

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

František Josef Studnička
O některých integralech omezených

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 12 (1883), No. 3, 185--187

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123688>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1883

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O některých integrelech omezených.

Napsal

P. da Silva

a z portugalského volně přeložil dr. F. J. St.*)

Francouzský matematik *Hermite* uvádí v pěkném kompendii svém „Cours d'Analyse“ některé vzorce integralní, jež možná vesměs integrováním po částech odvoditi přímo.

Zavede-li se kratší označení

$$\begin{aligned} u &= x \sin x + \cos x, \\ v &= -x \cos x + \sin x, \end{aligned} \quad (1)$$

platí následující vzorce (pag. 260.):

$$\int \frac{x^2 dx}{u^2} = \frac{v}{u}, \quad \int \frac{x^2 dx}{v^2} = -\frac{u}{v}, \quad (2)$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(au + bv)^2} = -\frac{u}{au + bv}. \quad (3)$$

Jestliž tu, jak patrně,

$$du = x \cos x dx, \quad \text{tedy} \quad x dx = \frac{du}{\cos x},$$

$$dv = x \sin x dx, \quad \text{tedy} \quad x dx = \frac{dv}{\sin x},$$

takže pro první integrály (2) obdržíme pomocí těchto součinů napřed

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{u^2} &= \int \frac{x}{\cos x} \cdot \frac{du}{u^2} \\ \int \frac{x^2 dx}{v^2} &= \int \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{dv}{v^2}, \end{aligned}$$

a integrujeme-li po částech, postupně

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\cos x} \frac{du}{u^2} &= -\frac{x}{\cos x} \frac{1}{u} + \int \frac{1}{u} \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x} dx \\ &= -\frac{x}{u \cos x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} \\ &= -\frac{x}{u \cos x} + \operatorname{tg} x = \frac{-x + u \sin x}{u \cos x} \end{aligned}$$

*) Vyňato z časopisu „Journal de sciences mathem. e astron.“ Vol. IV. pag. 87. et seqq.

$$= \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x + \cos x} = \frac{v}{u},$$

a postupem zcela stejným tedy též

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{dv}{v^2} &= -\frac{x}{\sin x} \frac{1}{v} + \int \frac{1}{v} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} dx \\ &= -\frac{x}{v \sin x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{x}{v \sin x} - \cot x = -\frac{x + v \cos x}{v \sin x} \\ &= -\frac{x \sin x + \cos x}{\sin x - x \cos x} = -\frac{u}{v}. \end{aligned}$$

Pro integral (3) zavedme pak

$$z = au + bv,$$

takže bude především

$$dz = adu + bdv = x(a \cos x + b \sin x)dx,$$

z čehož plyne obdobně

$$x dx = \frac{dz}{a \cos x + b \sin x},$$

načež obdržíme tímž způsobem, jako prvé,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(au + bv)^2} &= \int \frac{x}{a \cos x + b \sin x} \cdot \frac{dz}{z^2} \\ &= -\frac{x}{a \cos x + b \sin x} \cdot \frac{1}{z} + \int \frac{(au + bv) dz}{z(a \cos x + b \sin x)^2} \\ &= -\frac{x}{z(a \cos x + b \sin x)} + \int \frac{dx}{(a \cos x + b \sin x)^2}. \end{aligned}$$

Abychom pak určili poslední integral, uvažme, že

$$\int \frac{dx}{(a \cos x + b \sin x)^2} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{(a + b \operatorname{tg} x)^2} = -\frac{1}{b(a + b \operatorname{tg} x)},$$

načež povstane, užijeme-li této hodnoty,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(au + bv)^2} &= \frac{-x}{z(a \cos x + b \sin x)} + \frac{-\cos x}{b(a \cos x + b \sin x)} \\ &= -\frac{u}{au + bv}, \end{aligned}$$

jakož bylo vzorcem (3) udáno.

Konečně budiž zde ještě přímo ustanoveno, že

$$\int \frac{adx}{[a + (ax + b) \operatorname{tg} x]^2} = -\frac{\operatorname{tg} x}{a + (ax + b) \operatorname{tg} x}, \quad (4)$$

o kterémžto integralním vzorci tamtéž *Hermite* praví „dont on ne peut vérifier la valeur que par la différentiation“.

Položíme-li podobně, jako v případě posledním,

$$z = a + (ax + b) \operatorname{tg} x,$$

takže bude pak

$$dz = u \sec^2 x dx, \quad \text{tedy} \quad dx = \frac{\cos^2 x}{u} dz,$$

obdržíme především

$$\int \frac{adx}{[a + (ax + b) \operatorname{tg} x]^2} = \int \frac{a \cos^2 x}{u} \cdot \frac{dz}{z^2};$$

integrujeme-li tu po částech, povstane dále

$$\begin{aligned} \int \frac{a \cos^2 x}{u} \cdot \frac{dz}{z^2} &= -\frac{a \cos^2 x}{u} \cdot \frac{1}{z} + \int \frac{-2au \cos x \sin x - 2a^2 \cos^4 x}{u^2 z} dx \\ &= -\frac{a \cos^2 x}{uz} - \int \frac{2a \cos^2 x}{u^2} dx; \end{aligned}$$

poněvadž zároveň platí

$$2a \cos^2 x dx = du,$$

obdržíme se zřetelem k integrálu poslednímu

$$\begin{aligned} \int \frac{adx}{[a + (ax + b) \operatorname{tg} x]^2} &= -\frac{a \cos^2 x}{uz} - \int \frac{du}{u^2} \\ &= -\frac{a \cos^2 x}{uz} + \frac{1}{u} = \frac{z - a \cos^2 x}{uz} \end{aligned}$$

a vrátíme-li se konečně k významu litery z , vzorec (4), jež i *Hermite* uvádí.

Poznámka k eliminaci při soustavě lineární.

Napsal

Dr. F. J. Studnička.

Má-li soustava n stejnoměrných rovnic lineárních

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j = 0$$

$$\sum a_{2j} x_j = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\sum a_{nj} x_j = 0$$