Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Marek
Poznámky k Artztovým parabolám v trojúhelníku

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 5, 277--288

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123708`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1894

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Pro začátečníky poznamenáváme, že co se tkne mizení výrazu (b) jest v případě $x = -\infty$ prvý činitel konečný a druhý se blíží nulle, kdežto pro kladná velká x máme

$$1 - e^{2\pi\left(\alpha x - \sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta}\right)} = 1 - e^{-\frac{\pi\beta}{\alpha x} + \frac{c_1}{x^3} + \frac{c_2}{x^4} + \cdots}$$

$$= \frac{\pi\beta}{\alpha x} + \frac{d_1}{x^2} + \frac{d_2}{x^3} + \frac{d_3}{x^4} + \cdots,$$

kde c_1, $c_2, \ldots$ a d_1, d_2, $d_3, \ldots$ jsou konstanty, na jichž hodnotách nezáleží, a tedy bude

$$\log\left(1 - e^{2\pi\left(\alpha x - \sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta}\right)}\right) = \log\frac{\pi\beta}{\alpha x} + \frac{e_1}{x} + \frac{e_2}{x^2} + \cdots,$$

z čehož soudíme, že výraz (b) má pro $x = \infty$ hodnotu

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \log\frac{\pi\beta}{\alpha x} = 0,$$

jak tvrzeno.

Vyložené zde výsledky (3*) a (4) s pominutím početních detailů a bližšího určení funkce Artg uveřejnili jsme v XXXI. svazku páně Battagliniova Giornale di Matematiche, v sešitě květnovém a červnovém r. 1893.

Poznámky k Artztovým parabolám v trojúhelníku.

Napsal

Jan Marek,

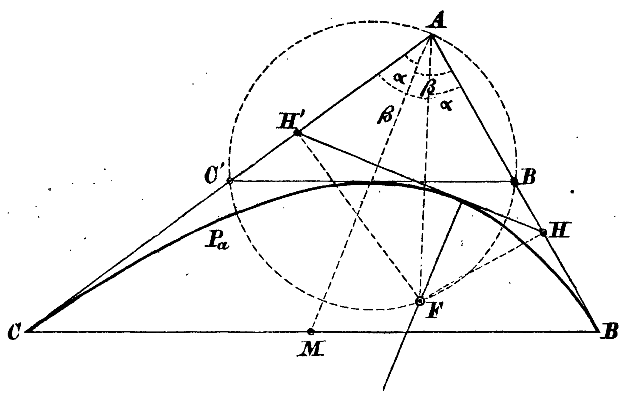
professor na vojenské akademii v Novém Městě za Vídní.

V novější geometrii trojúhelníka důležitou úlohu mají 3 paraboly, dotýkající se dvou stran trojúhelníka v krajních bodech třetí strany. Tyto křivky (spolu se soustavou jiných tří parabol) vyšetřoval poprvé *Artzt* v programu gymnasia Recklinghausenského r. 1884 (Untersuchungen über ähnliche Punktreihen auf den Seiten eines Dreieckes etc.). Po něm zabýval se jimi *Brocard* v článku „Propriétés de l'hyperbole des neuf points et de six paraboles remarquables" („Journal de Mathématiques speciales" 1885) a *G. de Longchamps* v pojednání „Sur les Paraboles de M. Artzt" (tamtéž 1890).

Některé zajímavé vlastnosti oněch tří parabol chceme tuto krátce podati a odůvodniti.

I. *Vlastnosti parabol Artztových.*

1. Pro každý trojúhelník ABC (obr. 1.) existuje parabola P_a dotýkající se stran AB a AC v bodech B a C; poloviční parametr křivky této $\frac{p}{2}$ obdrží se z rovnice $\frac{p}{2} = \frac{S^2}{m^3}$, kdež S naznačuje plochu trojúhelníka a m jeho medianu AM, spojující vrchol A se středem M strany BC.



Obr. 1.

2. Parabola P_a jde středem příčky AM. Tečna v bodu tomto spojuje středy C' a B' stran AB a AC.

3. Dle poučky Lambertovy ohnisko paraboly F leží v kruhu, jejž opíšeme kolem trojúhelníka AB'C'.

Spustíce s ohniska F kolmice na tangenty AB a AC, obdržíme dva body H a H', jichž spojením obdržíme tečnou čáru HH' t. j. tangentu k vrcholu paraboly.

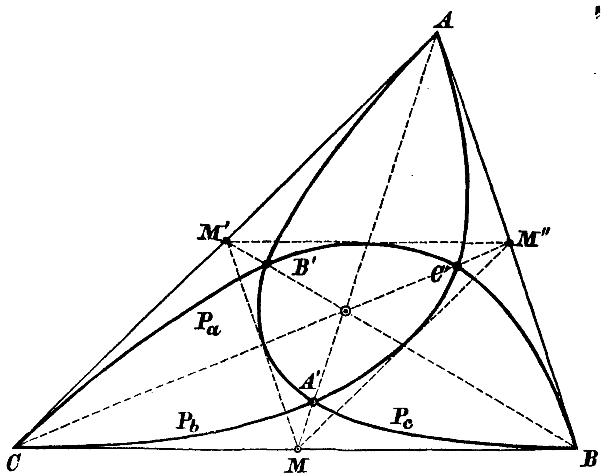
4. V trojúhelníku ABC vedle paraboly P_a, dotýkající se stran v bodech B a C, jsou (zároveň) ještě jiné dvě paraboly P_b a P_c vlastností úplně podobných.

Tyto tři Artztovy paraboly protínají se vždy dvě a dvě v bodech A′B′C′ a plochy trojúhelníků křivkami těmito uzavřené, lze určiti vzorci (viz obr. 2.):

$$\mathrm{AC'B'} = \mathrm{CA'B'} = \mathrm{BA'C'} = \frac{17}{81}\,\mathrm{ABC},$$

$$\mathrm{AC'B} = \mathrm{BA'C} = \mathrm{CB'A} = \frac{5}{81}\,\mathrm{ABC}.$$

II. *Některé vztahy obecné.* Vezmouce osu paraboly za osu



Obr. 2.

úseček a kolmici vrcholem A jdoucí za osu pořadnic (obr. 3.), obdržíme rovnici paraboly v soustavě této $y^2 = px$.

Tangenta bodem M (x_1, y_1) jdoucí má rovnici

$$2y_1y = p(x + x_1)$$

a podobně bodem N (x_2, y_2)

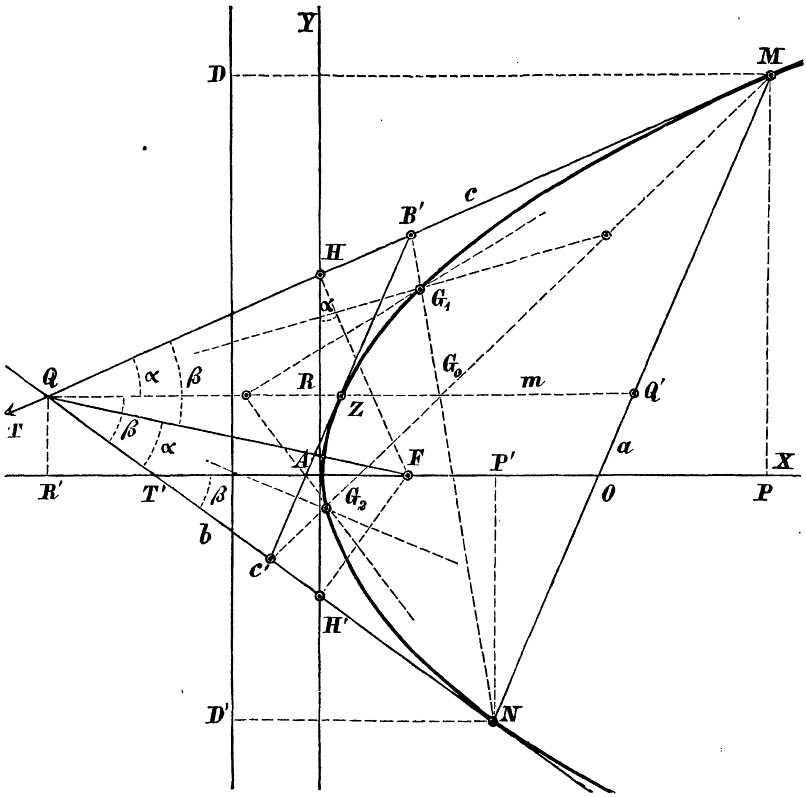
$$2y_2y = p\,(x + x_2)\,.$$

Obě tangenty setkají se v bodě, jehož souřadnice určíme z rovnic těchto a obdržíme

$$x = -\frac{y_2x_1 - x_2y_1}{y_2 - y_1} = -\frac{y_1^2y_2 - y_2^2y_1}{p(y_2 - y_1)} = \frac{y_1y_2}{p} = -\sqrt{x_1x_2};$$

jest tudíž průsečný bod

$$(1) \qquad Q\begin{cases} x = -\sqrt{x_1x_2} \\ y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\,. \end{cases}$$



Obr. 3.

Osu pořadnic protínají tangenty tyto v bodech:

$$(2) \qquad H\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{y_1}{2}\,, \end{cases} \qquad H'\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{y_2}{2}\,, \end{cases}$$

osu úseček v bodech:

$$(3) \qquad T\begin{cases} x = -x_1 \\ y = 0 \end{cases}, \qquad T'\begin{cases} x = -x_2 \\ y = 0. \end{cases}$$

Tětiva MN má rovnici

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

a protíná osu paraboly v bodě

$$(4) \qquad O\begin{cases} x = \dfrac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1} = \sqrt{x_1 x_2} \\ y = 0. \end{cases}$$

Jest tedy $AO = R'A = QR = \sqrt{x_1 x_2}$, t. j. QR jest střední úměrná mezi úsečkami x_1 a x_2.

Sestrojme v bodech H a H′ kolmice k tangentám MT a NT′ a vyhledejme jejich průsek.

Kolmice bodem H jdoucí má rovnici

$$y = -\frac{2y_1}{p}x + \frac{y_1}{2}$$

a bodem H′ pak

$$y = -\frac{2y_2}{p}x + \frac{y_2}{2}.$$

O průseku F platí:

$$x\left(\frac{2y_2}{p} - \frac{2y_1}{p}\right) - \left(\frac{y_2}{2} - \frac{y_1}{2}\right) = 0$$

aneb

$$x = \frac{(y_2 - y_1) \cdot p}{4(y_2 - y_1)} = \frac{p}{4}.$$

Máme tedy pro ohnisko paraboly

$$(5) \qquad F\begin{cases} x = \dfrac{p}{4} \\ y = 0. \end{cases}$$

K určení vzdálenosti ohniska F od bodu Q máme

$$\overline{QH}^2 = (0 - \sqrt{x_1 x_2})^2 + \left(\frac{y_1}{2} - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = x_1 x_2 + \frac{y_2^2}{4},$$

$$\overline{HF}^2 = \frac{y_1^2}{4} + \frac{p^2}{16},$$

bude tedy

$$\overline{QF}^2 = \frac{y_1^2 + y_2^2}{4} + x_1 x_2 + \frac{p^2}{16} = \frac{px_1 + px_2}{4} + x_1 x_2 + \frac{p^2}{16},$$

$$\overline{QF}^2 = \left(x_1 + \frac{p}{4}\right)\left(x_2 + \frac{p}{4}\right) \tag{6}$$

aneb též

$$QF = \sqrt{\left(x_1 + \frac{p}{4}\right)\left(x_2 + \frac{p}{4}\right)} = MD \,.\, ND' = FT \,.\, FT', \tag{7}$$

čímž délka QF střední úměrnou délek MD a ND′ se ukazuje, aneb jelikož $AP = AT$ jest též

$$MD = FT = x_1 + \frac{p}{4} = AP + \frac{p}{4} = AT + \frac{p}{4}$$

a tedy také QF býti musí střední úměrnou délek FT a FT′.

Abychom poznali, v jakém úhlu délka QF od přímky QM neb QN jest odchýlena, zavedeme do rovnice (7) úhly

$$\sphericalangle MQQ' = \alpha, \quad \sphericalangle Q'QN = \beta, \text{ kde } QQ' \parallel Ax,$$

a jak známo

$$MQ' = \frac{1}{2} MN .$$

Úhly α, β určíme rovnicemi:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1}{2x_1}, \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{y_2}{2x_2}$$

anebo vzhledem k rovnicím

$$y_1^2 = px_1$$
$$y_2^2 = px_2,$$

$$(8)\qquad \begin{aligned} \operatorname{tg}^2\alpha &= \frac{y_1^2}{4x_1^2} = \frac{p}{4x_1} \\ \operatorname{tg}^2\beta &= \frac{y_2^2}{4x_2^2} = \frac{p}{4x_2}; \end{aligned}$$

pak obdržíme z rovnice (7) pro

$$QF = \sqrt{x_1x_2\,(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta)} = \frac{\sqrt{x_1x_2}}{\cos\alpha\,.\,\cos\beta}$$

aneb

$$(9)\qquad \sqrt{x_1x_2} = QF\,.\,\cos\alpha\,.\,\cos\beta = QR\,.$$

Má-li rovnici této zadost učiněno býti, musíme QF vésti tak, aby byl $\sphericalangle FQN = \alpha$, pak bude $QF\,.\cos\alpha = QH'$ a

$$QH'\cos\beta = QR\,,$$

tedy

$$QF\,.\cos\alpha\,.\cos\beta = QR.$$

Směr od bodu Q k ohnisku F obdržíme, když úhel $\alpha = MQQ'$ přeneseme tak, aby byl $\sphericalangle FQN = \alpha$.

III. *Konstrukce paraboly Artztovy.* Je-li dán trojúhelník QMN stranami $MN = a$, $NQ = b$, $QM = c$, $QQ' = m$ a máme-li za účelem rychlejší konstrukce křivky najíti polohu soustavy souřadnic, vrchol A a ohnisko F, nelze QF dle vzorce (7) vypočítati, jelikož x_1, x_2 a p nejsou známy; v tomto případě nám třeba QF mírami z trojúhelníka vzatými vyjádřiti.

Mysleme sobě kolem čtyřúhelníka QHFH′, v němž dva pravé úhly jsou v bodech H a H′, opsaný kruh, i obdržíme dle poučky Ptolemeovy:

$$QF\,.\,HH' = H'F\,.\,QH + HF\,.\,QH'$$

$$\begin{aligned} QF\,.\,HH' &= QF\sin\alpha\,.\,QF\cos\beta + QF\sin\beta\,.\,QF\cos\alpha \\ &= \overline{QF}^2\,.\sin(\alpha+\beta)\,. \end{aligned}$$

$$(10)\qquad HH' = QF\,.\sin(\alpha+\beta) \text{ aneb } QF = \frac{HH'}{\sin(\alpha+\beta)};$$

$$HH' = \frac{y_1 - y_2}{2} = \frac{c\sin\alpha + b\sin\beta}{2},$$

$$QF = \frac{c \sin \alpha + b \sin \beta}{2 \, . \sin (\alpha + \beta)} \, .$$

Jest pak

$$(11) \qquad \sin \alpha = \frac{a \sin \mathrm{M}}{2m}, \qquad \sin \beta = \frac{a \sin \mathrm{N}}{2m},$$

tedy

$$QF = \frac{ac \sin \mathrm{M} + ab \sin \mathrm{N}}{4m \sin (\alpha + \beta)},$$

a poněvadž z trojúhelníka QMN

$$c = \frac{a \sin \mathrm{N}}{\sin (\alpha + \beta)}, \qquad b = \frac{a \sin \mathrm{M}}{\sin (\alpha + \beta)},$$

obdržíme dosazením do předešlé rovnice

$$(12) \qquad QF = \frac{bc + bc}{4m} = \frac{bc}{2m},$$

tedy dle (10)

$$(13) \qquad HH' = \frac{bc}{2m} \sin (\alpha + \beta) = \frac{S}{m},$$

kde S plochu trojúhelníka QMN naznačuje.

Z rovnice (12) máme úměru

$$m : b = \frac{c}{2} : QF,$$

z čehož následuje konstrukce, $QM' = QC = \frac{c}{2}$, pak $CN' \parallel MN$, až obdržíme $QN' = QF$, kteroužto délku v úhlu α od tečny QN na levo naneseme a tím ohnisko F obdržíme (obr. 4.).

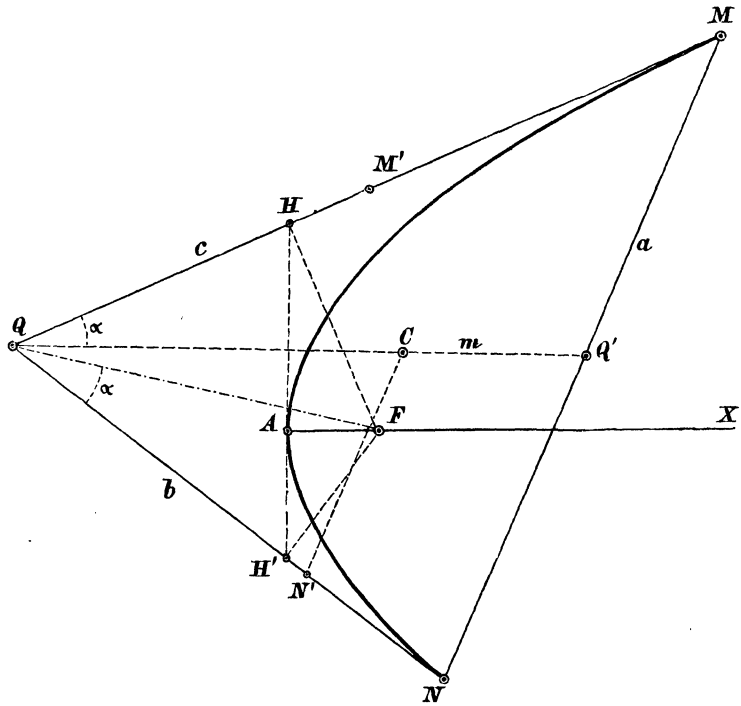
Spustíce s F kolmice na tečny QM a QN, najdeme body H a H' v ose pořadnic a kolmice na HH' bodem F jdoucí dá nám vrchol paraboly A, jakož i osu úseček AX, čímž vše, čeho ke konstrukci potřeba, určeno jest.

IV. *Rozličné relace mezi předešlými veličinami.*

Z obrazce 3. užitím rovnice (11) a (12) plyne

$$(14)\quad FT' = QF \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{bc}{2m} \cdot \frac{\sin M}{\sin N} = \frac{bc}{2m} \cdot \frac{b}{c} = \frac{b^2}{2m}.$$

$$(15)\qquad FT = QF \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{bc}{2m} \cdot \frac{\sin N}{\sin M} = \frac{c^2}{2m}.$$



Obr. 4.

Násobením těchto dvou rovnic obdržíme

$$FT \cdot FT' = \overline{QF}^2 = \frac{b^2 \cdot c^2}{4m^2},$$

jak dříve již v rovnici (7) bylo ukázáno.

Dále jest

$$FT \sin\alpha = FH, \quad FH \sin\alpha = AF,$$

tedy dle vzorce (15)

$$\frac{p}{4} = \mathrm{AF} = \mathrm{FT}\sin\alpha \,.\, \sin\alpha = \frac{c^2}{2m} \,.\, \sin^2\alpha$$

a vzhledem k rovnici (11)

$$\frac{p}{4} = \frac{c^2}{2m} \cdot \frac{a^2 \sin^2 \mathrm{M}}{4m^2} = \frac{\frac{a^2c^2}{4}\sin^2 \mathrm{M}}{2m^3} = \frac{\mathrm{S}^2}{2m^3}$$

aneb

$$(16) \qquad \frac{p}{2} = \frac{\mathrm{S}^2}{m^3},$$

čímž dokázána věta první.

Jak již dříve ukázáno bylo, jsou v každém trojúhelníku ABC tři takovéto paraboly $\mathrm{P}_a\ \mathrm{P}_b\ \mathrm{P}_c$ možné, mezi jejichžto polovičními parametry $\frac{p_a}{2}, \frac{p_b}{2}, \frac{p_c}{2}$ a středními příčkami m_a, m_b, m_c platí relace dle rovnice (16), totiž

$$(17) \qquad p_a : p_b : p_c = \frac{1}{m_a^3} : \frac{1}{m_b^3} : \frac{1}{m_c^3} \,.$$

Ve vzorci (13) nalezli jsme $\mathrm{HH}' = \frac{\mathrm{S}}{m}$, jest tedy

$$(18) \qquad \overline{\mathrm{HH}'}^2 = \frac{\mathrm{S}^2}{m^2} = \frac{p}{2} \,.\, m,$$

t. j. HH′ jest střední úměrná mezi polovičním parametrem $\frac{p}{2}$ a příčkou m.

V. *Barycentricky určené body G_1 a G_2 a tangenta $B'C'$.*

Napřed vypočítejme souřadnice těžiště G_0 trojúhelníka QMN (obr. 3.); dle známého pravidla najdeme

$$(19) \quad \mathrm{G}_0 \begin{cases} x = \frac{1}{3} \cdot \frac{x_2 y_2 - x_1 y_1}{y_2 - y_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{y_2^3 - y_1^3}{(y_2 - y_1)p} = \frac{y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2}{3p} \\ y = \frac{1}{2} \cdot (y_1 + y_2). \end{cases}$$

Těžiště G_1 trojúhelníka $\mathrm{G}_0\mathrm{QM}$ a
„ G_2 „ $\mathrm{G}_0\mathrm{NQ}$ jsou pak týmž způsobem

určena, a jsou:

$$
(20)\quad
\begin{aligned}
&G_1\begin{cases} x = \dfrac{3x_2y_1 - 4x_1y_1 + x_2y_2}{9(y_2 - y_1)} = \dfrac{1}{p}\cdot\left(\dfrac{y_2 + 2y_1}{3}\right)^2 \\[2mm] y = \dfrac{2y_1 + y_2}{3}\,; \end{cases}\\
&G_2\begin{cases} x = \dfrac{4x_2y_2 - 3x_1y_2 - x_1y_1}{9(y_2 - y_1)} = \dfrac{1}{p}\cdot\left(\dfrac{y_1 + 2y_2}{3}\right)^2 \\[2mm] y = \dfrac{y_1 + 2y_2}{3}\,, \end{cases}
\end{aligned}
$$

z čehož patrno, že oba body rovnici paraboly $y^2 = px$ zadost činí, tedy křivce té přináleží.

Body B′ a C′ mají souřadnice

$$
(21)\quad
\begin{aligned}
&B'\begin{cases} x = \dfrac{y_1(x_2 - x_1)}{2(y_2 - y_1)} = \dfrac{y_1(y_2 + y_1)}{2p} \\[2mm] y = \dfrac{3y_1 + y_2}{4}\,; \end{cases}\\
&C'\begin{cases} x = \dfrac{y_2(x_2 - x_1)}{2(y_2 - y_1)} = \dfrac{y_2(y_2 + y_1)}{2p} \\[2mm] y = \dfrac{3y_2 + y_1}{4} \end{cases}
\end{aligned}
$$

jichž spojující přímka B′C′ čili tečna B′C′ má rovnici

$$
y - \frac{3y_1 + y_2}{4} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - \frac{y_2(x_2 - x_1)}{2(y_1 - y_1)}\right),
$$

$$
y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,x - \frac{y_1}{2} + \frac{3y_1 + y_2}{4}
$$

aneb

$$
(22)\qquad y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,x + \frac{y_1 + y_2}{4}\,,
$$

z kteréž vidíme, že B′C′ tentýž směr $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ má jako tětiva MN, což ostatně známo jest i z konstrukce.

Určíme-li pomocí bodu

$$Q' \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

délku střední přímky QQ′, rovnoběžné ku AX, obdržíme

$$QQ' = m = \frac{x_1 + x_2}{2} + \sqrt{x_1 x_2} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2p} + \frac{y_1 y_2}{p} = (y_1 + y_2)^2 \cdot \frac{1}{2p}.$$

Bod Z jako průsek přímek QQ′ a B′C′ má souřadnice

$$(23) \qquad Z \begin{cases} x = \dfrac{m}{2} = \left(\dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{p} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

a tu vidíme opět, že rovnici $y^2 = px$ souřadnicemi bodu Z úplně se vyhovuje, t. j. bod Z leží na parabole. Že zároveň bod Z v tangentě B′C′ leží, přesvědčíme se, když souřadnice jeho dosadíme do rovnice (22).

Z geometrie kuželoseček.

Píše

M. Lerch,

docent vysoké školy technické v Praze.

(Dokončení.)

Naopak lze ukázati, že každá racionalná čára stupně třetího má bod dvojný.*)

Omezíme se na důkaz věty, že čáry stupně třetího s bodem dvojným jsou zvláštní, t. j. že obecně čara stupně třetího bodu dvojného nemá. Neb buď $F(x, y) = 0$ rovnice stupně třetího; aby (x_0, y_0) byl bod dvojný, je potřebí i dostačí, aby v rovnici

*) O racionálných čarách v rovině viz monografii p. Ed. Weyra v VIII. roč. Časopisu. Dále též úvahy p. Hermitea ve knize Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique a pak Emil Weyr, Beiträge zur Curvenlehre.