Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Augustin Pánek

Elementární spůsob vyšetřování křivek v rovině. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 4 (1875), No. 6, 246--255

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123675

Elementární způsob vyšetřování křivek v rovině.

Pro žáky středních škol podává

Augustin Pánek.

(Dokončení.)

§. 3.
O středu křivosti a poloměru křivosti daných křivek.

Rovnice tečen sestrojených ku křivce v bodech (x_1, y_1), $(x_1 + \alpha, y_1 + \beta)$ jsou

$$y - y_1 = a(x - x_1),$$
$$y - (y_1 + \beta) = a'[x - (x_1 + \alpha)],$$

a tedy rovnice příslušných normál

$$y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1), \tag{1}$$

$$y - (y_1 + \beta) = -\frac{1}{a'}[x - (x_1 + \alpha)]. \tag{2}$$

O průsečném bodě obou normál platí tyto rovnice pospolu; a nazveme-li souřadnice tohoto bodu (ξ, η), obdržíme tedy z rovnic (1), (2)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x_1 + \frac{\alpha + a'\beta}{a - a'} a \\ \eta &= y_1 - \frac{\alpha + a'\beta}{a - a'}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Rovnice kruhu, jehož střed jest (ξ, η) a dotýká se křivky v bodě (x_1, y_1), bude

$$R^2 = (\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2$$

a tedy po dosazení hodnot z rovnic (3),

$$R^2 = \frac{(1 + a^2)(\alpha + a'\beta)^2}{(a - a')^2}. \tag{4}$$

Dle rovnice (13), §. 1., povstane ze vzorců (3), (4)

$$\xi = x_1 + \frac{1 + aa'}{a - a'} \alpha a,$$

$$\eta = y_1 - \frac{1 + aa'}{a - a'} \alpha, \tag{5}$$

$$R^2 = \frac{1 + a a'}{a - a'} (1 + a^2) \alpha^2.$$

Jedná se nyní o ustanovení relace mezi a a a'.

V stejnině (15), §. 1., značí h_1, h_2 funkce x_1, y_1, tedy lze psáti

$$a = - \frac{\varphi (x_1, y_1)}{\psi (x_1, y_1)};$$

podobně

$$a' = - \frac{\varphi (x_1 + \alpha, y_1 + \beta)}{\psi (x_1 + \alpha, y_1 + \beta)}.$$

Rozvineme-li čítatele i jmenovatele v řadu, obdržíme

$$\begin{aligned} \varphi (x_1 + \alpha, y_1 + \beta) &= \varphi (x_1, y_1) + c\alpha + c_1 \beta + c_2, \\ \psi (x_1 + \alpha, y_1 + \beta) &= \psi (x_1, y_1) + d\alpha + d_1 \beta + d_2, \end{aligned} \tag{6}$$

kdež značí c a d algebraický součet členů s činitelem α, pak c_1 a d_1 algebraický součet s činitelem β a kdež ostatní řady členů c_2 a d_2 zahrnují v sobě α, β i součin týchž veličin v rozměru nejméně druhém.

Utvoříme-li rozdíl směrnic dle vzorce (15), §. 1.,

$$a - a' = \frac{1}{h_2 h'_2} \begin{vmatrix} h_2 & h'_2 \\ h_1 & h'_1 \end{vmatrix}$$

a dle rovnice (6)

$$a - a' = \frac{\alpha \begin{vmatrix} h_2 & h_1 \\ d & c \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} h_2 & h_1 \\ d_1 & c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_2 & h_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix}}{h_2 (h_2 + d\alpha + d_1 \beta + d_2)},$$

bude, poněvadž

$$\beta = \alpha a = - \frac{h_1}{h_2} \alpha,$$

zároveň tedy

$$a - a' = \frac{\alpha h_2 \begin{vmatrix} h_2 & h_1 \\ d & c \end{vmatrix} - \alpha h_1 \begin{vmatrix} h_2 & h_1 \\ d_1 & c_1 \end{vmatrix} + h_2 \begin{vmatrix} h_2 & h_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix}}{h_2 (h_2^2 + \alpha d h_2 - \alpha d_1 h_1 + d_2 h_2)}.$$

Poněvadž veličiny c_2, d_2 činitele α^2 obsahují, dělme poslední vzorec na α a položme pak $\alpha = 0$, načež povstane

$$\Big/^{\alpha=0} \frac{a - a'}{\alpha} = \frac{1}{h_2^3} \left\{ h_2 \begin{vmatrix} h_2 & h_1 \\ d & c \end{vmatrix} - h_1 \begin{vmatrix} h_2 & h_1 \\ d_1 & c_1 \end{vmatrix} \right\} = \frac{1}{h_2^3} \begin{vmatrix} h_2 & d_1 & c_1 \\ 0 & h_2 & h_1 \\ h_1 & d & c \end{vmatrix}; \tag{7}$$

nazveme-li ε hodnotu $\frac{a-a'}{\alpha}$ pro $\alpha=0$, jest pak

$$a'=a-\alpha\varepsilon, \tag{8}$$

což vloženo byvši do vzorců (5) spůsobuje

$$\xi=x_1+\frac{a}{\varepsilon}(1+a^2-\alpha a\varepsilon),$$

$$\eta=y_1-\frac{1}{\varepsilon}(1+a^2-\alpha a\varepsilon),$$

$$R^2=\frac{\alpha^2(1+a^2)}{\varepsilon^2}(1+a^2-\alpha a\varepsilon);$$

nazveme-li determinant

$$\begin{vmatrix} h_1 & d & c \\ 0 & h_2 & h_1 \\ h_2 & d_1 & c_1 \end{vmatrix} = h_1(c_1 h_2-d_1 h_1)-h_2(ch_2-dh_1)=\nabla,$$

obdržíme tedy pro $\alpha=0$

$$\begin{aligned} \xi&=x_1+\frac{a}{\varepsilon}(1+a^2)=x_1+\frac{h_1(h_1{}^2+h_2{}^2)}{\nabla}, \\ \eta&=y_1-\frac{1}{\varepsilon}(1+a^2)=y_1-\frac{h_2(h_1{}^2+h_2{}^2)}{\nabla}, \\ R_2&=\frac{1}{\varepsilon^2}(1+a^2)=\frac{(h_1{}^2+h_2{}^2)^3}{\nabla^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Ještě třeba ustanoviti hodnoty pro c, c_1, d, d_1.

Jak povědomo, má funkce $f(x, y)$, je-li stupně k-tého, člen obecný

$$Mx^m y^n,$$

při čemž rozměr $m+n$ není větší nežli k, pročež lze funkci $f(x,y)$ označiti součtem

$$\Sigma M x^m y^n$$

a tedy $f(x+\alpha, y+\beta)$ tvarem

$$\Sigma M(x+\alpha)^m(y+\beta)^n.$$

Podlé poučky binomialní jest pak

$$(x+\alpha)^m=x^m+(m)_1 x^{m-1}\alpha+(m)_2 x^{m-2}\alpha^2+S,$$

$$(y+\beta)^n=y^n+(n)_1 y^{n-1}\beta+(n)_2 y^{n-1}\beta^2+S',$$

značí-li S a S' součet členů zbývajících, tudíž

$$f(x+\alpha, y+\beta) = \Sigma M \Big[x^m y^n + \binom{m}{1} x^{m-1} y^n \alpha + \binom{n}{1} x^m y^{n-1} \beta$$
$$+ \binom{m}{2} x^{m-2} y^n \alpha^2 + \binom{m}{1}\binom{n}{1} x^{m-1} y^{n-1} \alpha\beta$$
$$+ \binom{n}{2} x^m y^{n-2} \beta^2 + \varDelta\Big],$$

kdež znamená opět $\varDelta$ součet členů ostatních.

Porovnáme-li tuto řadu s rovnicí (14) §. 1., jest

$$\begin{aligned} h_1 &= \Sigma M \binom{m}{1} x^{m-1} y^n, \\ h_2 &= \Sigma M \binom{n}{1} x^m y^{n-1}, \\ h_3 &= \Sigma M \binom{m}{2} x^{m-2} y^n, \\ h_4 &= \Sigma M \binom{m}{1}\binom{n}{1} x^{m-1} y^{n-1}, \\ h_5 &= \Sigma M \binom{n}{2} x^m y^{n-2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Zavedeme-li nyní $x+\alpha$, $y+\beta$ místo x, y do h_1, h_2, obdržíme

$$\begin{aligned} &\Sigma M \binom{m}{1} (x+\alpha)^{m-1} (y+\beta)^n \\ &= \Sigma M m \,[x^{m-1} + (m-1)\, x^{m-2}\alpha + P]\,[y^n + ny^{n-1}\beta + P'] \\ &= \Sigma M m\, x^{m-1} y^n + \Sigma M m\,(m-1)\, x^{m-2} y^n \alpha \\ &+ \Sigma M m n\, x^{m-1} y^{n-1} \beta + \Sigma M m\, \varDelta', \end{aligned} \tag{11}$$

dále podobně

$$\begin{aligned} &\Sigma M \binom{n}{1} (x+\alpha)^m (y+\beta)^{n-1} \\ &= \Sigma M n\,[x^m + m_1\, x^{m-1}\alpha + Q]\;[y^{n-1} + (n-1)\, y^{n-2}\beta + Q'] \\ &= \Sigma M n\, x^m y^{n-1} + \Sigma M m n\, x^{m-1} y^{n-1} \alpha \\ &+ \Sigma M n\,(n-1)\, x^m y^{n-2} \beta + \Sigma M n\, \varDelta'', \end{aligned} \tag{12}$$

při čemž $\varDelta'$, $\varDelta''$ má podobný význam jako $\varDelta$.

Podlé rovnice (6) plyne z (11)

$$c = \Sigma M m\,(m-1)\, x^{m-2} y^n$$
$$c_1 = \Sigma M m n\, x^{m-1} y^{n-1},$$

a z rovnice (12)

$$d = \Sigma M m n x^{m-1} y^{n-1}$$
$$d_1 = \Sigma M n (n-1) x^m y^{n-2}$$

a konečně dle (10),

$$\begin{aligned} c &= 2h_3, \quad c_1 = h_4, \\ d &= h_4, \quad d_1 = 2h_5. \end{aligned} \tag{13}$$

Položíme-li tyto hodnoty do vzorců (9), zjednáme si

$$\xi = x_1 - \frac{h_1 (h_1^2 + h_2^2)}{2 (h_1^2 h_5 - h_1 h_2 h_4 + h_2^2 h_3)}, \tag{14}$$
$$\eta = y_1 - \frac{h_2 (h_1^2 + h_2^2)}{2 (h_1^2 h_5 - h_1 h_2 h_4 + h_2^2 h_3)};$$
$$R = \pm \frac{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}}{2 (h_1^2 h_5 - h_1 h_2 h_4 + h_2^2 h_3)}, \tag{15}$$

kdež značí ξ, η souřadnice středu a R poloměr křivosti křivky v bodě daném (x_1, y_1).

Chceme-li na př. ustanoviti souřadnice středu a poloměr křivosti parabolické křivky

$$y = x^3 - x^2 - 5x + 4$$

v bodu $(2, -2)$, zaveďme tyto hodnoty souřadnic do výrazů h_i a obdržíme

$$h_1 = 3, \quad h_2 = -1, \quad h_3 = 5, \quad h_4 = h_5 = 0,$$

načež dle vzorců (14), (15) bude

$$\xi = -1, \quad \eta = -1,$$
$$R = \frac{(9+1)^{\frac{3}{2}}}{10} = \sqrt{10}.$$

Pro kuželosečky obdržíme z rovnice

$$2px + qx^2 - y^2 = 0$$

zavedením $x_1 + \alpha$, $y_1 + \beta$ místo x, y

$$2p (x_1 + \alpha) + q (x_1 + \alpha)^2 - (y_1 + \beta)^2 = 0$$

a tedy ihned hodnoty h_i

$$h_1 = 2 (p + qx_1), \quad h_2 = -2y_1 = -2 \sqrt{2px_1 + qx_1^2},$$
$$h_3 = q, \quad h_4 = 0, \quad h_5 = -1,$$

tudíž

$$R = -\frac{1}{p^2}\left\{p^2 + (1+q)(2px_1 + qx_1^2)\right\}^{\frac{3}{2}} \text{*)}$$

a poněvadž délka normály dle vzorce (8) §. 2.,

$$Nr = -\sqrt{p^2 + (1+q)(2px_1 + qx_1^2)}\,,$$

protož

$$R = \frac{Nr^3}{p^2}.$$

Položíme-li $q = 0$, obdržíme pro parabolu apollonickou

$$R = \sqrt{\frac{(p+2x_1)^3}{p}}.$$

Pro křivky algebraické stupně druhého platí rovnice všeobecná

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

položíme-li

$$x = x_1 + \alpha, \quad y = y_1 + \beta,$$

obdržíme rovnici

$$A(x_1+\alpha)^2 + B(y_1+\beta)^2 + 2C(x_1+\alpha)(y_1+\beta) +$$
$$+ 2D(x_1+\alpha) + 2E(y_1+\beta) + F = 0,$$

z kteréž, jak patrno, plyne

$$h_1 = 2(Ax_1 + Cy_1 + D),$$
$$h_2 = 2(By_1 + Cx_1 + E),$$
$$h_3 = A,\ h_4 = 2C,\ h_5 = D,$$

a tudy dle známých vzorců

$$\xi = x_1 - \frac{a(a^2+b^2)}{Ab^2 - 2Cab + Ba^2},$$

$$\eta = y_1 - \frac{b(a^2+b^2)}{Ab^2 - 2Cab + Ba^2},$$

$$R = \frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{Ab^2 - 2Cab + Ba^2},$$

značí-li

$$a = Ax_1 + Cy_1 + D$$
$$b = By_1 + Cx_1 + E.$$

---

*) Souřadnice středu křivosti a poloměr zakřivení *jednotlivých* kuželoseček viz *Jandečka,* Geometrie pro vyšší gymnasia. Díl IV.

Stejný jmenovatel, který se jeví pro ξ, η, R, dá se uvésti v podobu

$$AE^2 + BD^2 - 2CDE - (C^2 - AB) \cdot (Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey)$$

aneb

$$D \begin{vmatrix} B, & C \\ E, & D \end{vmatrix} + E \begin{vmatrix} E, & D \\ C, & A \end{vmatrix} + F \begin{vmatrix} C, & A \\ B, & C \end{vmatrix}$$

$$- (Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F) \begin{vmatrix} C, & A \\ B, & C \end{vmatrix},$$

a poněvadž dle dané rovnice se poslední člen rovná 0, zbývá

$$\begin{vmatrix} D, & C, & A \\ E, & B, & C \\ F, & E, & D \end{vmatrix} = \Delta$$

takže obdržíme konečně

$$\xi = x_1 - \frac{a(a^2 + b^2)}{\Delta},$$

$$\eta = y_1 - \frac{b(a^2 + b^2)}{\Delta},$$

$$R = \frac{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{\Delta}.$$

Z těchto vzorců obdržíme snadným spůsobem hodnoty souřadnic středu a poloměru křivosti pro tvar známé rovnice kuželoseček

$$2px + qx^2 - y^2 = 0.$$

Pro cissoidu §. 2., kteráž jest průmětnicí paraboly, obdržíme, značí-li $p = 2r$,

$$R = \frac{r(8r - 3x_1)^{\frac{3}{2}} x_1^{\frac{1}{2}}}{3(2r - x_1)}.$$

Dle hodnoty pro pořadnici středu křivosti

$$\eta = \frac{4}{3} \frac{2ry_1}{x_1}$$

lze snadným spůsobem ustanoviti střed křivosti, dán-li jest směr normály.

§. 4.

Zvláštní body, vrcholy a body obratu jsme již vyšetřili; mimo tyto objevují se však častokráte ještě jiné body zvláštní, jak na počátku §. 1. bylo vytčeno, o nichž tuto vyložíme, jak je z rovnice křivky lze ustanoviti.

Z rovnice (17) §. 1. obdržíme řešením

$$a = \frac{-h_4 \pm \sqrt{h_4^2 - 4h_3 h_5}}{2h_5}; \tag{1}$$

poněvadž tu výraz pod znamením odmocnění, totiž

$$h_4^2 - 4h_3 h_5 = -\begin{vmatrix} 2h_3 & h_4 \\ h_4 & 2h_5 \end{vmatrix} = -S \tag{2}$$

může býti buď positivní neb negativní aneb 0, tedy též

$$S \lesseqgtr 0,$$

bude pro $S > 0$ bod (x_1, y_1) *osamělým*, pro $S = 0$ pak *úvratníkem* neb *návratníkem* a pro $S < 0$ konečně bodem *zdvojeným*.*)

Dána-li rovnice křivky

$$y = x \pm \sqrt{x^3}$$

aneb v tvaru nerozvinutém

$$(y - x)^2 - x^3 = 0,$$

obdržíme zavedením

$$x = x_1 + \alpha, \quad y = y_1 + \beta$$

pro h_i

$$h_1 = -2y_1 + 2x_1 - 3x_1^2, \quad h_2 = 2y_1 - 2x_1,$$
$$h_3 = 1 - 3x_1, \quad h_4 = -2, \quad h_5 = 1.$$

Řešením rovnic

$$h_1 = 0, \quad h_2 = 0,$$

obdržíme hodnoty vyhovující i rovnici křivky $x_1 = 0, \quad y_1 = 0$.

Těmito hodnotami stane se

$$S = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

t. j. bod (0, 0) jest buď návratníkem aneb úvratníkem.

*) Viz dr. Studnička, „O determinantech“, pag. 61.

Poněvadž pro $x_1 = 0 - k$ obdrží y_1 hodnotu laterálnou, jest bod ten *mezním* a poněvadž souřadnice $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ činí $S = 0$, jest tedy

$$a = -\frac{h_4}{2h_5} = 1,$$

a mimo to

$$\int^0 (h_3 h_1^2 - h_4 h_2 h_1 + h_5 h_1^2) = 0,$$

tedy jest tento bod *úvratníkem* dané křivky (zároveň počátkem soustavy rovnoběžné) a proto leží tečna mezi ramenami křivky a poněvadž $a = 1$, uzavírá tato společná tečna úhel $\frac{\pi}{4}$ s osou úseček.

Chceme-li na př. ustanoviti zvláštní body křivky

$$f(x, y) = y^2 - x(x + m)^2 = 0,$$

obdržíme z rovnic

$$h_1 = -3x_1^2 - 4mx_1 - m^2 = 0$$
$$h_2 = 2y_1 = 0$$

hodnoty

$$x_1 = -m, \quad y_1 = 0,$$

kteréž vyhovují rovnici křivky.

Poněvadž ale

$$h_3 = -2m, \quad h_4 = 0, \quad h_5 = 1,$$

stane se za vyhovující souřadnice $(-m, 0)$

$$S = \begin{vmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4m,$$

tedy dle rovnice (1)

$$a = \pm\sqrt{-m},$$

za kteroužto příčinou jest bod $(-m, 0)$ *osamělým* neb *isolovaným* (přidružený, conjugovaný).

Poznámka.

Poněvadž dle §. 3. lze položiti

$$f(x, y) = \Sigma M x^m y^n,$$

obdržíme differencováním funkce f následující částečné differenciálné poměry

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \Sigma\, M m x^{m-1} y^n \\
f_2 &= \Sigma\, M n\, x^m\, y^{n-1} \\
f_{11} &= \Sigma\, M m\, (m-1)\, x^{m-2}\, y^n \\
f_{12} &= \Sigma\, M m n\, x^{m-1}\, y^{n-1} \\
f_{22} &= \Sigma\, M n\, (n-1)\, x^m\, y^{n-1},
\end{aligned}
$$

a tedy značí

$$
h_1 = f_1, \quad h_2 = f_2, \quad h_3 = \frac{1}{2} f_{11}, \quad h_4 = f_{12}, \quad h_5 = \frac{1}{2} f_{22}.
$$

Dle toho má vzorec (15) §. 1. tvar

$$
a = -\frac{f_1}{f_2}
$$

a vzorce (13), (14), §. 3.,

$$
\begin{aligned}
\xi &= x_1 - \frac{f_1\,(f_1^{\,2} + f_2^{\,2})}{f_{11} f_2^{\,2} - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^{\,2}} \\
\eta &= y_1 - \frac{f_2\,(f_1^{\,2} + f_2^{\,2})}{f_{11} f_2^{\,2} - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^{\,2}} \\
R &= \frac{\pm (f_1^{\,2} + f_2^{\,2})^{\frac{3}{2}}}{f_{11} f_2^{\,2} - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^{\,2}}.
\end{aligned}
$$

Nazveme-li jmenovatele těchto tří vzorců Δ, jest

$$
\Delta = - \begin{vmatrix} 0, & f_1, & f_2 \\ f_1, & f_{11}, & f_{12} \\ f_2, & f_{12}, & f_{12} \end{vmatrix}
$$

a je-li tedy ve zvláštním případě

$$
\Delta = 0
$$

čili
$$
f_{11} f_2^{\,2} - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^{\,2} = 0,
$$

obdržíme tvar vzorce (18) §. 1.

Je-li tudíž $\Delta = 0$, jest $R = \infty$, tedy střed křivosti jest bodem úběžným daným normalou k tečně bodu obratu, značí-li tato tečna kružnici, jsouc s křivkou v souvislosti oskulační.

V §. 4. značí S determinant *Hesse-ův* *)

$$
H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix}.
$$

---

*) Viz *Studnička* „O determinantech“ pag. 56.