Sur une intégrale définie,

par M. **Ch. Hermite.**

(Extrait d'une lettre à M. Ed. Weyr à Prague.)

Soit $f(x)$ une fonction rationnelle sans partie entière égale à l'unité pour $x = o$ et qui reste constamment positive lorsque la variable croît à partir de zéro jusqu' à l'infini. Je vais montrer qu'on peut obtenir l'intégrale suivante,

$$J = \int_0^\infty (f(x) - e^{-ax})\, dx$$

où a désigne une quantité positive, au moyen de la constante d'Euler. Cette constante étant définie par l'égalité,

$$C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right) \frac{dx}{x}$$

je remplace x par ax, ce qui donne,

$$C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+ax} - e^{-ax}\right) \frac{dx}{x}.$$

Nous avons par conséquent,

$$J - C = \int_0^\infty \left(f(x) - \frac{1}{1+ax}\right) \frac{dx}{x}$$

où le second membre est l'intégrale d'une fonction rationnelle.

Soit en particulier,

$$f(x) = \frac{A}{x+\alpha} + \frac{B}{x+\beta} + \dots + \frac{L}{x+\lambda},$$

$\alpha, \beta, .. \lambda$ étant réels et positifs, on aura la condition,

$$\frac{A}{\alpha}+\frac{B}{\beta}+\ldots+\frac{L}{\lambda}=1$$

et un calcul facile conduit à la valeur suivante,

$$J=C+\log a+\frac{A\log\alpha}{\alpha}+\frac{B\log\beta}{\beta}+\ldots+\frac{L\log\lambda}{\lambda}.$$

Poznámka o integrálu Binetově.

Sdílí

M. Lerch,

docent české vysoké školy technické v Praze.

Z theorie funkce gamma jest po Cauchyovi a Binetovi známo, že integrál *)

$$(1)\qquad \varpi(\omega)=\int_0^\infty \frac{2\operatorname{arctg}\frac{x}{\omega}\,dx}{e^{2x\pi}-1}$$

souvisí s funkcí gamma rovnicí

$$(2)\qquad \log\Gamma(\omega)=\left(\omega-\frac{1}{2}\right)\log\omega-\omega+\log\sqrt{2\pi}+\varpi(\omega).$$

Jsou-li ω_1, ω_2 dvě kladné realné veličiny, obdržíme pomocí vzorce (1) užitím elementarného vztahu

$$(a)\qquad \operatorname{arctg}\frac{x}{\omega_1}+\operatorname{arctg}\frac{x}{\omega_2}=\operatorname{Arctg}\frac{x(\omega_1+\omega_2)}{\omega_1\omega_2-x^2},$$

kde Arctg z znamená arctg z při $z>0$, ale arctg $z+\pi$ při $z<0$, rovnici

---

*) Viz rozmanité učebnice počtu integrálního, neb Meyer, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale, po případě autorovy články uveřejněné ve Věstníku České Akademie r. 1893.