{\overline{{}^1p{}^1q}}$ a průsečíkem q oné se stopou P^σ přímku největšího spádu $\overline{qk}$ v rovině σ, t. j. $\overline{qk} \parallel \overline{{}^1qv}$. I jest pak

$$\triangle pqk_1 \sim \triangle {}^1p{}^1qv_1,$$

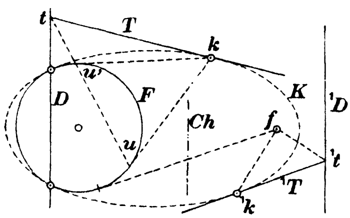
tudíž poměr $\overline{k_1 q} : \overline{k_1 p} = \overline{v_1 {}^1q} : \overline{v_1 {}^1p} =$ poměru vzdálenosti bodu v_1 od přímky P^v k poloměru kružnice K, tedy hodnotě stálé. Proto:

7. Řez rovinný rotač. hyperboloidu sborceného promítá se kolmo na rovinu hrdla do kuželosečky, pro niž hrdlo plochy jest fokální kružnice a stopa roviny sečné příslušnou přímkou řídící.*)

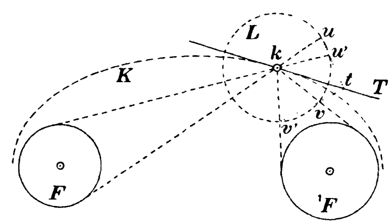
Z věty uvedené snadno odvodíme známou větu o

7*a* rotačním kuželi: Vrchol rot. kužele promítá se do roviny kolmé k ose do ohniska průmětu rovinného řezu.

Věty 7. a 7*a* můžeme použíti ke konstrukci tečny T kuželosečky K v bodě k (obr. 4.), známe-li kružnici fokální F a příslušnou přímku řídící D. Předpokládejme, že K je průmět



Obr. 4.



Obr. 5.

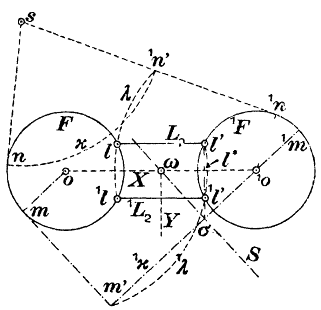
rovinného řezu hyperboloidu na rovinu hrdla F, D je stopa roviny tečné. Rovině tečné bodu k přísluší na rovině hrdla stopa $\overline{uu'}$ a tudíž $\overline{tk}$, kde t jest průsečík přímky $\overline{uu'}$ s přímkou D, je průmět průsečnice roviny sečné s rovinou tečnou hyperboloidu, tedy tečna k průmětu K křivky sečné. V témž obraze vyznačena známá konstrukce pro ohnisko f a přímku řídící ${}^1D\,(\overline{f\,{}^1t} \perp \overline{f\,{}^1k})$.

Dva rot. sbor. hyperboloidy o rovnoběžných osách a témž kuželi řídícím mají krom nekonečně vzdálené křivky ještě jednu kuželosečku společnou. Tato promítá se na rovinu kolmou k osám hyperboloidů do kuželosečky K (obr. 5.) a hrdla F, ${}^1F$ do jejích kružnic fokálních. Chceme-li v libovolném bodě k křivky K sestrojiti tečnu, sestrojíme bodem k tečny ke kružnicím F, ${}^1F$;

*) Srv. Brisse, Cours de géométrie descriptive, II, 1891, str. 234 a n. a Mannheim, Cours de géométrie descriptive, 1880, str. 403, leçon 28.

jsou to průměty površek obou systémů hyperboloidů uvažovaných. Naneseme-li na tyto tečny stejné úsečky od bodu k do bodů u, u'; v, v' kružnicí L kol k opsanou, tu $\overline{uu'}$, $\overline{vv'}$ jsou hlavní přímky (různoběžné) tečných rovin obou hyperboloidů v bodě k a jest tudíž spojnice průsečíku t přímek $\overline{uu'}$, $\overline{vv'}$ s bodem k průmět průsečnice rovin tečných, tedy tečna ke křivce K. Kdybychom bodem t vedli tečny ke kružnici L a spojili dotyčníky s bodem k, obdrželi bychom dva paprsky, jdoucí ohnisky křivky K.

Mannheim A. užívá kuželosečky určené bodem a dvěma fokálními kružnicemi při sestrojování dvojných bodů vrženého stínu prstence. Buďtež (obr. 6.) F, ${}^1F$ kružnice světelného meridiánu prstence a bod s buď bod svítící. Veďme jím tečny $\overline{sn}$, s^1n k F, ${}^1F$, učiňme $\overline{s^1n'} = \overline{sn}$ a opišme kol středu ${}^1o$ bodem



Obr. 6.

${}^1n'$ kružnici λ a její průsečíky s F označme l, ${}^1l$. V těchto bodech dotýká se meridián rot. hyperboloidu sborceného, procházejícího bodem s, a souosého s daným torem křivky F, tedy prstence sama dotýká se použitý hyperboloid podél kružnic L, ${}^1L$ (průměty L_2, ${}^1L_2$) body l, ${}^1l$ popisovaných. Povrchová přímka pomocného hyperboloidu, jdoucí bodem s, náleží jeho mezi stínu vlastního a průsečíky její s kružnicemi L, ${}^1L$ jsou dva body meze stínu vlastního daného prstence, které, spočívajíce na jediném paprsku světelném, vrhají stín oba do téhož bodu, dvojného to bodu meze stínu vrženého.

V obr. 6. vyznačena též konstrukce pro osvětlení paprsky rovnoběžnými se směrem S (v rovině křivek F, ${}^1F$ položeným). Konstrukci lze provésti též velmi jednoduše dle M. Janina takto:

Středem ω prstence veďme paprsek S, středem ${}^1o$ meridiánu světelného ${}^1F$ k němu kolmici $\overline{{}^1o\sigma}$, průsečíkem jejím σ s S kolmici k $\overline{\omega{}^1o}$ a průsečíky l', ${}^1l'$ této s ${}^1F$ kružnice L, ${}^1L$, na nichž položené body mezi stínu vlastního mají společný vržený stín, tedy určují dvojný bod meze stínu vrženého. Konstrukci tuto možno snadno odůvodniti počtem; jeť při hyperbole, jejíž asymptota jest S, osy XY, délky poloos a, b a jeden její bod l' o souřadnicích (x, y), subnormála $\overline{l^{*1}o}$ budu l' dána výrazem $\frac{b^2}{a^2}x$; v obr. 6. $\overline{l^{*1}o} \, . \, x = \overline{l^*\sigma^2}$, $\frac{l^*\sigma}{x} = \frac{b}{a}$, tedy $\overline{l^{*1}o} = \frac{b^2}{a^2}x$. (Mannheim A., Cours de géométrie descriptive, 1880, str. 340. Srv. zejména čl. p. Dra. Q. Vettera: Kuželosečky dvojnásobně se dotýkající dvou kružnic. Tohoto časopisu roč. XLIV. str. 415.).

Vypočítávání obsahu šikmo seříznutého kužele.

Žákům středních škol podává Fr. Granát, prof. reálky v Kostelci n. Orl.

Protneme-li rotační kužel rovinou, je známo, že řezem je kuželosečka. Je-li odchylka povrchových přímek od osy kužele β, je odchylka myšlené roviny základny (kolmé k ose kužele) od povrchových přímek $\alpha = R - \beta$, a odchylka roviny řezu od osy kužele ψ, tedy od základny $\omega = R - \psi$, platí, že řez je kruhový pro $\psi = R \, (\omega = 0)$, řez je elliptický pro $\psi > \beta \, (\omega < \alpha)$, parabolický pro $\psi = \beta \, (\omega = \alpha)$ a hyperbolický pro $\psi < \beta \, (\omega > \alpha)$.

Vezmeme-li v úvahu právě odchylku roviny řezu od osy, můžeme mluviti o nekonečné ploše kuželové seříznuté rovinou, vedenou bodem na povrchové přímce v určité vzdálenosti od vrcholu, bez ohledu na velikost poloměru základny kužele. Tím se nám naskýtá úloha vypočísti obsah takto odříznutého kužele a také ovšem kužele komolého, vzniklého oddělením tohoto od úplného kužele, který musíme ovšem omeziti řezem kolmým k ose kužele v určité vzdálenosti od jeho vrcholu.

Ku stanovení krychlového obsahu odříznutého kužele musíme znáti rozměry kuželoseček.*) Rozměry tyto lze s výho-

---

*) Srovnej pojednání: *Václav Hübner* „O plášti rotačního kužele, seříznutého rovinou.“ Výroční zpráva c. k. reálky na Král. Vinohradech, šk. r. 1903—4, a jednotlivé články v Č. Č. M. roč. 33, 38.