Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Ludvík Kraus

Základové arithmetiky. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 12 (1883), No. 3, 153--184

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123687

Základové arithmetiky.

Dle výkladů professora K. Weierstrassa

napsal

Ludvík Kraus.

Oddělení I.

§. 1.

O číslech celistvých.

Chceme-li vytknouti, kolik je mezi daným množstvím jednotlivých předmětů stejného, určitého druhu, užíváme *čísel* slovem i písmem. Spojíme-li se slovem *jedna* (známka 1) představu, že mezi danými předměty se jeden předmět se žádanou vlastností vyskytuje, máme při slovech *jedna a jedna* představu, že mezi danými předměty se jeden předmět té vlastnosti nalézá a mezi ostatními zase jeden.

To, co počítáme, nazveme *jednotku* (Einheit). Pak jest *jednička* (Eins) výrazem pro to, že se jednotka mezi danými předměty jednou nalézá.

Slovem *nulla*, známkou 0, naznačíme, že jednotka se mezi danými předměty nenalézá.

Symboly 1 a 0 by postačily ku grafickému znázornění každé kolikosti jednotky; a sice tak, že bychom psali 0, když mezi danými předměty se jednotka nenalézá; 1 1 1 když z daných předmětů lze vyjmouti jednotku, z ostatních zase jednou a ze zbylých též; a podobně v každém jiném případě.

Z důvodů praktických jest zavedena soustava číselná, a sice desetinná.

Abstrahujeme-li od *určité* jednotky, máme pojem čísla abstraktního. Tohoto pojmu teď ještě užívati nebudeme. Tedy nám budou symboly:

$$1,\ 2,\ 3, \ldots \quad a,\ b,\ c, \ldots$$

značiti příslušné množství jednotky J. Věc tu vyjádříme také tak, že řekneme: Ony symboly nám značí, že klademe jednotku J jednou, dvakrát, . . a-krát, b-krát . .

Čísla zavedená nazveme již teď čísly celistvými. O těch netřeba blíže vysvětliti pojmy, pro které máme znaky:

$$a = b, \quad a > b, \quad a < b.$$

§. 2.

O sčítání čísel celistvých.

Definice: Symbol $(a + b)$ značí onen počet jednotek J, který vznikne, kladu-li k a jednotkám b jednotek. Vyjmu-li z $(a + b)$ jednotek b jednotek, zbude jich a. Podobně přidám-li k a jednotkám b jednotek, k obdrženému pak počtu c jednotek, naznačíme vzniklý počet symbolem $(a + b + c)$, anebo dle předešlé definice symbolem $(a + b) + c$.

Úkon symbolem $(a + b)$ naznačený jmenujeme úkon sečítání.

Z těchto definic plyne:

$$a + b = b + a \qquad \text{(I)}$$

$$a + b + c = a + c + b \qquad \text{(II)}$$

aneho slovy: Výsledek úkonu $(a + b)$ je tentýž jako úkonu $(b + a)$. Výsledek úkonu $(a + b + c)$ je tentýž jako úkonu $(a + c + b)$.

Žádnou z těchto dvou vět nelze z druhé formálně logicky odvoditi. Za to však všechny jiné zákony platící o sečítání čísel celistvých plynou formálně z uvedených dvou zákonů.

Tak na př. plyne z daných definic rovnice:

$$a + b + c = a + (b + c) \qquad (1)$$

Formálně obdržíme tuto rovnici, t. j. kladouce vždy stejné za stejné, tímto spůsobem:

platí

$$a + (b + c) = (b + c) + a \qquad \text{dle (I)}$$

$$(b + c) + a = (b + a) + c \qquad \text{dle (II)}$$

$$(b + a) + c = (a + b) + c \qquad \text{dle (I)}$$

tedy:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Podobně máme vzhledem ku vzorci (1):

$$a + (b + c + d + e) = a + (b + c + d) + e,$$

a podle téhož vzorce:

$$a + (b + c + d) + e = a + (b + c) + d + e = a + b + c + d + e,$$

tedy:

$$a + (b + c + d + e) = a + b + c + d + e. \qquad (2)$$

Z této rovnice plyne:

$$(a + b) + (c + d + e) = (a + b) + c + d + e,$$

a dále:

$$= a + b + c + d + e.$$

Jmenujeme-li výsledek sečítání *součet*, jednotlivá pak čísla součtu a, b, c, . . *sčítance* (summandy), můžeme říci:

Součet nezávisí na pořádku, v jakém sčítanci po sobě jdou.

Je volno shrnouti sčítance libovolně do skupin a sečísti tyto. Dva součty v neurčitých číslech a, b, c . . jsou stejné, jestliže se každé z těchto čísel v stejném počtu v obou součtech vyskytuje, a naopak.

My jsme zde proto zřejmě stanovili ony dva zákony, protože během dalšího výkladu zavedeme čísla jiného druhu, o kterých ale k vůli jednoduchosti soustavy arithmetické budeme požadovati, aby počítání s nimi bylo v podstatě totéž, jako počítání s čísly celistvými. Pak postačí na př. dokázati, že pro sečítání nových čísel platí ony dva zákony, abychom byli jisti, že platí všechny.

§. 3.

O násobení čísel celistvých.

Definice: Symbol $a \, . \, b$ značí součet tolika summandů a, kolik jednotek obsahuje b.

a jest tu násobenec (multiplicandus), b násobitel (multiplicator), $a \, . \, b$ součin (produkt). Podobně jest $a \, . \, b \, . \, c$ součin, kde $a \, . \, b$ jest multiplikand, c multiplikator, tak že $a \, . \, b \, . \, c$ můžeme také psáti $(a \, . \, b)c$.

Úkon naznačený symbolem $a \, . \, b$ zove se úkonem násobení. Z daných definic plynou snadno tyto tři zákony:

$$a \, . \, b = b \, . \, a \qquad \text{(III)}$$

$$(a \, . \, b)c = (a \, . c)b \qquad \text{(IV)}$$

$$(a + b)c = ac + bc, \qquad \text{(V)}$$

z nichž žádný nelze z ostatních formálně odvoditi.

Klademe-li zase stejné za stejné, možná odvoditi z těchto tří zákonů každý jiný o součinu čísel platící. Tak jest na př.:

$$a.b.c = a(b.c) \quad (3)$$

Platí totiž:

$$a.(bc) = (b.c)a \quad \text{dle (III)}$$
$$(b.c)a = (b.a)c \quad \text{dle (IV)}$$
$$(b.a)c = (a.b)c \quad \text{dle (V)}$$

tedy:

$$a.b.c = a(b.c).$$

Ze vzorce (3) plyne:

$$a(b.c.d.e) = a(b.c.d)e = a(b.c)d.e$$
$$a(b.c.d.e) = a.b.c.d.e$$

a dále:

$$(a.b)(c.d.e) = a.b.c.d.e.$$

Jmenujeme-li čísla a, b, c.. součinu $a.b.c$.. faktory, máme věty:

Součin nezávisí na pořádku, v jakém faktory po sobě jdou.

Je volno, shrnouti faktory libovolně do skupin a vynásobiti tyto.

Dva součiny v neurčitých číslech a, b, c.. jsou stejné, jestliže se každé z těchto čísel v stejném počtu v obou součinech vyskytuje, a naopak.

Ze vzorce (V) plyne:

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d),$$

ze vzorce (III):

$$a(c+d) + b(c+d) = (c+d)a + (c+d)b,$$

a podle (V) konečně:

$$(a+b)(c+d) = ca + da + cb + db;$$

čím jde na jevo, jak součin součtů se má vynásobiti. Zde jest dále důležito vytknouti, že z dané definice o součinu plyne pro $a = b = 1$ vzorec:

$$1.1 = 1,$$

kde 1 znamená, že jednotka J klade se jednou; tedy slovy: Jednotka J násobena toutéž jednotkou rovná se jednotce J.

§. 4.

O největším společném děliteli a nejmenším společném násobku.

1. Je-li $a > b$, a odejmeme-li z a b jednotek, ze zbytku — je-li to vůbec možno — zase atd., tu konečně buď nezbude

žádná jednotka, což označujeme známkou 0, anebo zbude c, kde $c < b$; tedy bude tu:

$$a = b + b + \ldots + b + c,$$

kde $c < b$ může býti také nullou.

Je-li c nulla, pravíme, že b je *dělitelem* čísla a. Není-li c nullou, můžeme podobně psáti:

$$b = c + c + \ldots + c + d,$$

kde o čísle d platí vzhledem k c totéž, co dříve o c vůči b. Jelikož se tu zbytky stále menší, dojdeme opakováním tohoto postupu konečně k rovnici:

$$m = n + n + n + \ldots + n,$$

kde zbytek je nulla.

Podle definice je n dělitelem čísla m, a protože předcházející rovnice má tvar:

$$l = m + m + \ldots + m + n,$$

obdržíme dosazením:

$$l = n + n + \ldots + n.$$

Tedy je n dělitelem čísla l a podobně všech předcházejících zbytků, tedy i čísel a, b.

O čísle, které jest dělitelem dvou čísel zároveň, řekneme, že je společným dělitelem těchto dvou čísel.

n jest tedy společným dělitelem čísel a, b.

Naopak jest tu zřejmé, že každý společný dělitel p čísel a, b je zároveň dělitelem čísla n.

Píšeme-li totiž:

$$a = p + p + \ldots + p,$$
$$b = p + p + \ldots + p,$$

tu obdržíme opětným vyjmutím b z a zbytek c vyjádřený co součet summandů p. Tedy je p dělitelem zbytku c a podle toho i zbytku d, e, .. atd., tedy i čísla n.

Tím je jasné, že n je *největší společný dělitel* čísel a, b.

Je-li $n = 1$, jmenujeme čísla a, b čísly *nesoudělnými*.

2. Patrně má součin $a \,.\, b$ dělitele a i b. Je-li n největší společný dělitel čísel a, b, pak

$$a = np, \quad b = nq.$$

Číslo $n \,.\, p \,.\, q$ má dělitele a, b.

Každé číslo, které má dělitele a, b, jmenujeme společným násobkem čísel a, b.

Každé takové číslo musí míti tvar $a \,.\, r = n \,.\, p \,.\, r$, kde patrně r musí míti dělitele q. Z toho jde, že $n \,.\, p \,.\, q$ je nejmenší společný násobek čísel a, b.

Jak se to se zavedenými pojmy u více než dvou čísel má, je jasné.

Z uvedeného jde na jevo, že zavedené pojmy se dají stanoviti, aniž by úkon dělení byl znám.

§. 5.

O veličinách číselných.

1. Rozšíříme pojem čísel zavedením více různých, jinak libovolně volených jednotek J, J_1, J_2, .. Značí-li a množství jednotek J, b počet jednotek J_1, c jednotek J_2, . . nazveme souhrn čísel a, b, c.. *veličinou číselnou* (Zahlgrösse).

Tento název jest oprávněn, protože k přesnému určení takého souhrnu je třeba *čísel;* zároveň jest onen souhrn *veličinou,* jelikož se mění přidáním neb odejmutím jednotek. (Molekula, obyvatelstvo a p. znázorňují tento pojem.)

2. Chceme-li zde pojem sečítání stanoviti, tu je nejpřirozenější definovati:

Součet dvou veličin číselných je zase veličina číselná, obsahující každou jednotku tolikrát, kolikrát se v obou veličinách celkem vyskytuje. Tím je součet jednoznačně určen a platí tu patrně zákony (I), (II).

Dřívější pojem o rovnosti dvou čísel se teď modifikuje v ten smysl:

Dvě veličiny číselné jsou stejné, pakliže každá z jich jednotek v stejném počtu v obou veličinách se nalézá.

Podobně však nelze pojem: „jedna veličina číselná je větší neb menší než druhá“ stanoviti.

3. Co se týká násobení veličin číselných, je stanovení tohoto pojmu zde nesnadné. Hlavní obtíže se vyskytnou při otázce: Co máme rozuměti součinem dvou různých jednotek? Libovolnost definice takového pojmu bude zajisté menší, když vytkneme napřed požadavky, kterým má zavedený pojem vyhověti.

Soustava arithmetiky bude jednoduchá, učiníme-li požadavek: Definice součinu dvou veličin číselných má býti tak vytknuta, aby zákony (III), (IV), (V) platily, a za druhé má býti součin dvou veličin číselných zase veličina číselná, to jest souhrn jistého počtu *zavedených* jednotek.

Ukážeme v příštím paragrafu, že oběma těmto požadavkům lze vyhověti, zavedeme-li neobmezeně mnoho jednotek, definovaných dole naznačeným způsobem.

§. 6.

O číslech lomených.

1. My klademe za základní jednotku 1; a, b, c značí zase tedy určité počty jednotky 1. Mimo to zavedeme jednotky a označíme je symbolem $\frac{1}{n}$, kde n je abstraktní číslo ze řady 2, 3, 4, . .

Taková jednotka $\frac{1}{n}$ má míti tu vlastnost, že n jich může zastupovati jednotku 1. Tedy:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}=1,$$

kde na levé straně máme n summandů. Klademe-li $\frac{1}{n}$ tolikrát, kolik a jednotek obsahuje, a nazveme-li souhrn $\frac{a}{n}$, tu může podle toho n veličin $\frac{a}{n}$ zastupovati a.

Jest záhodno jmenovati základní jednotku 1 prostě jednotkou, každou jinou ze zavedených jednotek pak částí jednotky, a sice $\frac{1}{n}$ n-tou částí jednotky 1.

Tedy bude pro příště veličina číselná nám značiti souhrn *určitého* počtu jednotky a jistých částí (ne všech) jednotky, kde každá část v *určitém* počtu se vyskytuje. Je volno v takové veličině nahraditi každou jednotku n n-tými částmi, a naopak.

Veličiny tyto označíme písmeny řeckými a budeme užívati pro ně názvu: *čísla lomená.* V předcházejícím jsme neřekli, že jednotka 1 může býti libovolně volena, protože se nemůže při libovolné jednotce vždy o její částech mluviti. Přece však takové jednotky existují; klademe-li na př. 1 jakožto jednotku délky, tu víme z geometrie, že lze určiti takovou část, že n jich se rovná jednotce.

2. Co tu bude značiti $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}$, anebo speciálně $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$? Předpokládejme, že oběma požadavkům v §. 5. vytknutým lze vyhověti. Pak je $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ veličina číselná a taktéž:

$$\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4},$$

kde položíme sčítance 12-krát. Podle zákonu (V) můžeme tuto veličinu psáti:

$$(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3})\tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3})\tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3})\tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3})\tfrac{1}{4},$$

a podle (III) a (V):

$$(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4})(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}).$$

Oba faktory jsou podle definice 1, tedy obdržíme 1 . 1. Definujeme-li teď:

Jednotka násobena jednotkou dá jednotku, tedy:

$$1 \,.\, 1 = 1,$$

tak je $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ taková veličina číselná, že 12 jich může zastupovati 1, tedy:

$$\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{12}.$$

Všeobecně máme podle toho:

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{m \,.\, n},$$

a podle (V):

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{a \,.\, b}{m \,.\, n}.$$

Z toho jde na jevo, jak nutno definovati vůbec součin $\alpha \,.\, \beta$ dvou veličin číselných. Za tím účelem objasníme dříve následující pojmenování.

My pravíme: $\frac{a}{m \,.\, n}$ *je n-tá část veličiny* $\frac{a}{m}$. Tento výraz jest oprávněný, protože n veličin $\frac{a}{m \,.\, n}$ se rovná $\frac{a}{m}$, jak již z pojmu těchto veličin plyne. Klademe-li totiž:

$$\frac{a}{m \,.\, n} = \gamma,$$

pak je:

$$\gamma + \gamma + \ldots + \gamma = a,$$

kde v levo $m.n$ summandů; spojíme-li na levé straně vždy n čísel γ do skupiny a nazveme-li tuto γ_1, platí:

$$\gamma_1 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_1 = a,$$

kde na levé straně se vyskytuje m summandů. γ_1 je zase veličina číselná a tedy podle definice:

$$\gamma_1 = \frac{a}{m}.$$

Zároveň je ale γ_1 součet n summandů $\frac{a}{m\,.\,n}$, tedy je onen výrok správný. Podle toho nazveme p-tou část veličiny

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{n}\right)$$

veličinu

$$\left(\frac{a}{m\,.\,p} + \frac{b}{n\,.\,p}\right)$$

a tak dále.

Definice: Součin $\alpha\,.\,\beta$ je veličina číselná, skládající se z veličiny α a její částí týmž spůsobem, jakým β skládá se z jednotky a její částí. Z této definice plyne naopak platnost zákonů (III), (IV), (V) a pro α, β co čísla celistvá definice dřívější.

3. Posud byla stejnost veličin číselných tak definována, jak jsme to v §. 5. vytknuli. Z pojmu našich veličin jsme ale teď poznali, že platí-li:

$$\gamma_1 = \frac{a}{m}, \quad \gamma = \frac{\gamma_1}{n},$$

pak tu je:

$$\gamma = \frac{a}{m\,.\,n}.$$

Z toho jde na jevo, že $\frac{m}{m\,.\,n}$ značí tutéž veličinu jako $\frac{1}{n}$.

U veličiny $\frac{a}{m}$ zoveme a čítatelem, m jmenovatelem.

Je-li dána veličina:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} + \ldots$$

a určíme-li jeden ze společných násobků čísel m, n, p.., na př. číslo q, tu bude:

$$q = m \,.\, m_1 = n \,.\, n_1 = p \,.\, p_1 = ..$$

Píšeme-li pak místo $\frac{a}{m}$, $\frac{am_1}{m \,.\, m_1} = \frac{am_1}{q}$ a podobně u ostatních, tu jmenujeme úkon, jímž obdržíme z dané veličiny veličinu:

$$\frac{a \,.\, m_1 + b \,.\, n_1 + c \,.\, p_1 + ..}{q},$$

uvedení veličin na stejného jmenovatele.

Definice: Veličina číselná α se rovná veličině číselné β, jestliže po uvedení obou na stejného jmenovatele jsou čítatelé titéž.

Veličina číselná α je větší neb menší než veličina číselná β, když po uvedení obou na stejného jmenovatele jest čítatel u α větší neb menší než onen u β.

Aby tyto definice byly správné, musíme dokázati, že je lhostejné, jakého z oněch možných stejných jmenovatelů volíme.

Tento důkaz není zbytečným, nebo při uvedení veličiny na stejného jmenovatele klademe arciť správně:

$$\frac{a}{m} = \frac{n \,.\, a}{n \,.\, m},$$

užíváme pak ale úkonu sečítání pro tyto nové symboly; a tu se nerozumí samo sebou, že jistý úkon proveden s týmiž veličinami, ale v jiných symbolech vede k týmž veličinám, t. j. veličinám, které jsou snad označeny jinými symboly, ale jsou tytéž podle původního pojmu veličin.

Zároveň musíme žádati na pojmech zavedených, aby měly tytéž charakteristické vlastnosti, kteréž mají tyto pojmy u čísel celistvých. To *musíme* žádati, protože tyto pojmy nejsou pojmy a priori.

Měli jsme u čísel celistvých:

1. Rovná-li se a, b, rovná se také b, a.
2. Rovná-li se a, b; b, c, rovná se také a, c.
3. Je-li $a \gtrless b$, $b = c$, pak $a \gtrless c$.

Jsou-li α, β dvě libovolné veličiny číselné a je-li p nejmenší společný násobek jmenovatelů v α a β, tu obdržíme z α převedením na jmenovatele p $\frac{m}{p}$, z β obdržíme $\frac{n}{p}$. Z úkonu takového převedení jde na jevo, že pro jmenovatele $p.q$ obdržíme:

$$\frac{m.q}{p.q}, \frac{n.q}{p.q}.$$

Jestliže tedy jednou čítatelé jsou stejni, tak jsou vždy, nebo z $m.q = n.q$ dá se souditi, že

$$m = n.$$

Tu jsou také vlastnosti 1), 2), 3) zřejmé.

Budeme nyní vždy tohoto pojmu stejnosti užívati. Z toho pojmu plyne:

Jestliže $\beta = \gamma$, tak je:

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma,$$

a naopak z této rovnice mohu souditi, že β se rovná γ.

Že něco podobného pro součin platí, musí se dokázati, což ostatně jest snadné. Máme totiž vzorce:

$$\frac{b}{m}.\frac{a}{n} = \frac{b.a}{m.n}, \quad \frac{a.b}{m.n} = \frac{a.b.p}{m.n.p}$$

a také:

$$\frac{b}{m}.\frac{a.p}{n.p} = \frac{a.b.p}{m.n.p}.$$

Tedy můžeme zde stejné za stejné (podle nové definice) položiti. To platí patrně, jsou-li jednotlivé faktory součty, máme-li na zřeteli zákon (V). Tedy platí:

Je-li $\beta = \gamma$, tak je:

$$\alpha . \beta = \alpha . \gamma,$$

a naopak z této rovnice lze souditi, že β se rovná γ.

Nebude snad zbytečné, objasníme-li, proč jsme při stanovení pojmu součinu znovu definovali:

$$1 . 1 = 1.$$

V oboru zavedených čísel se vyskytovala také čísla 1, 2, 3.. odpovídající dřívějším číslům celistvým. Tu nemůžeme a priori říci, že pro čísla celistvá v novém oboru *musejí* platiti všechny ty pojmy úkonů, jako pro dřívější čísla. My naopak žádáme: Je-li to možná, tedy *mají* tyto pojmy potrvati a mají se pro ostatní nová čísla důsledně rozšířiti.

§. 7.

O číslech záporných.

Máme-li:

$$\beta = \gamma + \delta,$$

označíme δ symbolem:

$$\delta = (\beta - \gamma),$$

takže že pojem tohoto označení je definován rovnicí:

$$(\beta - \gamma) + \gamma = \beta. \qquad (1)$$

Tu pak bude platiti:

$$\alpha + (\beta - \gamma) = ([\alpha + \beta] - \gamma). \qquad (2)$$

Na levé straně stojí totiž veličina číselná $(\alpha + \delta)$, mající vlastnost tu, že vzniká z ní přidáním veličiny γ veličina číselná:

$$\alpha + \delta + \gamma = \alpha + \beta.$$

Symbol:

$$(\alpha + \delta) - \gamma$$

ale právě podle (1) takovou veličinu definuje.

Jsou-li ε, ι dvě libovolné veličiny číselné a $\varepsilon > \iota$, bude $(\varepsilon - \iota)$ nám značiti zase veličinu číselnou. Mysleme si na okamžik, že i pro $\varepsilon = \iota$ anebo $\varepsilon < \iota$, symbol:

$$(\varepsilon - \iota)$$

má význam. Pak musíme důsledně souditi:

$$\alpha + (\varepsilon - \varepsilon) = \alpha,$$

$$\alpha + (\varepsilon - \iota) + (\iota - \varepsilon) = \alpha,$$

což tímto způsobem jde na jevo.

Položme do (2):

$$\beta = \gamma,$$

tak obdržíme:

$$\alpha + (\beta - \beta) = (\alpha + \beta) - \beta.$$

Podle (1) platí:

$$\{(\alpha + \beta) - \beta\} + \beta = \alpha + \beta.$$

Tedy má

$$\alpha + (\beta - \beta)$$

tutéž vlastnost jako α, totiž: přidám-li k ní β, obdržím $(\alpha + \beta)$. My klademe tedy

$$\alpha + (\beta - \beta) = \alpha.$$

Podobně bude tu

$$\alpha + (\beta - \gamma) + (\gamma - \beta) = \{\alpha + (\beta - \gamma) + \gamma\} - \beta,$$

a protože

$$(\beta - \gamma) + \gamma = \beta,$$

platí

$$\alpha + (\beta - \gamma) + (\gamma - \beta) = \{\alpha + \beta\} - \beta = \alpha + (\beta - \beta) = \alpha.$$

Dosavadní obor veličin rozšíříme tím, že zavedeme mimo jednotku 1 a její části $\frac{1}{n}$ druhou jednotku 1′ a její části $\left(\frac{1}{n}\right)'$, tak že zase:

$$\left(\frac{1}{n}\right)' + \left(\frac{1}{n}\right)' + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)' = 1'.$$

Tyto veličiny mají míti tu vlastnost, že $1 + 1'$, $\left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}\right)'$ nic na součtu (v dřívějším smyslu) nemění.

Je-li $(\beta - \gamma)$ veličinou číselnou α (v dřívějším smyslu) a

$$\alpha = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \ldots$$

a klademe-li dále:

$$\alpha' = \left(\frac{1}{m}\right)' + \left(\frac{1}{n}\right)' + \left(\frac{1}{p}\right)' +,$$

plyne z definice, že:

$$\delta + \alpha + \alpha' = \delta.$$

Tedy má α' tutéž vlastnost jako $(\gamma - \beta)$ a symbol $(\gamma - \beta)$ tedy má v novém oboru veličin významu.

Jmenujeme-li úkon naznačený symbolem $(\varepsilon - \iota)$ úkonem odčítání, můžeme říci:

Úkon odčítání je v novém oboru vždy možným. Veličina číselná bude se nyní skládati z určitého počtu jednotek 1 a její částí a z určitého počtu jednotek 1′ a její částí.

Pro dřívější veličiny číselné α, β jsme stanovili pojem stejnosti. Ponecháme-li tento pojem pro *tyto* veličiny i v novém oboru, musíme, má-li býti úkon odčítání jednoznačným, *tentýž* pojem stanoviti pro veličiny α', β'. Z toho patrno, jak budeme definovati stejnost našich veličin číselných.

Je-li A taková veličina, uvedeme každý člen v A se vyskytující na téhož jmenovatele n. Pak vznikne z A součet členů, z nichž každý jest buď:

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \varepsilon \text{ anebo } \left(\frac{1}{n}\right)' = \varepsilon',$$

tedy ona veličina:

$$\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon' + \varepsilon + \ldots;$$

nyní se dá upraviti buď na tvar:

$$(\varepsilon + \varepsilon') + (\varepsilon + \varepsilon') + \ldots + (\varepsilon + \varepsilon') + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon,$$

anebo na tvar:

$$(\varepsilon + \varepsilon') + (\varepsilon + \varepsilon') + \ldots + (\varepsilon + \varepsilon') + \varepsilon' + \varepsilon' + \ldots + \varepsilon',$$

anebo do tvaru:

$$(\varepsilon + \varepsilon') + (\varepsilon + \varepsilon') + \ldots + (\varepsilon + \varepsilon').$$

Protože $(\varepsilon + \varepsilon')$ nic na součtu nemění, můžeme v těchto případech resp. psáti:

$$(3) \qquad \begin{cases} \varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon, \\ \varepsilon' + \varepsilon' + \quad + \varepsilon, \\ \varepsilon + \varepsilon'. \end{cases}$$

Psali jsme součet:

$$\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon' + \varepsilon + \ldots$$

v jiném pořádku, majíce na zřeteli definici o sečítání v §. 5. Dále jsme definovali:

$$\delta + \varepsilon + \varepsilon' = \delta,$$

a podle požadavku shora vytknutého soudíme, že:

$$\delta' + \varepsilon + \varepsilon' = \delta' \text{ a pod.}$$

Definice: Veličina číselná A se rovná veličině číselné B, jestliže uvedeny na tvary (3) jsou identické. Tu zase platí vlastnosti (1) (2) tohoto pojmu v §. 6. vytknuté. Tato definice involvuje, že klademe:

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = \ldots$$

Posud jsme nullu do počtu nezavedli; 0 byla známkou pro to, že jednotka se mezi danými předměty nenalézala. Důsledně označíme tedy veličinu $\alpha + \alpha'$ známkou 0.

$$\beta = \gamma + \alpha'$$

má tu vlastnost, že přidáním α vznikne:

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma + \alpha' = \gamma.$$

Podle definice má $(\gamma - \alpha)$ tutéž vlastnost.

Klademe-li tedy:

$$\alpha' = -\alpha,$$

můžeme $-\alpha$ za samostatnou veličinu považovati, kterou přidáme místo abychom α odečtli. Píšeme tedy:

$$1' = 1, \left(\frac{1}{m}\right)' = \left(-\frac{1}{m}\right).$$

Tyto veličiny, jako každou pouze z nich složenou, jmenujeme veličinami *zápornými*. Naproti tomu jsou veličiny:

$$1, \frac{1}{m} \ldots$$

veličiny *kladné*.

1 jest jednotka *kladná (positivní)*, — 1 jednotka *záporná (negativní)*.

Každou veličinu číselnou našeho oboru budeme jmenovati *číslem racionálným* (zlomky).

§. 8.

O základních úkonech s čísly racionálnými.

1. *Úkon sečítání.* Podle toho, co jsme o pojmu stejnosti u našich veličin řekli, je tento úkon jasný. Podle tohoto pojmu plyne, klademe-li $\beta = \gamma$:

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma,$$

a naopak soudíme z této rovnice, jak zřejmo, že:

$$\beta = \gamma.$$

2. *Úkon odčítání.* $(\beta - \gamma')$ bude značiti veličinu té vlastnosti, že z ní vznikne β, přidáme-li k ní γ', jestliže pojem úkonu odčítání i zde zachováme. $(\beta + \gamma)$ má ale, jak víme, tuto vlastnost. Klademe-li tedy:

$$\gamma = -\gamma' = -(-\gamma),$$

tedy je úkon odčítání v našem oboru vždy možný, jednoznačný úkon. O něm platí totéž, co o úkonu sečítání.

3. *Úkon násobení.* Předpokládejme, že zákony (III), (IV), (V) platí, pak:

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha \,.\, \gamma + \beta \,.\, \gamma,$$

a tedy i:

$$(\alpha - \beta)\gamma + \beta \,.\, \gamma = (\alpha - \beta + \beta)\gamma = \alpha \,.\, \gamma.$$

Předpokládáme-li dále, že součin dvou čísel racionálných je zase číslo racionálné, má $(\alpha \,.\, \gamma - \beta \,.\, \gamma)$ tu vlastnost, že přidáním $\beta \,.\, \gamma$ vznikne $\alpha \,.\, \gamma$. Dle předešlé rovnice má tutéž vlastnost $(\alpha - \beta)\gamma$. Tedy *musíme* klásti:

$$(\alpha - \beta)\gamma = \alpha \,.\, \gamma - \beta \,.\, \gamma.$$

Dále je

$$(\alpha + \beta')\gamma = \alpha \,.\, \gamma + \beta' \,.\, \gamma = \alpha \,.\, \gamma + (-\beta)\gamma,$$

tedy

$$\alpha . \gamma - \beta . \gamma = \alpha . \gamma + (-\beta)\gamma,$$

z čehož dle vytknutých vět soudíme:

$$-\beta . \gamma = (-\beta)\gamma,$$

a podobně:

$$-\beta . \gamma' = (-\beta)\gamma'.$$

Definujeme-li zase

$$1 . 1 = 1,$$

bude

$$(-1) . 1 = (1 . 1) = -1,$$
$$1(-1) = (-1)1 = -1,$$
$$(-1)(-1) = -\{1(-1)\} = -(-1) = -1' = 1.$$

Podle toho jest jasné, jak vůbec součin dvou neb více čísel racionálných se vynásobí, stanovíme-li pro čísla kladná, jako dříve:

$$\frac{1}{m} . \frac{1}{n} = \frac{1}{m . n},$$

a t. d.

Tu jest také snadné dokázati, že klademe-li stejné za stejné (podle nové definice stejnosti) do součinu, obdržíme totéž, tedy pro:

$$A = B$$

je:

$$C . A = C . B.$$

Máme-li

$$(\alpha + \alpha')A = \alpha . A + \alpha' A,$$

a klademe-li

$$\alpha A = C,$$

platí

$$\alpha' A = -C,$$

tedy:

$$0 . A = 0.$$

Naopak, je-li dána rovnice:

$$C . A = C . B,$$

tu, jak jsme již poznali, C buď je

$$\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + . .$$

nebo

$$\varepsilon' + \varepsilon' + \varepsilon' + \ldots$$

nebo

$$\varepsilon + \varepsilon'.$$

Položíme-li za C tato čísla, což je dovoleno, je zřejmé, že v prvních dvou případech můžeme souditi:

$$A = B.$$

Týmž obratem se ukáže, že je-li:

$$C \,.\, A = 0,$$

musí býti jeden faktor nullou.

4. *Úkon dělení.* Jsou-li A, C daná čísla racionálná, tu tážeme se po B, jež činí:

$$A \,.\, B = C.$$

Protože:

$$A \,.\, B = B \,.\, A,$$

je lhostejno, ptáme-li se po A neb B. Tento úkol se dá vždy řešiti, t. j. nalezneme vždycky číslo racionálné, které tomuto požadavku vyhovuje, a jen jedno, *když A není nullou.* Neboť pak můžeme souditi, jestliže:

$$A \,.\, B = C,$$

$$A \,.\, D = C,$$

že

$$B = D.$$

V tomto případě pak píšeme:

$$B = C : A.$$

C jest tu dělenec (dividend), A dělitel (divisor), B podíl (quotient).

Podle toho je:

$$A(1 : A) = 1,$$

tedy i

$$C : A = C(1 : A).$$

Neboť podle definice je:

$$A(C : A) = A \,.\, B = C,$$

ale i zároveň

$$A \,.\, C \,.\, (1 : A) = A \,.\, (1 : A) \,.\, C = 1 \,.\, C = C.$$

Je-li m celistvé kladné číslo, tu jsme měli

$$m\left(\frac{1}{m}\right) = 1.$$

Nyní máme

$$m(1 : m) = 1,$$

tedy
$$1 : m = \frac{1}{m}.$$

Zůstaneme tedy v souhlasu s dřívějším označením, píšeme-li
$$C : A = \frac{C}{A},$$
tak že bude
$$\frac{C}{A} = C\left(\frac{1}{A}\right).$$
Patrně tu bude
$$\left(\frac{1}{m}\right)(-m) = -1;$$
m je zase celistvé, kladné číslo.
$$\left(\frac{1}{-m}\right)(-m)(-1) = -1,$$
$$\left(\frac{1}{m}\right)m = +1.$$
Dříve jsme však měli
$$\left(\frac{1}{-m}\right)' m = 1',$$
tedy
$$\frac{1}{-m} = -\frac{1}{m}. \qquad \text{a p.}$$

§. 9.

O řadách.

Poznali jsme, že úkony základní s čísly racionalnými jsou vždy v oboru těchto čísel možnými (a sice jednodnažným spůsobem), až na ten jediný případ, kdy při dělení divisor je nullou.

Označme nyní každé číslo racionálné literou řeckou. Protože jsou všechny zákony stanoveny, volno považovati každé číslo za abstraktní.

Úkony základní na
$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta, \ldots \mu,\ \nu,$$
v určitém počtu applikované vedou zase k číslu racionalnému. Dáme-li všem veličinám, až na α určité hodnoty, vznikne veličina

$$\frac{\varepsilon_1 \alpha^n + \varepsilon_2 \alpha^{n-1} + \ldots + \varepsilon_{n+1}}{\delta_1 \alpha^m + \delta_2 \alpha^{m-1} + \ldots + \delta_{m+1}},$$

kde ε_λ, δ_μ jsou určitá čísla racionalná. Vyskytuje se zde úloha: Pro které α má ona veličina určitou hodnotu?

Jednoduchý případ je ten, kdy ona veličina je

$$\alpha^2 - a,$$

kde a je celistvé, kladné číslo.

Našla se methoda, jakou v případě, kdy α existovalo, (tedy a bylo β^2) se toto stanoviti dalo. Bylo-li ale a na př. 2, tu pak úkon dobýti $\sqrt{2}$ se nikdy neukončil. Poznalo se, že každé číslo racionalné obdržené tím, že úkon odmocnění se n-krát pouze applikoval, mělo tu vlastnost, že jeho druhá mocnina byla něco menší než 2 a rozdíl byl tím menší, čím větší bylo n. Řeklo se, že $\sqrt{2}$ je *mezí* čísel racionalných. To arciť není dosti srozumitelné; nebo co tu má býti mezí, když to není číslo nám známé, t. j. číslo racionalné.

Podobně se to má s uvedením zlomku na zlomek desetinný.

Zavedeme nové veličiny číselné tvaru:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots,$$

kde členů je neobmezeně mnoho, každý člen pak buď 1 neb její část, tedy zlomek tvaru $\frac{1}{n}$.

Taková veličina číselná *(řada)* je, aspoň pojmovitě, úplně stanovena, jestliže víme, které zlomky se zde vyskytují, kolikrát a na kterém místě. Označíme ji velkým písmenem latinským.

Zde je každý člen zlomek kladný; jestliže je každý člen zlomkem záporným, označíme veličinu písmeny čárkovanými A′, B′, ...

Důležitou jest zde ta okolnost, že definujeme zase dané veličiny přesně formálně; tak asi, jako na začátku jsme kladli na př. tři různé jednotky JJ_1J_2 vedle sebe a řekli $J + J_1 + J_2$ je přesně definovaná veličina číselná. Jakého významu taková veličina pro počet má, závisí jednak na definicích úkonů početních, jednak ale na pojmu stejnosti pro tyto veličiny stanoveném. Tenkrát jsme poznali (§. 5.), že bude platiti:

$$a + b = b + a \quad \text{atd.},$$

jestliže pojem součtu tak zachováme, jak jsme jej při celistvých číslech vytkli a jestliže zároveň dvě veličiny za stejné považujeme, když tytéž jednotky v stejném počtu obsahují.

Podobně i zde stanovíme napřed pojem stejnosti veličin A, B. To učiníme ale tak, aby zákony I, II, III atd. platily, jestliže úkony analogicky definujeme.

Rozumí se samo sebou, že chceme míti soustavu jednotnou; že tedy budeme definovati stejnost tak, že, pro ten případ, kdy A, B jsou čísla racionalná, definice bude v souhlasu s definicí dřívější.

Ukáže se dále, že bude volno klásti při úkonech s novými veličinami stejné za stejné.

Dokud není pojem stejnosti definován, bylo by klamné na př. souditi, že:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \quad \left(n\text{-tý člen je } \frac{1}{2^n}\right)$$

tímto spůsobem. Je-li totiž:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots,$$

pak:

$$x + x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots$$

$$x + x = 1 + x$$

$$x = 1.$$

Zde již porovnáváme dvě řady, soudíme z

$$x + 1 = x + x,$$

že platí:

$$x = 1.$$

K tomu *můžeme býti oprávněni*, jestliže pojem stejnosti patřičně definujeme.

Za tímto účelem zavedeme pojem *částky* a sice takto. Máme-li

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots$$

nechť je to řada, tedy veličina A, anebo součet *určitého* počtu členů, pak jmenujeme každý souhrn *určitého* počtu členů z této veličiny *částkou její.*

Pak je částka částky zase částkou dané veličiny. Každá částka je tedy číslo racionalné, kladné a protože takové mohu na kladné části rozložiti spůsobem rozmanitým, jmenujeme i každé číslo racionalné, kladné a menší než vyňatá částka, částkou veličiny dané.

Definice: Veličina A rovná se veličině B, jestliže *každá částka* veličiny A je částkou veličiny B a naopak.

Patrně tu platí:

Rovná-li se A veličině B, rovná se B veličině A.

Rovná-li se A, B; B pak C, rovná se A, C.

Je-li $\varepsilon \leqq \iota$, a ι částkou A, je ε částkou A.

Jsou-li A, B *zároveň* čísla racionalná, je tato definice stejnosti v souhlasu s dřívější.

Dále plyne z definice:

Veličina A nezávisí na pořádku, v jakém členové po sobě jdou. Volno rozložiti každý člen $\frac{1}{n}$ veličiny A na m částí $\frac{1}{m \,.\, n}$ atd.

Jestliže A není stejné s B, existuje patrně částka ε veličiny B, která není zároveň částkou A anebo naopak. V prvním případě pravíme, že

$$\text{A je menší než B, } (A < B);$$

v druhém, že

$$\text{A je větší než B, } (A > B).$$

Toto pojmenování je úplně analogické s dřívějším, tedy oprávněné. Nebo snadno shledáváme, na př. v prvním případě, že *každá částka veličiny* A *je částkou veličiny* B. Neboť, je-li δ částkou A, musí býti $\delta < \varepsilon$, jinak by ε bylo částkou A, proti supposici. Tedy je δ částkou veličiny B.

Veličina A může míti tu vlastnost, že každé číslo α je její částkou. Příkladem toho je řada:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots,$$

v které se každá část $\frac{1}{n}$ jednou a jen jednou vyskytuje.

Všechny veličiny této vlastnosti jsou podle definice stejné. Řekneme, že jsou *nekonečné* a označíme je známkou ∞. Základní pojem *veličiny* je zde patrně illusorní.

Ze soustavy veličin našich je tedy vyloučíme.

Každá veličina A (řada) naší soustavy bude míti tedy tu vlastnost, že není každé číslo α její částkou anebo jinak řečeno, že každá její částka je menší než jisté číslo α. Nazveme tyto řady *řadami konvergentními.*

Za příklad stůjž zde řada:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$$

kde n-tý člen je $\frac{1}{2^n}$; každá částka je tu menší než 1.

Vše to, co jsme zde uvedli, nechť platí, klademe-li -1 za 1, $-\frac{1}{n}$ za $\frac{1}{n}$, tedy α' za α; A′, B′.. za A, B..

§. 10.

O základních úkonech se řadami.

1. *Úkon sečítání.* A + B se rovná řadě, v které se 1 nebo její část $\frac{1}{n}$ tolikrát co člen vyskytuje, kolikrát se celkem v A i v B jakožto člen nalézá. Patrně je řada A + B konvergentní a platí tu za

$$B = C$$
$$A + B = A + C.$$

Naopak lze z této rovnice souditi, že $B = C$; důkaz toho ale není tak snadným, jak se zdá. Ponecháváme jej čtenáři, podotýkajíce, že v §. 11. na jiných základech ona věta se dokáže.

Zákony I, II zůstanou zde patrně v platnosti.

2. *Úkon odčítání.* Co tu bude $(A - B)$? Zachováme-li pojem tohoto symbolu, jak jsme již dříve pro $(\alpha - \beta)$ stanovili, musíme klásti:

$$(A - B) = A + B' = A + (-B).$$

Odečteme od A, B, jestliže přidáme k A veličinu B′. Co to ale znamená, musíme stanoviti, nebo posud jsme veličiny tvaru A + B′ nezavedli. Zavedeme tedy tyto co samostatné veličiny do naší soustavy. Tu pak nutno definovati pojem stejnosti pro ně.

Rozumí se, že stanovíme tento pojem tak, aby byl v případě, že A, B' jsou čísly racionalnými identický s dřívějším, a za druhé, aby bylo volno klásti v $A + B'$ za A nebo B' veličiny s nimi (podle dřívější definice) stejné.

Definice: $A + (-B)$ se rovná $C + (-D)$, jestliže

$$A + D = B + C.$$

Pojem této stejnosti je ale již stanoven.

Patrně tu zase platí:

Rovná-li se $A + B'$, $C + D'$, rovná se $C + D'$ veličině $A + B'$.

Rovná-li se $A + B'$, $C + D'$ a $C + D'$, $E + F'$ tak se rovná také $A + B'$, $E + F'$.

Nebo máme pak z:

$$A + B' = C + D'$$

a

$$C + D' = E + F'$$

rovnice:

$$C + F = E + D$$

$$D + A = B + C,$$

tedy i rovnici:

$$C + D + F + A = C + D + B + E,$$

z které podle 1. tohoto §. lze souditi:

$$F + A = B + E$$

a z této konečně:

$$A + B' = E + F'.$$

Protože v rovnici

$$A + D = B + C$$

je dovoleno klásti stejné za stejné, tedy i pro nové veličiny platí:

$$A + B' = A_1 + B_1'$$

jestliže

$$A = A_1, \quad B = B_1.$$

Rovná-li se A, B, tu nemění $A + B'$ nic na libovolné veličině $C + D'$, co se tímto spůsobem dokáže.

Platí

$$C + D' + A + B' = A + C + (-B - D)$$

a dále

$$A + C + (-B - D) = C + (-D);$$

neboť definice stejnosti vyžaduje, aby, jak skutečně jest,

$$A + C + D = C + B + D.$$

Tedy:

$$C + D' + A + B' = C + D'.$$

Označíme tedy $A + B'$ v tomto případě nullou.

3. *Úkon násobení.* Stanovíme součin B . C týmž spůsobem, jako jsme to dříve u součinů *součtů* racionálných čísel učinili. Je-li B řadou

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots$$

a C řadou:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots$$

tu má býti B . C řadou A, v které se každé číslo $\beta_\lambda \gamma_\mu$ a jen jednou co člen vyskytuje. Patrně je A veličinou jednoznačně určenou; jednoznačnou proto, že veličina A na pořádku členů nezávisí a určitou, poněvadž lze udati, která část $\frac{1}{n}$ a kolikrát se v A co člen vyskytuje. Zákony III, IV, V patrně tu platí.

Dokážeme nyní, že A je řadou konvergentní.

Každá částka z B je totiž menší než jisté číslo β a každá částka z C je menší než jisté číslo γ; z toho patrno, že každá částka z A bude menší než $\beta . \gamma$. Vyjmeme-li totiž z A libovolně částku

$$\beta_{\lambda_1} \gamma_{\mu_1} + \beta_{\lambda_2} \gamma_{\mu_2} + \ldots$$

a je-li λ největší z čísel:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

a μ největší z čísel:

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$$

pak se vyjmutá částka rovná anebo je menší, než:

$$(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\lambda)(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\mu),$$

tedy menší než $\beta . \gamma$.

Podobně se dokáže:

Rovná-li se C veličině D, platí:

$$B . C = B . D.$$

Nebo každá částka z B. C je menší nebo se rovná:

$$(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\lambda)(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\mu),$$

kde λ, μ mají příslušné hodnoty. Je-li D řadou

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots$$

tu můžeme vzhledem k rovnici

$$C = D$$

vyjmouti z D částku ε, kde

$$\varepsilon \geqq \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\mu.$$

Tedy lze vyjmouti z B . D částku

$$(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\lambda)\,\varepsilon,$$

která se rovná nebo je větší než vyjmutá částka z B . C.

Tedy: Každá částka z B . C je částkou B . D a naopak. Co se tkne opáčného úsudku, totiž že plyne z rovnice

$$B . C = B . D$$

stejnost

$$C = D$$

srovnej sub 1. tohoto §.

4. *Úkon dělení.* Tento úkon zde stanoviti, bylo by obtížné, jelikož jsme u čísel racionálných neměli určitého zákonu, podle kterého se podíl bezprostředně určiti dal. Převedení na stejného jmenovatele je patrně u veličin A illusorní.

Pojednáme o tomto úkonu později v §. 13. po zavedení nových kriterií pojmu stejnosti.

5. Nežli o těchto blíže promluvíme, rozšíříme ještě pojem řad. Posud byl každý člen veličiny A buď 1 nebo $\frac{1}{n}$. Nyní zavedeme řady tvaru

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots, \qquad (1)$$

kde α_λ je obecné číslo racionalné, kladné, tedy

$$\alpha_\lambda = \frac{1}{a_\lambda} + \frac{1}{b_\lambda} + \ldots + \frac{1}{m_\lambda},$$

kde a_λ, b_λ .. jsou celistvými čísly kladnými.

Klademe řadu (1) stejnou s řadou A, když tato obsahuje co členy všechny zlomky $\frac{1}{p_\mu}$ v číslech α se vyskytující a jen tyto. Klademe-li podobně řadu

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots \qquad (2)$$

stejnou s B, tu se rovná řada (1) řadě (2), když $A = B$.

Jmenujeme-li zase *částkou* řady (1) každý souhrn *určitého* počtu členů α_λ, tu patrně možná najíti částku z A, která je stejnou s vyjmutou částkou ze řady (1) a naopak. Vyjmeme-li z A částku ε, tak lze nalézti částku z (1), která je buď větší nebo stejnou s částkou ε.

Je-li tedy každá částka řady (1) menší, než jisté číslo α, tu nazveme řadu (1) konvergující.

Jen konvergující řady tvaru (1) zavádíme do naší soustavy.

V řadě A je patrně volno shrnouti i neobmezeně mnoho členů do skupin a považovati A co součet těchto skupin. To plyne z definice stejnosti

$$A = B + C.$$

I když takových skupin je neobmezeně mnoho, klademe součet těchto skupin co stejný s A.

Podle toho jest snadné dokázati, že je u řad tvaru (1) dovoleno shrnouti členy (byť i neobmezeně mnoho) do skupin a sečísti tyto, byť i těchto bylo neobmezené množství.

Co závěrek podotýkáme, což ostatně lze snadno dokázati:

Stanoví-li se pojmy úkonů pro řady (1) týmž spůsobem, jako se to stalo u veličin A, (s jedinou jen modifikací, tedy že všude klademe místo členu $\frac{1}{n}$ člen α'_λ), potrvají věty dříve obdržené.

§. 11.

O nových kriteriích stejnosti.

Máme-li

$$A + B = A + C,$$

soudíme, že B se rovná C.

Podobně z rovnice

$$A + \beta = A + \gamma$$

plyne, že každé číslo menší než β je částkou γ a naopak; tedy

$$\beta = \gamma.$$

Máme-li konečně:

$$A + \beta = A + C,$$

a chceme-li vůbec vztah čísel racionálných k řadám definovati, musíme klásti

$$\beta = C.$$

Stejnosť řady s číslem racionálným jsme posud přímo nedefinovali. Je dále zřejmé, co tu znamená $\beta > C$, $\beta < C$. Vyvineme teď kriteria stejnosti, která touž měrou platí pro všechny tyto tři případy a která jsou pro praktické potřeby spůsobilejšími.

Je-li veličina A řadou

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots,$$

nechť si je α_λ zlomkem $\frac{1}{m}$ anebo obecným kladným číslem racionalným, bude každá částka z A menší než jisté číslo ε. Volíme-li za n libovolné celistvé, kladné číslo, nalezneme patrně mezi

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots$$

od členu $\frac{1}{n}$ počínajíce první zlomek $\frac{m-1}{n}$, o kterém bude platiti

$$\frac{m-1}{n} \leqq A$$

tak že:

$$\frac{m-2}{n} < A$$

$$\frac{m}{n} > A.$$

Protože $\frac{m-2}{n}$ je částkou A, můžeme rozložiti A na součet

$$A = A_1 + A_2,$$

kde A_1 obsahuje *určitý počet členů* z A, a

$$A_1 \geqq \frac{m-2}{n},$$

tedy:

$$A - A_1 = A_2 < \frac{2}{n},$$

n bylo zde libovolné; tedy platí:

Theorem I. Je-li δ sebe menší dané číslo kladné, tu lze rozložiti A na dva díly, z nichž první je číslo racionálné, druhý pak řada menší než δ.

K vůli stručnějšímu vyjádření zavedeme nyní symbol $|\alpha|$.

Tento má značit kladnou hodnotu čísla α, když od znaménka abstrahujeme; tedy na př.:

$$|3| = |-3| = 3.$$

Nazveme $|\alpha|$ *absolutní hodnotou* (absoluter Betrag) čísla α. Tu platí:

Theorem II. Je-li A stejné s B, δ libovolně dané, sebe menší číslo, ε libovolná částka z A, tu lze určiti částku ι z B tak, že

$$|\varepsilon - \iota| < \delta.$$

Důkaz: Rozložme A na dva díly

$$A = A_1 + A_2,$$

kde A_1 obsahuje určitý počet členů, tak že

$$A_1 \gtreqless \varepsilon.$$

Kdyby tu A_2 nebylo menší než δ, tedy vyjmeme z A_2 tolik členů v určitém počtu, že zbytek je menší než δ. Tedy vždy je možné rozložiti A na dva díly tak, že první se skládá z určitého počtu členů a je větší nebo se rovná ε, druhý pak je řadou menší než δ. Jmenujme tyto dva díly zase A_1, A_2, tak je

$$A_1 + A_2 = A$$
$$A_1 \gtreqless \varepsilon, \quad A_2 < \delta.$$

Rozložme nyní i B na dva díly B_1, B_2, kde B_1 obsahuje určitý počet členů a

$$B_2 < \delta.$$

Protože A se rovná B, musí každá částka z A, na př. A_1 býti částkou veličiny B a naopak, tedy platí:

$$|A_1 - B_1| < \delta.$$

Jest-li A_1 se rovná ε, tu je B_1 ono ι, o kterém v theoremu II. jsme mluvili; je-li ale $A_1 > \varepsilon$, tak patrně můžeme $\iota < B_1$ voliti tak, že

$$|\varepsilon - \iota| < \delta,$$

kde ι tedy je zase částí veličiny B.

Rozumí se, že týmž spůsobem jsme mohli voliti ι co část z B libovolně a určiti podle toho ε.

Tentýž theorem platí, jestliže jedna z veličin A, B je číslem racionálným anebo obě jsou čísly racionálnými. Zde pak volno rozuměti částkou čísla racionálného α každé číslo stejné s α neb menší než α.

Abychom objasnili theorem podaný, volíme za příklad známou stejnost

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots,$$

kde $\alpha < 1$. Tu je vždy možná určiti částku ι řady na pravé straně rovnice tak, že

$$\frac{1}{1-\alpha} - \iota < \delta,$$

kde δ značí sebe menší danou, kladnou veličinu. Neboť platí

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots \alpha^{n-1} = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha},$$

tedy

$$\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{\alpha^n}{1-\alpha}.$$

Protože $\alpha < 1$, je možná voliti n tak velké, že $\frac{\alpha^n}{1-\alpha} < \delta$.

Důležitým jest opačný theorem. Zachováme-li veličinám δ, ε, ι téhož významu, platí:

Theorem III. Mají-li dvě veličiny A, B naší soustavy (nechť si jsou čísly racionalnými nebo řadami) tu vlastnost, že při libovolném δ a libovolné částce ε lze určiti ι tak, že

$$|\varepsilon - \iota| < \delta$$

a naopak při libovolném δ a ι možná určiti ε tak, že téže nerovnosti vyhovuje, platí stejnost

$$A = B.$$

Důkaz. Buďtež za prvé A, i B řadami. Pak třeba jen dokázati, že každá částka z A je částkou B a naopak.

Je-li ε_1 libovolná částka z A, tu existuje patrně také částka ε z A, kde

$$\varepsilon > \varepsilon_1, \text{ tedy } \varepsilon - \varepsilon_1 = \delta_1$$

a δ_1 kladná veličina. Nyní jest možná, podle toho, co v theoremu předpokládáme, určiti ι tak, že

$$|\varepsilon - \iota| < \delta_1.$$

Z toho plyne:

$$\varepsilon_1 < \iota$$

a protože ι je částkou veličiny B, tak je i ε_1 t. j. libovolná částka z A částkou veličiny B. To platí patrně i naopak, čím theorem III. v tomto případě jest dokázán.

Je-li A číslem racionálným α, B ale řadou, a mají-li α, B ty vlastnosti, jak je v theoremu III. předpokládáme, mají tytéž vlastnosti patrně i řady $C+\alpha$, $C+B$, kde C je libovolnou řadou konvergující. Z toho soudíme

$$C+\alpha=C+B$$
$$\alpha=B.$$

Dokážeme nyní pomocí theoremu III., že lze z rovnice

$$A+B=A+C$$

souditi:

$$B=C.$$

Za tím účelem třeba jen dokázati, že k libovolné částce β z B při daném libovolném δ možná určiti částku γ z C tak, že

$$|\beta-\gamma|<\delta.$$

Tomu tak skutečně jest; neboť budiž ε částkou z A takovou, že

$$A=\varepsilon+A_2, \quad A_2<\delta.$$

Tu pak $\beta+\varepsilon$ je částkou veličiny $A+B$, tedy i veličiny $A+C$.

Budiž tu

$$\beta+\varepsilon=\gamma+\iota;$$

tak že γ je částkou z C a ι částkou z A. Jest-li ι je menší neb stejné s ε, pak platí patrně

$$\beta\gtreqless\gamma,$$

tedy β částkou veličiny C. Jest-li ι je větší než ε, tak platí podle toho, jak jsme ε určili

$$\iota-\varepsilon<\delta,$$

tedy i

$$\beta-\gamma<\delta.$$

Podobně se dokáže, že lze z rovnice

$$AB=AC$$

souditi

$$B=C.$$

Vyjmeme-li z B libovolnou částku ε, z A libovolnou částku α, tak lze patrně určiti částku α_1 z A a částku ι z C tak, že

$$\alpha_1 \iota \geqq \alpha\varepsilon.$$

Je-li δ sebe menší dané číslo kladné, musí se nyní dokázati, že lze určiti α a příslušné α_1 tak, že

$$|\varepsilon - \iota| < \delta.$$

Kdyby ι bylo větší neb stejné s ε, pak netřeba zde více důkazu. Dejme tomu, že ι jest menší než ε a sice

$$\varepsilon - \iota = \delta.$$

Pak platí

$$\alpha_1 - \alpha \geqq \alpha\left(\frac{\varepsilon}{\iota} - 1\right)$$

$$\alpha_1 - \alpha \geqq \alpha\frac{\delta}{\iota},$$

tedy i

$$\alpha_1 - \alpha \geqq \alpha\frac{\delta}{\varepsilon};$$

δ i ε jsou dané veličiny, tedy i $\frac{\delta}{\varepsilon} = \delta_1$ známá veličina. Určíme-li nyní částku α z A tak, že o každé částce α_1 z A, která je větší než α, platí

$$\alpha_1 - \alpha < \alpha\,\delta_1,$$

tu patrně v hořejší nerovnosti

$$\alpha_1 \iota \geqq \alpha\,\varepsilon,$$

kde α má vlastnost právě naznačenou, nemůže býti rozdíl mezi ι a ε větší δ, nýbrž číslo menší než δ; tím je věta dokázána. Že lze skutečně určiti α naznačené vlastnosti, je jasné; značí-li β libovolnou částku z A a je-li

$$\delta_2 < \beta\,\delta_1,$$

víme, že vždy lze učriti $\alpha > \beta$ tak, že

$$\alpha_1 - \alpha < \delta_2,$$

tedy i

$$\alpha_1 - \alpha < \beta\,\delta_1 < \alpha\,\delta_1.$$

Během dalšího výkladu budeme často užívati uvedených theoremů. Tu se ukáže, že jest záhodno a že také stačí vyjádřiti theoremy spůsobem o něco změněným. Místo abysme, jako jsme dříve vždy činili, mluvili o *libovolné* částce ε, mluviti budeme o *jistých* jen částkách, t. j. oněch, jež jsou souhrnem *prvních* m *členů* řady A. Označme tento součet známkou $\overline{\alpha}_m$; platí

$$A = \overline{\alpha}_m + A_1.$$

Řadu A_1 nazveme zbytkem řady A příslušným k číslu m. Z theoremu I. plyne tu:

Je-li δ sebe menší daná veličina, lze vždy určiti m tak velké, že příslušící zbytek řady A je menší než δ.

Podobně plyne z theoremu II.:

Jsou-li A, B stejné veličiny, δ sebe menší daná veličina, p sebe větší dané číslo celistvé, kladné, lze vždy určiti $m > p$, $n > p$ tak, že

$$|\overline{\alpha}_m - \overline{\beta}_n| < \delta.$$

Třeba tu jen určiti m větší než p tak, že

$$A - \overline{\alpha}_m < \delta,$$

a podobně n větší než p tak, že

$$B - \overline{\beta}_n < \delta.$$

Nyní platí i opačná věta:

Veličiny A, B jsou stejné, jestliže při sebe menší dané veličině δ a sebe větším daném číslu p lze vždy určiti $m > p$, $n > p$ tak, že

$$|\overline{\alpha}_m - \overline{\beta}_n| < \delta.$$

Neboť pak zajisté k libovolné částce ε z A lze určiti částku ι z B tak, že

$$|\varepsilon - \iota| < \delta$$

a naopak, při daném ι lze určiti částku ε z A vyhovující této nerovnosti. Tedy platí theorem III., čímž věta uvedená je dokázána.

(Pokračování.)