

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Z geometrie kuželoseček. [III.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 5, 288–292

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123709>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1894

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

$$Q' \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

délku střední přímky QQ' , rovnoběžné ku AX , obdržíme

$$QQ' = m = \frac{x_1 + x_2}{2} + \sqrt{x_1 x_2} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2p} + \frac{y_1 y_2}{p} = (y_1 + y_2)^2 \cdot \frac{1}{2p}.$$

Bod Z jako průsek přímek QQ' a $B'C'$ má souřadnice

$$(23) \quad Z \begin{cases} x = \frac{m}{2} = \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{p} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

a tu vidíme opět, že rovnici $y^2 = px$ souřadnicemi bodu Z úplně se vyhovuje, t. j. bod Z leží na parabole. Že zároveň bod Z v tangente $B'C'$ leží, přesvědčíme se, když souřadnice jeho dosadíme do rovnice (22).

Z geometrie kuželoseček.

Píše

M. Lerch,

docent vysoké školy technické v Praze.

(Dokončeno.)

Naopak lze ukázati, že každá racionální čára stupně třetího má bod dvojný.*)

Omezíme se na důkaz věty, že čáry stupně třetího s bodem dvojným jsou zvláštní, t. j. že obecně čára stupně třetího bodu dvojného nemá. Neb buď $F(x, y) = 0$ rovnice stupně třetího; aby (x_0, y_0) byl bod dvojný, je potřebí i dostačí, aby v rovnici

*) O racionálních čarách v rovině viz monografii p. Ed. Weyra v VIII. roč. Časopisu. Dále též úvahy p. Hermitea ve knize Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique a pak Emil Weyr, Beiträge zur Curvenlehre.

$$F(x_0 + \xi, y_0 + \eta) = 0$$

růzvinuté dle ξ a η scházeli členové lineární. To vyjadřuje tři rovnice mezi dvěma neznámými x_0 a y_0 , jichž vyloučením plyne zcela určitý vztah mezi součiniteli rovnice.

Chceme ještě vyšetřiti, jak vypadá v souřadnicích cotangentových ξ, η (o nichž byla řeč v §. 7.) rovnice křivky stupně třetího mající v bodě C_1 bod dvojný a procházející jednoduše bodem C_2 .

Rovnice bude rozměru třetího, a sice tvaru

$$(3) \quad (A_0\xi^2 + A_1\xi + A_2)\eta + B_0\xi^2 + B_1\xi + B_2 = 0.$$

Neboť paprsek $\xi = \text{const.}$ svazku C_1 protne čáru jen v jednom bodě polyblivém, a tedy musí η přicházeti v rovnici pouze ve stupni prvé.

Naproti tomu paprsek $\eta = \text{const.}$ svazku C_2 protne křivku ve dvou bodech polyblivých a tedy musí býti rovnice vůči ξ stupně druhého.

Z rovnice (3) plyne, že přímky svazku C_2 protínají naši křivku stupně třetího v řadě dvojici bodových, které se z bodu C_1 promítají ve svazku involučním.

Každému páru paprskové involuce (C_1) přísluší jeden paprsek svazku (C_2) a naopak; lze říci, že svazek (C_2) a involuce (C_1) jsou spolu promětny.*)

Doporučujeme čtenáři důkaz věty:

Kuželosečka neprocházející žádným ze tří základních bodů Steinerovy transformace (s_1, s_2, t), přejde touto v křivku stupně čtvrtého, mající v základních bodech druhé soustavy (σ_1, σ_2, τ) body dvojně.

Tímto způsobem lze obdržeti veškerý křivky stupně čtvrtého mající tři realné body dvojně.

Křivky stupně čtvrtého se třemi body dvojnými jsou rovněž racionální.

Abychom to ukázali, buď C čarou stupně čtvrtého mající tři body dvojně a, b, c . Volme na čáře další bod d , a uvažujme

*) S tohoto hlediska vyložena theorie čar stupně třetího ve spise Emila Weyra „Theorie der mehrdeutigen Elementargebilde“ v Lipsku u Teubnera vydaném.

svazek kuželoseček o vrcholech a, b, c, d ; rovnice jeho bude tvaru

$$(\lambda) \quad K_0(x, y) + \lambda K_1(x, y) = 0,$$

kde K_0 a K_1 jsou dva určité výrazy stupně druhého.

Libovolná kuželosečka (λ) našeho svazku protne čáru C v osmi bodech, z nichž třikrát dvě splývá s body dvojnými a, b, c a jeden s bodem d ; zbývá tedy jen jeden pohyblivý průsek čáry C s kuželosečkou našeho svazku. Řešením rovnice (λ) , spojené s rovnicí čáry C , musí se objeviti x a y jako jednoznačné t. j. racionální funkce algebraické proměnné λ , a tedy je čára racionálnou.

10. Ke konci budiž ukázáno, jak lze transformace Steinerovy užití k řešení konstruktivních úloh druhého stupně.

Prochází-li kuželosečka C body s_1 a s_2 , transformuje se v kuželosečku Γ , procházející body σ_1 a σ_2 , a dále oběma body, v nichž přímka (osa) transformace T protíná čáru C .

Mějme naopak dány dvě libovolné kuželosečky C a Γ a přímku T ; spojující dva jejich průseky. Jsou-li pak s_1, s_2, a libovolné body kuželosečky C , a α libovolný bod kuželosečky Γ , existuje Steinerova transformace $(s_1s_2; \sigma_1\sigma_2, T)$, kterou se kuželosečka C převádí v kuželosečku Γ a ve které bodu α odpovídá bod a .

Důkaz. Přímky s_1a, s_2a protnou osu T v bodech a_1, a_2 ; nazveme σ_1 a σ_2 druhé průseky přímek a_1a, a_2a s kuželosečkou Γ .

Volíme-li pak body $s_1s_2, \sigma_1\sigma_2$ a osu T za základ Steinerovy transformace, přejde touto kuželosečka C v kuželosečku Γ' , která obsahuje body σ_1, σ_2 , dále oba průseky čáry C s osou T , a bod α ; všech těchto pět bodů leží na čáře Γ a tedy splývá Γ' s Γ . Tím naše tvrzení dokázáno.

Této okolnosti užijeme k řešení úkolu:

Sestrojiti průsečíky určité přímky P s kuželosečkou danou pěti body.

Dvěma z daných bodů čáry C vedme libovolnou kružnici Γ , a přímku T , jejíž průsek s danou přímkou P znamenejme t .

Tímto bodem vedme libovolnou přímku protínající kružnici Γ ve dvou reálných bodech σ_1, σ_2 .

Zvolíme-li na Γ libovolně bod α a přidružíme mu kterýkoli ze zbylých daných bodů α čáry C , sestrojíme snadno na C středy transformační s_1 a s_2 ; jsou to průseky čáry C s přímkami spojujícími bod α s body α_1, α_2 , ve kterých přímky $\sigma_1\alpha, \sigma_2\alpha$ protínají osu T .

Touto transformací ($s_1s_2; \sigma_1\sigma_2; T$) převádí se kuželosečka C v kružnici Γ a přímka P — ana prochází bodem t — v přímku II . Průseky přímky této s kružnicí Γ odpovídají právě naší transformaci hledaným průsekům čáry C a přímky P , i obdrží se transformací zpátečnou.

Další úkol, z daného bodu vésti tečny ke kuželosečce, řeší se takto:

Daný bod znamenejme t , vedme jím a libovolným bodem e kuželosečky C přímku T , která protne čáru C v dalším bodě f . Body ef vedme libovolně kružnici Γ , a ustanovme její průseky σ_1, σ_2 s některou přímkou vedenou bodem t ; volíme-li na Γ libovolně bod α , a rovněž na C libovolně bod α , sestrojí se body s_1, s_2 na C jako v úloze předešlé. Transformací ($s_1s_2; \sigma_1\sigma_2; T$) převádí se kuželosečka C v kružnici Γ a přímky vedené bodem t opět v přímky; zvláště přejdou hledané tečny čáry C ve dvě přímky vedené bodem τ , které patrně budou tečnami kruhu Γ ; tečny ty však umíme sestrojiti a zpátečnou transformací obdržíme hledané tečny čáry C .

Další úkol, sestrojiti čtvrtý průsek dvou kuželoseček C_1 a C_2 , jejichž tři průseky jsou známy, řeší se tím, že známé tři průseky volíme za základní body s_1s_2t Steinerovy transformace, kterou se pak C_1 a C_2 převedou v přímky Γ_1 a Γ_2 , jichž průsečík odpovídá v transformaci hledanému průseku čar C_1 a C_2 .

Mějme konečně dány dvě kuželosečky, jež se protínají ve dvou daných bodech, a hledejme zbývající dva jich průseky.

Volíme-li známé dva průsečíky za středy s_1, s_2 Steinerovy transformace a třetí základní bod její t na jedné z obou čar, převedeme tím úkol na stanovení průseku přímky s kuželosečkou.

11. Mějme nyní kuželosečku C a vytkněme na ní libo-

volně šest bodů $s_1s_2\alpha$, $\sigma_1\sigma_2\alpha$. Existuje osa T, tak aby Steinerovou transformací (s_1s_2 , $\sigma_1\sigma_2$, T) přešla kuželosečka C v samu sebe, a body α , α si v ní odpovídaly. Touto osou T bude přímka spojující průseky ($s_1\alpha$, $\sigma_1\alpha$) a ($s_2\alpha$, $\sigma_2\alpha$). Z konstrukce plyne, že blíží-li se bod m bodu σ_1 (σ_2), blíží se bod přidružený μ poloze s_1 (s_2).

Touto cestou dospěli bychom na novo k větě Pascalově a k souvislé s ní theorii projektivních řad na kuželosečce.

V některém z příštích ročníků vrátíme se k tomuto předmětu, abychom vyložili hlavní věty a konstrukce, týkající se bodů pomyslných.

Věstník literární.

Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. Von Dr. *Rudolf Sturm*, Professor an der Universität zu Breslau. Leipzig. Teubner.

Ještě ku konci tohoto ročníku neváháme upozorniti čtenáře těchto listů na výborný spis, který dosavadní výzkumy o geometrii útvarů paprskových soustavně podává a k nim četné výsledky vlastních prací autorových připojuje. *Díl první* (386 stran) pojednává o komplexu lineárném a tetraedrálném. Vysvětluje nejprve základní útvary a geom. místa geometrie paprskové, hledě zvláště ku mnohoznačné jich sdruženosti. Z toho vyplývají pak hlavní vlastnosti přímkových ploch 3. a 4. stupně. Větší část spisu věnována jest theorii komplexu lineárního pro který spisovatel zavádí název „das Strahlengewinde“; k tomu druží se pojednání o lineárních soustavách takových komplexů načež v oddílu posledním vyšetřuje se podrobně komplex tetraedrálný. Methoda knihy jest ryze synthetická, vedená v duchu Schröterově; památce jeho jest tento I. díl věnován.

Celé dílo, jehož vyšel již také díl druhý, obsahující theorii kongruencí paprskových, ukončeno bude dílem třetím. Hodláme pak o něm obšírněji referovati.

Prof. A. Strnad.

E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II., *Intégrales abéliennes et surfaces de Riemann*. Paris Gauthier-Villars et Fils, 1893.

Ch. Méray, *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et des applications géométriques*. Première partie. Principes généraux. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1894.

Pro nedostatek místa přineseme v 1. čísle příštího ročníku rozbor těchto dvou svazků.

