Matyáš Lerch

Poznámka o integrálu Binetově

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 5, 274--277

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123711`

$$\frac{A}{\alpha}+\frac{B}{\beta}+\ldots+\frac{L}{\lambda}=1$$

et un calcul facile conduit à la valeur suivante,

$$J=C+\log a+\frac{A\log\alpha}{\alpha}+\frac{B\log\beta}{\beta}+\ldots+\frac{L\log\lambda}{\lambda}.$$

Poznámka o integrálu Binetově.

Sdílí

M. Lerch,

docent české vysoké školy technické v Praze.

Z theorie funkce gamma jest po Cauchyovi a Binetovi známo, že integrál *)

$$(1)\qquad \varpi(\omega)=\int\limits_0^\infty\frac{2\operatorname{arctg}\frac{x}{\omega}\,dx}{e^{2x\pi}-1}$$

souvisí s funkcí gamma rovnicí

$$(2)\qquad \log\Gamma(\omega)=\left(\omega-\frac{1}{2}\right)\log\omega-\omega+\log\sqrt{2\pi}+\varpi(\omega).$$

Jsou-li ω_1, ω_2 dvě kladné realné veličiny, obdržíme pomocí vzorce (1) užitím elementarného vztahu

$$(a)\qquad \operatorname{arctg}\frac{x}{\omega_1}+\operatorname{arctg}\frac{x}{\omega_2}=\operatorname{Arctg}\frac{x(\omega_1+\omega_2)}{\omega_1\omega_2-x^2},$$

kde Arctg z znamená arctg z při $z>0$, ale arctg $z+\pi$ při $z<0$, rovnici

---

*) Viz rozmanité učebnice počtu integrálního, neb Meyer, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale, po případě autorovy články uveřejněné ve Věstníku České Akademie r. 1893.

$$\varpi(\omega_1)+\varpi(\omega_2)=\int\limits_0^\infty \frac{2\,\mathrm{Arctg}\,\dfrac{x(\omega_1+\omega_2)}{\omega_1\omega_2-x^2}}{e^{2x\pi}-1}\,dx\,.$$

Abychom tento integrál přetvořili, pišme

$$\omega_1+\omega_2=2\alpha\,,\qquad \omega_1\omega_2=\beta\,,$$

a proveďme substituci

$$\frac{\beta-x^2}{2\alpha x}=z\,,$$

tedy

$$x=-\alpha z+\sqrt{\alpha^2z^2+\beta}\,,$$

$$dx=-\alpha\,.\,\frac{-\alpha z+\sqrt{\alpha^2z^2+\beta}}{\sqrt{\alpha^2z^2+\beta}}\,dz\,,$$

čímž vznikne

$$\varpi(\omega_1)+\varpi(\omega_2)=2\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Arctg}\,\dfrac{1}{z}}{e^{2(-\alpha z+\sqrt{\alpha^2z^2+\beta})}-1}\,\frac{-\alpha z+\sqrt{\alpha^2z^2+\beta}}{\sqrt{\alpha^2z^2+\beta}}\,dz.$$

Ježto*)

$$d\log\left(1-e^{2\pi(\alpha x-\sqrt{\alpha^2x^2+\beta})}\right)$$

$$=\frac{-2\pi\alpha}{e^{2\pi(-\alpha x+\sqrt{\alpha^2x^2+\beta})}-1}\,.\,\frac{-\alpha x+\sqrt{\alpha^2x^2+\beta}}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta}}\,dx\,,$$

obdržíme částečnou integrací — majíce zřetel k okolnosti, že funkce Arctg $\frac{1}{x}$ jest spojitou v oboru $(-\infty\ldots\infty)$ a má pro $x=-\infty$ hodnotu π, pro $x=+\infty$ hodnotu 0, takže součin

$$(b)\qquad \mathrm{Arctg}\,\frac{1}{x}\,.\,\log\left(1-e^{2\pi(\alpha x-\sqrt{\alpha^2x^2+\beta})}\right)$$

mizí jak pro $x=\infty$ tak pro $x=-\infty$ — vzorec

---

*) Ve svých publikacích označuji přirozený logarithmus literami log.

$$(3)\ \varpi(\omega_1)+\varpi(\omega_2)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\log\left(1-e^{2\pi\left(\alpha x-\sqrt{\alpha^2x^2+\beta}\right)}\right),$$

kde ω_1 a ω_2 značí kořeny rovnice druhého stupně

$$(3^a)\qquad \omega^2-2\alpha\omega+\beta=0\,.$$

Dosadíme-li sem za $\varpi(\omega)$ hodnotu plynoucí ze vzorce (2)

$$\varpi(\omega)=\log\Gamma(\omega)-\left(\omega-\frac{1}{2}\right)\log\omega+\omega-\log\sqrt{2\pi}\,,$$

máme vztah

$$(3^*)\qquad \begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\log\left(1-e^{2\pi\left(\alpha x-\sqrt{\alpha^2x^2+\beta}\right)}\right)\\ &=\left(\omega_1-\frac{1}{2}\right)\log\omega_1+\left(\omega_2-\frac{1}{2}\right)\log\omega_2-2\alpha\\ &-\log\Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2)+\log 2\pi\,.\end{aligned}$$

Píšeme-li v tomto vzorci neb ve vzorci (3) $\omega_1=\omega_2=\omega$, vznikne nový způsob vyjádření funkce $\varpi(\omega)$:

$$(4)\quad \varpi(\omega)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\log\left(1-e^{2\omega\pi\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}\right).$$

Zajímavější zdá se výsledek (3*) v případě $2\alpha=1$, kdy totiž $\omega_2=1-\omega_1$, takže pak

$$\Gamma(\omega_1)\,\Gamma(\omega_2)=\frac{\pi}{\sin\omega_1\pi}\,.$$

Píšeme-li zde ω za ω_1, a zároveň $\beta=\omega-\omega^2$, vznikne vztah

$$(5)\qquad \begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\log\left(1-e^{\pi x-\pi\sqrt{x^2+4\omega-4\omega^2}}\right)\\ &=\left(\omega-\frac{1}{2}\right)\log\frac{\omega}{1-\omega}+\log\sin\omega\pi+\log 2-1\,,\end{aligned}$$

při čemž se předpokládá $0<\omega<1$.

Pro začátečníky poznamenáváme, že co se tkne mizení výrazu (b) jest v případě $x = -\infty$ prvý činitel konečný a druhý se blíží nulle, kdežto pro kladná velká x máme

$$1 - e^{2\pi(\alpha x - \sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta})} = 1 - e^{-\frac{\pi\beta}{\alpha x} + \frac{c_1}{x^3} + \frac{c_2}{x^4} + \cdots}$$

$$= \frac{\pi\beta}{\alpha x} + \frac{d_1}{x^2} + \frac{d_2}{x^3} + \frac{d_3}{x^4} + \cdots,$$

kde $c_1, c_2, \ldots$ a $d_1, d_2, d_3, \ldots$ jsou konstanty, na jichž hodnotách nezáleží, a tedy bude

$$\log(1 - e^{2\pi(\alpha x - \sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta})}) = \log \frac{\pi\beta}{\alpha x} + \frac{e_1}{x} + \frac{e_2}{x^2} + \cdots,$$

z čehož soudíme, že výraz (b) má pro $x = \infty$ hodnotu

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \log \frac{\pi\beta}{\alpha x} = 0,$$

jak tvrzeno.

Vyložené zde výsledky (3*) a (4) s pominutím početních detailů a bližšího určení funkce Artg uveřejnili jsme v XXXI. svazku páně Battagliniova Giornale di Matematiche, v sešitě květnovém a červnovém r. 1893.

Poznámky k Artztovým parabolám v trojúhelníku.

Napsal

Jan Marek,

professor na vojenské akademii v Novém Městě za Vídní.

V novější geometrii trojúhelníka důležitou úlohu mají 3 paraboly, dotýkající se dvou stran trojúhelníka v krajních bodech třetí strany. Tyto křivky (spolu se soustavou jiných tří parabol) vyšetřoval poprvé *Artzt* v programu gymnasia Recklinghausenského r. 1884 (Untersuchungen über ähnliche Punktreihen auf den Seiten eines Dreieckes etc.). Po něm zabýval