Bohuš Jurek

Sur la dérivabilité des fonctions à variation bornée

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 65 (1936), No. 1, 8--27

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123705`

Sur la dérivabilité des fonctions à variation bornée.

Bohuš Jurek, Žilina.

(Reçu le 4. décembre 1934.)

§ 1.

Soit $f(x)$ une fonction à variation bornée, définie dans l'intervalle (a, b) et $x_1, x_2, x_3, \ldots$ une suite épuisant l'ensemble des points de discontintinuité de $f(x)$.

Posons:

$$f(x+0) - f(x) = \varphi_1(x),$$
$$f(x) - f(x-0) = \varphi_2(x),$$
$$\Phi_1(x) = \sum_{a \leq x_j < x} \varphi_1(x_j), \quad \Phi_2 = \sum_{a < x_j \leq x} \varphi_2(x_j),$$
$$\psi(x) = f(x) - \Phi_1(x) - \Phi_2(x).$$

$\psi(x)$ est une fonction continue à variation bornée (voir par ex. Leçons sur l'intégration par H. Lebesgue, Paris 1928, p. 61.) $f(x) - \psi(x)$ est dite la fonction des sauts de $f(x)$, $\psi(x)$ la partie continue de $f(x)$.

J'ai démontré[1]) le théorème suivant:

Prémisse: $0 < \alpha < 1$, les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\, \varphi_1(x_k)\,|^\alpha, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\, \varphi_2(x_k)\,|^\alpha,$$

sont convergentes.

Thèse: L'ensemble des points ξ, où la partie continue $\psi(x)$ de $f(x)$ possède une dérivée et qui ne remplissent pas la condition

$$\psi'(\xi) = f'(\xi),$$

est de mesure nulle et de dimension haussdorffienne au plus égale à α.

---

[1]) Voir mon mémoire „Sur la dérivabilité des fonctions discontinues", Věstník Král. Č. Spol. Nauk, classe II, 1931, mémoire XXVII, page 17.

Je vais démontrer que le théorème cité plus haut est valable aussi pour certaines fonctions plus générales que les fonctions $x^\alpha (0 < \alpha < 1)$. J'ai l'honneur de remercier ici M. le prof. Jarník qui a revu mon travail et qui a simplifié surtout la démonstration du lemme 2.

Théorème 1. Prémisse:

1⁰ $\lambda(x)$ définie pour $x \geqq 0$, continue pour $x > 0$, croissante, $\lambda(0) = \lambda(0+0) = 0$, $x^{-1}\lambda(x)$ non croissante.

2⁰ $x_1, x_2, x_3, \ldots$ une suite qui épuise l'ensemble D des points de discontinuité de $f(x)$ à variation bornée, définie dans (a, b).

Les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(|\varphi_1(x_k)|), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(|\varphi_2(x_k)|),$$

sont convergentes.

Thèse: *On peut couvrir l'ensemble des points ξ, où la partie continue $\psi(x)$ de $f(x)$ possède une dérivée et pour lesquels l'équation*

$$\psi'(\xi) = f'(\xi),$$

n'est pas valable, par une infinité dénombrable d'intervalles des longueurs Δ_n tels que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\Delta_n) < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif donné d'avance.[2])

Lemme 1.

Prémisse: *$\lambda(x)$ remplit les conditions du théorème 1; $a_1, a_2, \ldots$ est une suite de constantes positives telle que $\lambda(a_1) + \lambda(a_2) + \ldots$ est convergente.*

Thèse: *On peut trouver une suite de constantes positives $b_1, b_2, b_3, \ldots$ telle que $\lambda(b_1) + \lambda(b_2) + \ldots$ est convergente et*

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

---

[2]) En retranchant la partie continue $\psi(x)$ de la fonction $f(x)$, on obtient précisément la fonction des sants $\Phi_1(x) + \Phi_2(x)$; en appliquant le théorème 1 à cette fonction, on voit que, sous les conditions indiquées, la fonction des sauts de la fonction $f(x)$ possède une dérivée égale à zéro partout sauf dans un ensemble qui, pour chaque $\varepsilon > 0$, peut être couvert par une infinité dénombrable d'intervalles dont les longueurs Δ_n satisfont à l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\Delta_n) < \varepsilon.$$

Démonstration. Désignons

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda(a_n), \quad \sigma_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} \lambda(a_n).$$

Soit $0 < q' < 1 < q$ et $qq' < 1$. Trouvons pour tout entier positif k un nombre n_k tel que $\sigma_{n_k} < q'^k$. La série

$$\Sigma = S_{n_1} + (S_{n_2} - S_{n_1})\, q + (S_{n_3} - S_{n_2})\, q^2 + \ldots$$

est convergente parce que

$$S_{n_k} - S_{n_{k-1}} < \sigma_{n_{k-1}} \qquad \text{pour } k = 2, 3, \ldots$$

et

$$S_{n_1} + \sum_{k=1}^{p} (S_{n_{k-1}} - S_{n_k})\, q^k < S_{n_1} + \sum_{k=1}^{p} \sigma_{n_k} q^k < S_{n_1} + \sum_{k=1}^{p} q'^k q^k$$

pour tout p entier positif.

On peut écrire

$$\sum = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, \lambda(a_n) \quad \text{où} \quad c_n \geqq 1, \ \lim_{n=\infty} c_n = \infty.$$

Trouvons maintenant un entier positif N tel que $c_n\, \lambda(a_n) <$ $< \lambda(1)$, $c_n > 1$ pour tout $n > N$. Soient $b_1, b_2, \ldots, b_N$ des nombres positifs et $c_n\, \lambda(a_n) = \lambda(b_n)$ pour $n > N$. Un tel choix des nombres b_n est possible parce que $\lambda(x)$ prend dans l'intervalle $(0, 1)$ toute valeur de l'intervalle $[0, \lambda(1)]$. $\lambda(x) \,.\, x^{-1}$ étant non croissante et $\lambda(x)$ étant croissante, on a pour $n > N$

$$\frac{\lambda(b_n)}{b_n} \leqq \frac{\lambda(a_n)}{a_n}, \quad \frac{a_n}{b_n} \leqq \frac{\lambda(a_n)}{\lambda(b_n)} = \frac{1}{c_n}$$

et par suite

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

La série $\lambda(b_1) + \lambda(b_2) + \ldots$ est convergente parce qu'elle est identique à la série $c_1\, \lambda(a_1) + c_2\, \lambda(a_2) + \ldots$ Notre thèse est démontrée.

Lemme 2.

Prémisse: *$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$ une série convergente de constantes positives, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ une suite infinie de points différents entre eux, $R \equiv (-\infty, +\infty)$.*

Thèse: *Il existe un système fini ou dénombrable d'intervalles ouverts $K_1, K_2, K_3, \ldots$ sans points communs deux à deux, qui possède les propriétés suivantes:*

1⁰ La longueur Δ_n de K_n est la somme d'un nombre fini où d'une infinité de constantes A_k, chaque A_k ne figurant qu'une fois dans les expressions des Δ_n.

2⁰ Soit $h > 0$; si $x \epsilon R - \sum_n K_n$ et si $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots$ $(k_1 < < k_2 < k_3 < \ldots)$ sont tous les points de la suite $x_1, x_2, \ldots$ qui sont situés dans $(x, x + h >$, on a

$$\sum_n A_{k_n} \leqq h.$$

Démonstration. Démontrons, tout d'abord, l'existence d'une suite d'ensembles $E_1, E_2, E_3, \ldots$ jouissante des propriétés suivantes:

Propriété (a_1): E_1 est un intervalle ouvert de longueur A_1.

Propriété (an) $(n > 1)$: $E_n = E_{n-1} + I_n$, où I_n est un intervalle ouvert, dont les extrémités n'appartiennent pas à E_{n-1} et tel que $m\,(I_n - I_n \,.\, E_{n-1}) = m\,(E_n - E_{n-1}) = A_n$. ($mE$ signifie la mesure lebesguienne de l'ensemble E.)

Propriété (bn) $(n \geqq 1)$: Si $x \epsilon R - E_n$, si $h > 0$ et si x_{m_1}, $x_{m_2}, \ldots, x_{m_\lambda}$ $(m_1 < m_2 < m_3 < \ldots < m_\lambda)$ sont ceux parmi les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui sont situés dans $(x, x + h>$, on a

$$m\,[E_n \,.\, (x, x + h>] \geqq \sum_{p=1}^{\lambda} A_{m_p}.$$

Prenons $E_1 \equiv (x_1 - A_1, x_1)$; donc les propriétés $(a1)$, $(b1)$ sont vraies (car, si $x \epsilon R - E_1$ et si $x_1 \epsilon (x, x + h >$, on a $x \leqq x_1 - A_1$, $x + h \geqq x_1$, donc $m\,[E_1\,(x, x + h >] \geqq A_1$). Supposons maintenant les ensembles E_k définis et les conditions (ak), (bk) réalisées pour tout $k < n$ $(n > 1)$. Pour définir E_n, procédons comme il suit: Soit δ le plus grand nombre positif tel que

$$m\,[(R - E_{n-1})\,(x_n - \delta, x_n)] = A_n. \tag{α}$$

En conséquence de (ak), chaque E_k $(k < n)$ est une somme d'un nombre fini d'intervalles o u v e r t s et finis; donc $x_n - \delta \epsilon R - E_{n-1}$. Soit $\eta = 0$ si $x_n \epsilon R - E_{n-1}$; au contraire, si $x_n \epsilon E_{n-1}$, soit $\eta > 0$ le plus grand nombre tel que $(x_n, x_n + \eta) \subset E_{n-1}$, donc $x_n + \eta \epsilon \epsilon R - E_{n-1}$. Posons $I_n = (x_n - \delta,\ x_n + \eta)$; évidemment, on a $m\,(I_n - E_{n-1} \,.\, I_n) = A_n$, donc la condition (an) est satisfaite. Soit maintenant $x \epsilon R - E_n$ (donc aussi $x \epsilon R - E_k$ pour $k < n$); soit $h > 0$. Désignons par $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_\lambda}$ $(m_1 < m_2 < \ldots < m_\lambda)$ tous les points de la suite $x_1, x_2, \ldots, x_n$, situés dans $(x, x + h>$. Si $m_\lambda < n$, on a d'après $[b(n-1)]$

$$m\,[E_n\,(x, x + h >] \geqq m\,[E_{n-1}\,(x, x + h >] \geqq \sum_{p=1}^{\lambda} A_{m_p};$$

si $m_\lambda = n$, on a $x \leqq x_n - \delta$, $x + h \geqq x_n$, $(x_n - \delta, x_n) \subset (x, x+h>$ et de plus $(x_n - \delta, x_n) \subset E_n$; par suite, on a aussi

$$m\,[E_n\,(x, x+h>] \geqq m\,[E_{n-1}\,(x, x+h>] + \\ + m\,[(E_n - E_{n-1})\,(x_n - \delta, x_n)] \geqq \\ \geqq \sum_{p=1}^{\lambda-1} A_{m_p} + m\,[(R - E_{n-1})\,(x_n - \delta, x_n)].$$

La dernière grandeur étant égale à A_n [voir (α)] on obtient la propriété (bn).

Posons maintenant $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$. L'ensemble E est ouvert, donc $E = \sum_n K_n$, où les K_n sont des intervalles ouverts et disjoints. Nous allons démontrer que les K_n satisfont aux conditions de la thèse. Soit $K_l = (\alpha_l, \beta_l)$, $K_r = (\alpha_r, \beta_r)$, $r \neq l$. On a $\alpha_l \epsilon R - E$, d'où vient $\alpha_l \epsilon R - E_n$ pour chaque n et de même $\beta_l \epsilon R - E_n$, $\alpha_r \epsilon R - E_n$, $\beta_r \epsilon R - E_n$.

On a

$$K_l = K_l E_1 + \sum_{n=2}^{\infty} K_l\,(E_n - E_{n-1}),$$

$$K_r = K_r E_1 + \sum_{n=2}^{\infty} K_r\,(E_n - E_{n-1}).$$

E_1 étant un intervalle, on a ou bien $K_l E_1 = K_r E_1 = 0$ ou bien $K_l E_1 = E_1$, $K_r E_1 = 0$, ou bien $K_l E_1 = 0$, $K_r E_1 = E_1$. Alors une des grandeurs $mK_l E_1$, $mK_r E_1$ est égale à zéro, l'autre à zéro où à A_1. Pour $n > 1$ remarquons que l'on a ou bien $I_n K_l = 0$ ou bien $I_n \subset K_l$ et de même pour K_r, le cas $I_n \subset K_r$, $I_n \subset K_l$ étant exclu. Si $I_n K_l = 0$, on a $(E_n - E_{n-1}) K_l = 0$ (car $E_n - E_{n-1} \subset I_n$). Si $I_n \subset K_l$, on a

$$(E_n - E_{n-1})\,K_l = E_n - E_{n-1} = I_n - I_n E_{n-1},$$

donc $m\,[(E_n - E_{n-1})\,K_l] = A_n$. Alors $m\,[(E_n - E_{n-1})\,K_l]$ et de même $m\,[(E_n - E_{n-1})\,K_r]$ est égale à zéro ou à A_n, le cas

$$m\,[(E_n - E_{n-1})\,K_l] = m\,[(E_n - E_{n-1})\,K_r] = A_n$$

étant exclu. On a donc, en effet,

$$mK_l = \sum_i A_{\lambda_i}, \qquad mK_r = \sum_j A_{\mu_j},$$

où $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\mu_1 < \mu_2 < \ldots$ et $\lambda_i \neq \mu_j$ pour chaque couple $[i, j]$.

Soit maintenant $h > 0$, $x \in R - \Sigma K_n$; soit $x_{k1}, x_{k2}, \ldots$ ($k_1 < < k_2 < \ldots$) la suite de tous les nombres $x_1, x_2, \ldots$ qui sont situés dans $(x, x + h >)$; soit $\varepsilon > 0$. Il existe un $s > 0$ tel que

$$\sum_{i \leqq s} A_{k_i} > \sum_i A_{k_i} - \varepsilon.$$

On a $x \in R - E_{k_s}$, donc, d'après (bs)

$$h \geqq m\,[E_{k_s}(x, x + h >)] \geqq \sum_{i \leqq s} A_{k_i} > \sum_i A_{k_i} - \varepsilon, \quad \sum_i A_{k_i} \leqq h.$$

Le lemme 2 est démontré.

Remarque 1. Il est évident que le lemme 2 reste vrai aussi si l'on remplace la condition $h > 0$ par $h < 0$, pourvu qu'on remplace l'inégalité

$$\sum_n A_{k_n} \leqq h \text{ par } \sum_n A_{k_n} \leqq |\,h\,|\,.$$

Lemme 3.

Prémisse: $A_k \geqq 0$ pour tout entier positif k; $\omega(x)$ définie et croissante pour $x \geqq 0$, $\omega(0) = 0$, $x^{-1}\,\omega(x)$ est non croissant, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \omega(A_n)$ est convergente.

Thèse: La série $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ est convergente.

Démonstration. On a $\lim A_n = 0$ pour $\lim n = \infty$ (car autrement on n'aurait pas $\lim \omega(A_n) = 0$ pour $\lim n = \infty$]. Il existe un $\alpha > 0$ tel que $A_n \leqq \alpha$ pour chaque n et par suite

$$\frac{\omega(A_n)}{A_n} \geqq \frac{\omega(\alpha)}{\alpha},$$

$$A_n \leqq \frac{\alpha}{\omega(\alpha)}\,\omega(A_n)$$

pour chaque n pour lequel $A_n \neq 0$. Mais, on a $\omega(0) = 0$ et la dernière inégalité reste vraie aussi pour $A_n = 0$. La série $\omega(A_1) + + \omega(A_2) + \ldots$ étant convergente, la série $A_1 + A_2 + \ldots$ est aussi convergente.

Lemme 4.

Prémisse: 1° $\vartheta(x)$ définie pour $x \geqq 0$, continue pour $x > 0$, croissante pour $x \geqq 0$, $\vartheta(0) = \vartheta(+0) = 0$.

2° $a_k \geqq 0$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$

3^0 *La série* $\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(a_n)$ *est convergente.*

Thèse:

$$\lim_{c=+0} \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(ca_n) = 0.$$

Démonstration. On peut trouver pour tout $\varepsilon < 0$ un m tel que

$$0 < \sum_{n=m+1}^{\infty} \vartheta(a_n) < \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{1}$$

Soit a_λ le plus grand des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Il existe un nombre positif $K < 1$ tel que

$$0 < \vartheta(ca_\lambda) < \frac{\varepsilon}{2m},$$

pour tout c qui satisfait à l'inégalité $0 < c < K$; cela vient du fait que $\vartheta(+0) = \vartheta(0) = 0$. On a pour $k \leqq m$ et pour $0 < c < K$

$$ca_k \leqq ca_\lambda,$$

$$\vartheta(ca_k) \leqq \vartheta(ca_\lambda) < \frac{\varepsilon}{2m},$$

$$\sum_{n=1}^{m} \vartheta(ca_n) < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

De plus, on a pour $0 < c < K$ et pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$ca_n < a_n,$$

et d'après (1)

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \vartheta(ca_n) < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(ca_n) < \varepsilon.$$

Lemme 5.

Prémisse du lemme 3.
Thèse:

$$\omega\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \omega(A_n).$$

Démonstration. Notre affirmation est évidente si $A_k = 0$ pour tout k considéré. Supposons qu'il existe des k pour lesquels

$A_k \neq 0$. Soit pour tout k pour lequel $A_k \neq 0$

$$\frac{\omega(A_k)}{A_k} = B_k \text{ et soit } \frac{\omega\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)}{\sum_{n=1}^{\infty} A_n} = B.$$

Pour tout k tel que $A_k = 0$ soit $B_k = B$. On a $B_k \geqq B$ pour tout entier positif k. Nous pouvons écrire

$$\omega\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = BA_1 + BA_2 + BA_3 + \ldots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega(A_n) = B_1A_1 + B_2A_2 + B_3A_3 + \ldots,$$

$$\omega\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \omega(A_n).$$

Démonstration du théorème 1. Considérons la fonction $\varphi_i(x)$ ($i = 1$ ou $i = 2$). Soit $a_n = |\varphi_i(x_n)|$. Trouvons (lemme 1) une suite de constantes positives $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ telle que $\lambda(b_1) + \lambda(b_2) + \lambda(b_3) + \ldots$ est convergente et

$$\lim_{n=\infty} \frac{|\varphi_i(x_n)|}{b_n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0. \tag{2}$$

Soit $0 < c < 1$. Soit E_c^1 l'ensemble des points des intervalles K_n du lemme 2, où $A_k = cb_k$. On peut appliquer le lemme 2 car la série $\lambda(b_1) + \lambda(b_2) + \ldots$ est convergente et par suite (voir lemme 3) la série $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ est aussi convergente. Trouvons aussi l'ensemble E_c^2 jouissant de la même propriété par rapport à $h < 0$ (voir le lemme 2 et la remarque 1). Désignons $M_c = E_c^1 + E_c^2$ et $E = \prod_{c>0} M_c$.

Soit x un point n'appartenant pas à $E + D$ (voir la prémisse du théorème 1). Il existe un K tel que $0 < K < 1$ et que x n'appartient pas à $D + M_K$. D'après le lemme 2, on a

$$\sum_n Kb_n \leqq |h|,$$

où la sommation porte sur toutes les valeurs de n telles que $x_n \in \in (x, x + h >$. En utilisant ce dernier résultat, nous pouvons écrire (pour les mêmes valeurs de n)

$$\left|\frac{\Phi_i(x+h)-\Phi_i(x)}{h}\right| \leqq \frac{\sum\limits_n |\varphi_i(x_n)|}{K\sum\limits_n b_n} = \frac{\sum\limits_n a_n}{K\sum\limits_n b_n}.$$

Si $|h|$ tend vers zéro, le plus petit des nombres n considérés croit à l'infini. D'après (2), on peut pour tout $\varepsilon > 0$ trouver un η tel que pour $0 < |h| < \eta$ et pour chaque n, pour lequel x_n tombe dans l'intervalle $(x, x+h >)$, on a

$$\frac{a_n}{b_n} < K\varepsilon.$$

On obtient en sommant les inégalités $a_n < \varepsilon K b_n$

$$\frac{\sum\limits_n a_n}{K\sum\limits_n b_n} < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{\Phi_i(x+h)-\Phi_i(x)}{h}\right| < \varepsilon.$$

La fonction $\Phi_i(x)$ possède une dérivée (égale à zéro) aux points de (a, b) n'appartenant pas à $E + D$. Construisons maintenant l'ensemble E pour $i = 1, 2$ (voir le commencement de la démonstration) et soit M la somme de ces ensembles. On a

$$\Phi_1(x) + \Phi_2(x) = f(x) - \psi(x).$$

Si ξ est un point de (a, b) qui n'appartient pas à $M + D$, nous pouvons écrire

$$\Phi'_1(\xi) = \Phi'_2(\xi) = 0.$$

Supposons que $\psi(x)$ est dérivable pour un des points ξ. On a dans ce cas

$$0 = \frac{d}{dx}\,[f(x) - \psi(x)]_{x=\xi} = f'(\xi) - \psi'(\xi),$$

$$f'(\xi) = \psi'(\xi).$$

On peut couvrir l'ensemble $M + D$ par un nombre fini ou par une infinité dénombrable d'intervalles tels que

$$\sum_n \lambda(\Delta_n) < \varepsilon,$$

Δ_n étant la longueur de l'intervalle n-ième et ε un nombre positif donné d'avance. En effet, soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ une suite de constantes positives telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\alpha_n) < \tfrac{1}{5}\varepsilon;$$

soit c tel que l'on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(cb_n) < \tfrac{1}{5}\varepsilon,$$

pour b_n correspondant à $\varphi_i(x_n)$ pour $i = 1, 2$. (Un tel c existe d'après lemme 4.) Entourons maintenant tout point x_k par un intervalle de longueur α_k et couvrons l'ensemble M par les ensembles $E_c{}^\mu$ pour $i = 1, 2, \mu = 1, 2$. Tout intervalle I composant $E_c{}^\mu$ a pour mesure le nombre

$$mI = \sum_k cb_k,$$

où le même k n'intervient qu'une seule fois. On a (voir lemme 5)

$$\lambda(mI) = \lambda\left(\sum_k cb_k\right) \leqq \sum_k \lambda(cb_k).$$

Désignons par $b_n{}^{(i)}$ les nombres b_n appartenant à $\varphi_i(x_n)$. Alors,

$$\sum \lambda(mI) \leqq 2\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(cb_n{}^{(1)}) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(cb_n{}^{(2)}) < \tfrac{1}{5}4\varepsilon.$$

La somme des valeurs $\lambda(x)$, où x parcourt les longueurs de tous les intervalles couvrant $M + D$ est plus petit que ε. Le théorème 1 est démontré.

§ 2.

Soit $f(x)$ une fonction qui possède une limite de gauche dans l'intervalle $(a, b>$ et une limite de droite dans l'intervalle $<a, b)$. S'il est possible de couvrir l'ensemble des points, où $f(x)$ ne possède pas de dérivée, par une infinité dénombrable d'intervalles I_n tels que [$\lambda(x)$ remplit les cond. 1 du théorème 1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(mI_n) < \varepsilon,$$

quel petit que soit $\varepsilon > 0$, nous dirons que $f(x)$ a la **propriété** P par rapport à $\lambda(x)$. Le théorème 1 nous conduit à la question, si la condition 2 de la prémisse de ce théorème soit nécessaire pour que la fonction $f(x)$ aie la propriété P par rapport à $\lambda(x)$. La réponse à cette question est négative. On peut pour $\lambda(x)$ donné trouver une fonction $f(x)$, définie dans un certain intervalle (a, b), telle que, $x_1, x_2, \ldots$ étant une suite épuisant l'ensemble des points de discontinuité de $f(x)$ dans (c, d), les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid f(x_n + 0) - f(x_n) \mid, \quad \Sigma \mid f(x_n - 0) - f(x) \mid,$$

sont divergentes quel que soit $(c, d) \subset (a, b)$ et $f(x)$ a la propriété P par rapport à $\lambda(x)$.

Pour pouvoir construire une telle fonction, nous allons démontrer la thèse suivante: On peut pour toute fonction $\omega(x)$, définie pour $x \geqq 0$, continue, croissante et telle que $\omega(0 + 0) = \omega(0) = 0$, trouver une suite de constantes rationnelles positives $a_1, a_2, a_3, \ldots$ telle que la série $\omega(a_1) + \omega(a_2) + \ldots$ est convergente. En effet, il suffit de choisir pour tout n naturel un $a_n > 0$ tel que $\omega(a_n) < n^{-2}$.

Prémisses et conventions.

1⁰ $\omega(x)$ continue, croissante, $\omega(0 + 0) = \omega(0) = 0$, $x^{-1}\,\omega(x)$ décroissant.

2⁰ a_k rationnel, positif pour $k = 1, 2, \ldots$, $\Sigma\,\omega(a_n)$ convergente.

3⁰ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ une suite épuisant l'ensemble des nombres $r\alpha$ (α fixe, irrationnel, r variable, rationnel) qui tombent dans l'intervalle (a, b); $\alpha_m \neq \alpha_n$ pour $m \neq n$.

4⁰ $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ une suite décroissante de constantes rationnelles, positives, tendant vers zéro; $\delta_1 + \delta_2 + \ldots$ est divergente; $x_{m,n} = \alpha_m + \frac{1}{2}a_m\delta_n$ pour $m = 1, 2, 3, \ldots$ et $n = 1, 2, 3, \ldots$; $I_{m,n} \equiv (\alpha_m, \alpha_m + a_m\delta_n)$.

On voit aisément qu'on a $I_{m,n+1} \subset I_{m,n}$ pour chaque couple d'entiers positifs $[m, n]$. Nous allons démontrer que la relation $x_{p,q} = x_{m,n}$ a lieu si $m = p$, $n = q$ et dans ce cas seulement. D'après la prémisse, l'égalité $\alpha_m = \alpha_p$ n'est vraie que si l'on a $m = p$. Prenons $\alpha_m = r_m\alpha$, $\alpha_p = r_p\alpha$ (r_m, r_p rationnels). Si l'égalité $x_{m,n} = x_{p,q}$ a lieu, on aura

$$\alpha_m + \tfrac{1}{2}a_m\delta_n = \alpha_p + \tfrac{1}{2}a_p\delta_q,$$
$$\alpha\,(r_m - r_p) = \tfrac{1}{2}\,(a_p\delta_q - a_m\delta_n).$$

L'égalité est impossible si $r_m \neq r_p$. Dans ce cas le premier membre serait irrationnel, le second rationnel. Si $r_m = r_p$ et (par suite) $m = p$, on a

$$\tfrac{1}{2}a_p\,(\delta_q - \delta_n) = 0,$$
$$\delta_q = \delta_n, \quad q = n.$$

Définition. Soit $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots$ une série divergente de nombres positifs telle que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\gamma_n}{\delta_n} = 0.$$

Considérons la fonction suivante:

$$f(x_{m,n}) = \frac{1}{m}\,a_m\gamma_n,$$

pour $x_{m,n}$ qui tombe dans l'intervalle $< a, b >$; pour les autres points x de l'intervalle $< a, b >$ soit $f(x) = 0$. Soit $x_1, x_2, x_3, \ldots$ une suite épuisant l'ensemble des points $x_{m,n}$ qui tombent dans l'intervalle (a, b); $x_p \neq x_q$ si $p \neq q$. Soit (c, d) un intervalle quelconque à l'intérieur de (a, b). Je dis que les séries $\Sigma \mid f(x_n + 0) - - f(x_n) \mid$ et $\Sigma \mid f(x_n) - f(x_n - 0) \mid$ (d'ailleurs identiques) pour les x_n qui tombent dans (c, d) sont divergentes. L'intervalle (c, d) contient un des intervalles $I_{m,n}$. Cela vient du fait que (c, d) contient un des points α_m. Celui-ci forme l'extrémité gauche de tout intervalle $I_{m,n}$ (n variable) et par suite aussi d'un intervalle $I_{m,k}$ qui est contenu dans (c, d); si $c < d$, on trouvera un tel intervalle en réalisant la condition

$$\alpha_m + a_m \delta_k < d.$$

L'intervalle $I_{m,k}$ contient les points $x_{m,k}, x_{m,k+1}, x_{m,k+2}, \ldots$ et la série

$$\sum_{n=k}^{\infty} \mid f(x_{m,n}) - f(x_{m,n} - 0) \mid = \sum_{n=k}^{\infty} \mid f(x_{m,n} + 0) - f(x_{m,n}) \mid =$$
$$= \frac{a_m}{m} \sum_{n=k}^{\infty} \gamma_n,$$

est divergente. Par suite, la série $\Sigma \mid f(x_p + 0) - f(x_p) \mid$ et la série $\Sigma \mid f(x_p) - f(x_p - 0) \mid$ pour les x_p qui tombent dans (c, d) est aussi divergente.

Désignons par M l'ensemble des points de l'intervalle (a, b) qui appartiennent à une infinité d'intervalles $I_{m,n}$ sans appartenir à l'ensemble des nombres $x_{p,q}$. Je dis que $f(x)$ possède une derivée partout dans (a, b) sauf aux points de M et aux points $x_{p,q}$. Soit ξ un point au dehors de ces deux ensembles et soit $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ une suite tendant vers ξ. On a

$$\lim_{p=\infty} \frac{f(\xi_p) - f(\xi)}{\xi_p - \xi} = \lim_{p=\infty} \frac{f(\xi_p)}{\xi_p - \xi} = 0.$$

La dernière égalité vient du fait que tout ξ_p, pour lequel $f(\xi_p) \neq 0$, est égal à un $x_{m,n}$. On a pour toute couple des entiers positifs m, n sauf peut-être un nombre fini

$$\mid x_{m,n} - \xi \mid \geqq \tfrac{1}{2} a_m \delta_n,$$
$$\left| \frac{f(x_{m,n}) - f(\xi)}{x_{m,n} - \xi} \right| = \frac{f(x_{m,n})}{\mid x_{m,n} - \xi \mid} \leqq \frac{2}{m} \frac{\gamma_n}{\delta_n}.$$

Si $p \to \infty$, un des nombres m, n croît à l'infini et le second membre de la dernière inégalité tend vers zéro.

Je démontrerai que l'on peut couvrir l'ensemble des nombres de l'intervalle (a, b) pour lesquels $f(x)$ n'a pas de dérivée par une infinité dénombrable d'intervalles I_n tels que $\sum_{n=1}^{\infty} \omega(mI_n) < \varepsilon$, ε étant un nombre positif donné d'avance. Couvrons l'ensemble des nombres $x_{m,n}$ par une infinité dénombrable d'intervalles I'_k tels que $\Sigma\, \omega(mI'_k) < \frac{1}{3}\varepsilon$. Trouvons un entier positif p tel que

$$\sum_{r=p+1}^{\infty} \omega(a_r \delta_1) < \tfrac{1}{3}\, \varepsilon,$$

et un entier positif q tel que

$$\sum_{m=1}^{p} \omega(a_m \delta_q) < \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$

(voir lemme 4). Alors, la somme des valeurs $\omega(x)$ pour les longueurs des intervalles I'_k pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, des intervalles I_{k1} pour $k = p+1, p+2, \ldots$ et I_{mq} pour $m = 1, 2, \ldots, p$ est plus petite que ε. La fonction $f(x)$ possède une dérivée pour tout point au dehors de ces intervalles. Elle a la propriété P par rapport à $\omega(x)$.

Donc, la condition 2. du théorème 1. n'est pas nécessaire pour que la fonction $f(x)$ aie la propriété P par rapport à $\lambda(x)$. Néanmoins, le résultat exprimé par le théorème 1 est, dans un certain sens, définitif; cette circonstance est exprimée par le théorème suivant:

Théorème 2. Prémisse: *$\lambda(x), \mu(x)$ continues, croissantes pour $x > 0$, $\lambda(0) = \lambda(0+0) = \mu(0) = \mu(0+0) = 0$, $x^{-1}\lambda(x)$, $x^{-1}\mu(x)$, $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$ non croissantes pour $x > 0$,*

$$\lim_{x=0+0} \frac{\mu(x)}{\lambda(x)} = 0.$$

Thèse: Il existe une fonction des sauts $f(x)$ définie dans (0, 1) *telle que les séries*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu[|\, \varphi_1(x_k)\, |], \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu\, [|\, \varphi_2(x_k)\, |]$$

(voir la notation du théorème 1) sont convergentes et qui n'a pas la propriété P par rapport à $\lambda(x)$. (Évidemment, $f(x)$ à la propriété P par rapport à $\mu(x)$, d'après le théorème *1*.)

Pour démontrer ce théorème, nous allons utiliser le théorème suivant de M. Jarník.[3])

Théorème. Soit $\omega(x)$ *une fonction positive pour* $x \geqq 1$. *Soit* $M[\omega(x)]$ *l'ensemble de tous les points* Θ *de l'intervalle* $\langle 0, 1)$ *tels que, pour chaque* $c > 0$, *le système*

$$\left| \Theta - \frac{p}{q} \right| < \omega(q), \ q > c$$

est satisfait par une couple convenable d'entiers positifs p, q.

Soit $\lambda(x)$ *une fonction remplissant la condition 1 du théorème 1. Si* E *est un ensemble linéaire de points,* $L[E, \lambda(x)]$ *est défini par le procédé suivant: Soit* $\varrho > 0$; *couvrons* E *par un système dénombrable d'intervalles de longueurs* $d_1, d_2, d_3, \ldots$ $(d_i < \varrho)$; *soit* $L_\varrho[E, \lambda(x)]$ *la borne inférieure des nombres* $\sum_i \lambda(d_i)$ *pour tous les systèmes d'intervalles satisfaisant aux conditions indiquées. Je prends*

$$L[E, \lambda(x)] = \lim_{\varrho=0+0} L_\varrho[E, \lambda(x)].$$

Soit maintenant $\omega(x)$ *une fonction positive, continue, décroissante pour* $x \geqq 1$, $\lim_{x=\infty} \omega(x) = 0$, $\lambda[2\,\omega(x)]\,x^2$ *monotone pour* $x \geqq 1$, $\omega(x)\,x^2$ *monotone pour* $x \geqq 1$,

$$\int_1^\infty x\,\omega(x)\,\mathrm{d}x \text{ est convergente, } \int_1^\infty x\,\lambda[2\,\omega(x)]\,\mathrm{d}x \text{ est divergente.}$$

Alors, on a

$$L\{M[\omega(x)], \lambda(x)\} = \infty.$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de M. Jarník, nous allons démontrer le lemme suivant:

Lemme 6. Prémisse: $\lambda(x)$, $\mu(x)$ *continues, croissantes pour* $x > 0$, $\lambda(0) = \lambda(0+0) = \mu(0) = \mu(0+0) = 0$,

$$\lim_{x=0+0} \frac{\mu(x)}{\lambda(x)} = 0.$$

Thèse: Il existe une fonction $\omega(x)$ *positive, continue, décroissante pour* $x > 1$, *continue de droite pour* $x = 1$ *et telle que* $x^2\lambda[2\,\omega(x)]$ *est non croissant,* $\lim \omega(x) = 0$ *pour* $\lim x = \infty$, *l'intégrale* $\int_1^\infty x\,\lambda[2\,\omega(x)]\,\mathrm{d}x$ *est divergente et* $\int_1^\infty x\,\mu[2\,\omega(x)]\,\mathrm{d}x$ *est convergente.*

Démonstration. Soit $1 > c_1 > c_2 > \ldots$ une suite infinie de nombres tels que

[3]) V. Jarník, Über die simultanen diophantischen Approximationen, Math. Zeitschr. **33** (1931), 505—543, Satz 4, pour $s = 1$.

$$\frac{\mu(x)}{\lambda(x)} < \frac{1}{n^2} \text{ pour } 0 < x \leqq c_n.$$

Soit $x_0 = 1$, $x_1 > 1$ quelconque, $a_1 = \lambda(c_1)$. Si nous connaissons $a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-1}$ $(a_k \leqq \lambda(c_k))$ et $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1}$, choisissons x_n tel que

$$\log \frac{x_n}{x_{n-1}} > \frac{1}{a_{n-1}} \text{ et}$$

$$\log \frac{x_n}{x_{n-1}} \geqq \frac{1}{\lambda(c_n)}$$

et prenons

$$a_n = \frac{1}{\log \dfrac{x_n}{x_{n-1}}}.$$

Formons une série convergente $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots$ de constantes positives telle que $\varepsilon_n < x_{n+1} - x_n$. Si $\vartheta(x)$ est inverse à $\lambda(x)$, soit

$$\omega(x) = \tfrac{1}{2}\vartheta\left(\frac{a_n}{x^2}\right),$$

dans les intervalles $\langle x_{n-1} + \varepsilon_{n-1}, x_n \rangle$ pour $n = 2, 3, 4, \ldots$ et soit

$$\omega(x) = \tfrac{1}{2}\vartheta\left(\frac{a_1}{x^2}\right) \text{ dans } \langle x_0, x_1 \rangle.$$

On a pour tout x de ces intervalles $x^2\,\lambda[2\,\omega(x)] = a_n$; par suite, la fonction $x^2\,\lambda[2\,\omega(x)]$ est non croissante sur l'ensemble des points où elle est définie. Dans les intervalles $\langle x_n, x_n + \varepsilon_n \rangle$, nous pouvons prendre

$$\omega(x) = \tfrac{1}{2}\vartheta\left(\frac{\alpha_n(x)}{x^2}\right)$$

où $\alpha_n(x)$ est une fonction continue et décroissante dans l'intervalle $\langle x_n, x_n + \varepsilon_n \rangle$ et telle que $\alpha(x_n + 0) = \alpha(x_n) = x_n^2\,\lambda(2\,\omega(x_n)]$ et $\alpha(x_n + \varepsilon_n - 0) = \alpha(x_n + \varepsilon_n) = (x_n + \varepsilon_n)^2\,\lambda[2\,\omega(x_n + \varepsilon_n)]$.

La fonction $\omega(x)$ est positive, continue, décroissante ($\vartheta(x)$ est croissante) pour $x > 1$, continue de droite pour $x = 1$, $x^2\,\lambda[2\omega(x)]$ est non croissante, $\lim\limits_{x=\infty} \omega(x) \leqq \lim\limits_{x=\infty} \tfrac{1}{2}\vartheta\left(\dfrac{a_1}{x^2}\right) = 0$,

$$\int_1^{x_n} x\,\lambda[2\,\omega(x)]\,\mathrm{d}x \geqq \int_1^{x_1} x\,\lambda[2\,\omega(x)]\,\mathrm{d}x + \sum_{k=2}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} x\,\lambda\left[\vartheta\left(\frac{a_k}{x^2}\right)\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^{x_1} x\, \lambda[2\,\omega(x)]\, dx + \sum_{k=2}^{n} a_k \log \frac{x_k}{x_{k-1}} = \int_1^{x_1} + n - 1,$$

alors, l'intégrale $\int_1^{\infty} x\, \lambda[2\,\omega(x)]\, dx$ est divergente. Au contraire, si l'on prend $\mu(x)$ au lieu de $\lambda(x)$, on obtient une intégrale convergente. La fonction $x\, \lambda[2\,\omega(x)]$ est bornée parce qu'elle est décroissante et positive; la fonction $x\, \mu[2\,\omega(x)]$ est continue et on a (voir la prémisse)

$$\lim_{x=\infty} \frac{x\, \mu[2\,\omega(x)]}{x\, \lambda[2\,\omega(x)]} = \lim_{x=0+0} \frac{\mu(x)}{\lambda(x)} = 0,$$

alors, $x\, \mu[2\,\omega(x)]$ est bornée. Soit $x\, \mu[2\,\omega(x)] \leqq M$. On a pour $x \geqq 1$ (voir la définition des nombres a_n, c_n)

$$a_n \leqq \lambda(c_n),\ \frac{a_n}{x^2} \leqq \lambda(c_n),$$

$$\vartheta\left(\frac{a_n}{x^2}\right) \leqq c_n,\ \mu\left[\vartheta\left(\frac{a_n}{x^2}\right)\right] < \frac{1}{n^2}\, \lambda\left[\vartheta\left(\frac{a_n}{x^2}\right)\right],$$

$$\int_{x_1}^{x_n} x\, \mu[2\,\omega(x)]\, dx \leqq \sum_{k=2}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} x\, \mu\left[\vartheta\left(\frac{a_k}{x^2}\right)\right] dx + M \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} x\, \lambda\left[\vartheta\left(\frac{a_k}{x^2}\right)\right] dx + M \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{k^2} \log \frac{x_k}{x_{k-1}} + M \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} + M \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k.$$

L'intégrale $\int_1^{x_n} x\, \mu[2\,\omega(x)]\, dx$ possède une limite finie pour $n = \infty$ et la fonction sous le signe d'intégration est essentiellement positive, c'est-à-dire l'intégrale $\int_1^{\infty} x\, \mu[2\,\omega(x)]\, dx$ est convergente. Notre lemme est démontré.

D é m o n s t r a t i o n du théorème 2. Trouvons pour $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ la fonction $\omega(x)$ du lemme 6. On a

$$2x^2\,\omega(x) = \frac{2\,\omega(x)}{\lambda[2\,\omega(x)]}\,.\,x^2\,\lambda[2\,\omega(x)];$$

$\omega(x)$ étant décroissante, le second membre de l'équation est non croissant d'après la prémisse du théorème 2 et d'après le lemme 6. De plus, on a

$$\int_1^x x\,\omega(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_1^x \frac{2\,\omega(x)}{\mu[2\,\omega(x)]}\,x\,\mu[2\,\omega(x)]\,\mathrm{d}x \leqq$$

$$\leqq \frac{\omega(1)}{\mu[2\,\omega(1)]}\int_1^x x\,\mu[2\,\omega(x)]\,\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire, l'intégrale $\int_1^\infty x\,\omega(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente. Nous pouvons construire $f(x)$ et appliquer le théorème de M. Jarník.

Soit $f(x) = 0$ pour tout point irrationnel de l'intervalle $(0, 1)$ et

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = 2\,\omega(q)$$

pour toute couple d'entiers tels que $0 < p < q$ et que la fraction pq^{-1} soit irreductible. Nous allons démontrer que $f(x)$ a la propriété P par rapport à $\mu(x)$.

1° $\mu(x)$ remplit la condition 1° du théorème 1.

2° $f(x)$ est une fonction à variation bornée. On a

$$\sum_{x \text{ rat.}} f(x) \leqq 2\sum_{q=2}^{\infty} q\,\omega(q).$$

La dernière série est convergente parce que $x\,\omega(x)$ est décroissant et positif et $\int_1^\infty x\,\omega(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_m$ une suite croissante de points de l'intervalle $(0, 1)$. Si A_n est le plus grand des nombres $f(x_n)$, $f(x_{n+1})$, on a

$$|\,f(x_n) - f(x_{n+1})\,| \leqq A_n.$$

Le même n ne figure dans la somme

$$\sum_{n=1}^{m=1} |\,f(x_n) - f(x_{n+1})\,|,$$

que deux fois au plus; la somme est au plus égale à $2\sum_{x \text{ rat.}} f(x)$, alors, $f(x)$ est à variation bornée. On voit aisément que $f(x)$ est une fonction des sauts.

3⁰ Soit $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ une suite épuisant l'ensemble des nombres rationnels qui tombent dans $(0,1)$, $\xi_k \neq \xi_l$ pour $k \neq l$. On a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu[|f(\xi_k+0)-f(\xi_k)|] \leqq \sum_{q=1}^{\infty} q\,\mu[2\,\omega(q)],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu[|f(\xi_k)-f(\xi_k-0)|] \leqq \sum_{q=1}^{\infty} q\,\mu[2\,\omega(q)].$$

Les séries sont convergentes parce que la fonction

$$x\,\mu[2\,\omega(x)] = \frac{\mu[2\,\omega(x)]}{\lambda[2\,\omega(x)]}\,x\,\lambda[2\,\omega(x)]$$

est décroissante (voir la prémisse) et l'intégrale

$$\int_1^{\infty} x\,\mu[2\,\omega(x)]\,\mathrm{d}x$$

est convergente. Nous pouvons appliquer le théorème 1.

Il nous reste à démontrer que $f(x)$ n'a pas la propriété P par rapport à $\lambda(x)$. Il est évident que la fonction $f(x)$ n'a pas de dérivée aux points rationnels. Nous allons démontrer que $f(x)$ n'a pas de dérivée aux points irrationnels Θ qui satisfont à l'inégalité

$$\left|\Theta - \frac{p}{q}\right| < \omega(q), \tag{β}$$

pour tout $c > 0$ et pour certains p, q entiers, $q > c$. Nous pouvons supposer pq^{-1} irreductible. (Si l'inégalité considérée est vraie pour pq^{-1} reductible, elle l'est aussi pour $PQ^{-1} = pq^{-1}$, $Q < q$, P, Q entiers.) Soit $[p_1, q_1]$, $[p_2, q_2]$, $[p_3, q_3]$, ... une suite de couples des entiers qui remplissent l'inégalité (β) et telles que $\lim q_n = \infty$ pour $\lim n = \infty$, $p_n q_n^{-1}$ irreductible. On a

$$\left|\frac{f(p_n/q_n)-f(\Theta)}{p_n/q_n-\Theta}\right| = \left|\frac{2\,\omega(q_n)}{p_n/q_n-\Theta}\right| \geqq 2,$$

$$2\,\omega(q_n) \geqq 2\left|\frac{p_n}{q_n}-\Theta\right|,$$

$$\lim_{n=\infty}\omega(q_n) = 0,\ \lim\left(\frac{p_n}{q_n}-\Theta\right) = 0,$$

$$\limsup_{x=\Theta} \left| \frac{f(x) - f(\Theta)}{x - \Theta} \right| \geqq 2,$$

$$\liminf_{x=\Theta} \left| \frac{f(x) - f(\Theta)}{x - \Theta} \right| = 0,$$

et $f(x)$ n'a pas de dérivée au point Θ.

On ne peut pas couvrir l'ensemble M des points où $f(x)$ ne possède pas de dérivée, par une infinité dénombrable d'intervalles I_n tels que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(mI_n) < \varepsilon,$$

si ε est un nombre positif assez petit. En effet, d'après le théorème de M. Jarník, on a

$$L\{M[\omega(x)], \lambda(x)\} = \infty.$$

Soient I_n les intervalles couvrant M et soient R, ϱ positifs et tels que

$$L_\varrho\{M[\omega(x)], \lambda(x)\} > R > 0.$$

Soit $0 < \varepsilon < R$, $\varepsilon < \lambda(\varrho)$. On a ou bien

$$mI_r \geqq \varrho, \ \lambda(mI_r) \geqq \lambda(\varrho) > \varepsilon,$$

pour un certain r entier positif, ou bien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(mI_n) \geqq R > \varepsilon.$$

La fonction $f(x)$ n'a pas la propriété P par rapport à $\lambda(x)$. Ainsi, le théorème 2 est démontré.

*

O derivabilitě funkcí s variací konečnou.

(Obsah předešlého článku.)

Budiž $f(x)$ funkce s variací konečnou v intervalu (a, b); posloupnost $x_1, x_2, \ldots$, nechť obsahuje všechny její body nespojitosti;

$$\varphi_1(x) = f(x + 0) - f(x), \ \varphi_2(x) = f(x) - f(x - 0).$$

Věta 1. Budiž $\lambda(x)$ spojitá a rostoucí pro $x > 0$, $\lambda(0) = \lambda(0 + 0) = 0$, $x^{-1} \lambda(x)$ nerostoucí. Řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda[| \varphi_1(x_k) |], \ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda[| \varphi_2(x_k) |]$$

buďte konvergentní. Budiž M množství oněch bodů v (a, b), v nichž funkce skoků, příslušná k funkci $f(x)$, nemá derivaci rovnou nule (ve všech bodech mimo M je ovšem derivace funkce $f(x)$ rovna derivaci spojité části funkce $f(x)$, pokud některá z těchto derivací existuje). Potom lze, pro libovolné $\varepsilon > 0$, pokrýti množství M spočetným množstvím intervalů, jejich délky Δ_n splňují nerovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\Delta_n) < \varepsilon.$$

Věta 1 jest ostrá, jak ukazuje tato

Věta 2. $\lambda(x)$, $\mu(x)$ buďte rostoucí a spojité pro $x > 0$, $x^{-1}\lambda(x)$, $x^{-1}\mu(x)$, $\dfrac{\lambda(x)}{\mu(x)}$, nerostoucí pro $x > 0$, $\lambda(0) = \lambda(0 + 0) = \mu(0) = = \mu(0 + 0) = 0$, $\lim\limits_{x=0+0} \dfrac{\mu(x)}{\lambda(x)} = 0$. Potom existuje funkce skoků $f(x)$, definovaná v $(0, 1)$, která má (při témže označení jako ve větě 1). tyto vlastnosti:

1. Řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu[|\varphi_1(x_k)|]$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu[|\varphi_2(x_k)|]$ jsou konvergentní.

2. Existuje $\varepsilon > 0$ tak, že množství M nelze pokrýti spočetným množstvím intervalů, jejichž délky Δ_n by splňovaly nerovnost

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda(\Delta_n) < \varepsilon.$$
