Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Vilém Pexider

Znázornění čísel délkami a naopak. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 1, 12--19

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123664

$$G_1(x) = B_1 (2x+1)^m [(2x+1)^2 - 1^2]^m [(2x+1)^2 - 2^2]^{m-1} \\ . [(2x+1) - 3^2]^{m-1} \dots \\ . [(2x+1)^2 - (2m-2)^2]^1 [(2x+1)^2 - (2m-1)^2]^1,$$

$$B_1 = 2^m m! \frac{[1!\, 3!\, 5! \dots (2m-1)!]^4}{2!\, 4!\, 6! \dots \quad 4m!}.$$

Srovnáme-li ve výsledku pro $G_1(x)$ právě napsaném koefficient x^m po obou stranách, dostaneme tento zajímavý vztah pro čísla Bernoulliská:

$$\begin{vmatrix} B_1, & B_2, & B_3, & \dots, & B_m \\ B_2, & B_3, & B_4, & \dots, & B_{m+1} \\ B_3, & B_4, & B_5, & \dots, & B_{m+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_m, & B_{m+1}, & B_{m+2}, & \dots, & B_{2m-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{2^{2k}(k!)^3(2k)!} \cdot \frac{[2!\, 4!\, 6! \dots (2k!)]^6}{2!\, 4! \dots (4k)!}.$$

Znázornění čísel délkami a naopak.

Napsal

Dr. Jan Vilém Pexider v Praze.

Předměty a jich vzájemné vztahy, jimiž se mathematika zabývá, definovány jsou jednoduchými zásadami, jež tím způsobem, axiomatickým, předměty ty pro mathematika v život uvádějí. Zásady takové možno jest vytknouti si zcela libovolně. Mathematik však zvolí je tak, aby sobě neodporovaly; neboť jinak nebylo by lze vyvoditi z nich důsledků logicky platných, a systém předmětů tak definovaných pro mathematika by neexistoval. Z toho důvodu jest prvou podmínkou soustavy axiomů, s nimiž mathematika vůbec může počítati, aby sobě vzájemně neodporovaly. (Věc, chce-li se, samozřejmá.)

Věda vzniknouti může tam, kde dostatečný počet dat, faktů, tedy mnoho materiálu jest známo; ona počíná však teprve uspořádáním materiálu, a pořádání to děje se přirozeně methodou axiomatickou, jež právě pro jednoduchost axiomů sama jest jednoduchou. Počátek jest ten, že se vytkne logická soustava pojmů a sice tím způsobem, aby vztahům mezi vytčenými pojmy odpovídaly též vztahy mezi fakty, jež mají býti uspořádány. V konkrétním případě není zásadou touto vytčena již jen jediná možnost ve volbě určitých pojmů a určitých vazeb; naopak, ve věci leží ještě mnoho libovolnosti. Při stanovení soustavy axiomů žádá však mathematik (z důvodů oekonomie v myšlení), aby systém ten byl úplný, aby jednotlivé zásady na sobě byly nezávislé a aby si, jak již bylo podotčeno, neodporovaly vzájemně. Z takového systému plynou pak pomocí konečného počtu logických závěrů jako důsledky všecka fakta (a data), všechen materiál, jenž měl býti uspořádán a v teorii uveden.

Tímto způsobem stanoven byl a obecně znám jest systém axiomů, na nichž zbudována jest, a sice zúplna, nauka o číslech; tím způsobem podařilo se v novější době ovládnouti i nejjednodušší a nejdokonalejší z přírodních věd, geometrii.

Úplný systém axiomů geometrických podán byl prof. *Hilbertem* v jeho „*Grundlagen der Geometrie*“ (Lipsko 1899). [Dle spisku toho uveřejněny byly axiomy geometrie v 2. čísle Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky (roč. 32., str. 147—156) v referátě p. prof. *A. Libického**)]. Soustava Hilbertova byla však od té doby v některých svých částech podstatně změněna. Podařilo se totiž ukázati, že axiom II 4 jest důsledkem axiomů I 1, 2, 7 a II 1, 2, 3 a naopak, že existuje geometrie, v níž axiomy I 1, 2, 7 a II 1, 2, 4 jsou v platnosti, není jím však axiom II 3. Z toho plyne, že zásada II 4 není axiomem, a byla prof. Hilbertem ze soustavy škrtnuta. Skupina II obsahuje tudíž správně pouze tři lineárné axiomy II 1, 2, 3 a jeden rovinný, [jenž v referátu vyznačen jest pod II 5*)]. Skupina III z důležitých příčin postavena byla za skupinu IV, takže soustava Hilbertova obsahuje nyní na třetím místě skupinu axiomů shodnosti (III 1, 2, 3, 4, 5, 6), na čtvrtém Euklidův axiom (skupina IV). Skupina V byla rozšířena a obsahuje tři na sobě nezávislé axiomy: axiom Archimedův, axiom sousednosti, axiom úplnosti.

Vzhledem k těmto změnám budiž zde soustava Hilbertova v novém znění (platná pro geometrii v rovině) uvedena.

---

*) **Vložka ze dne 2. května 1903.**

Soustava axiomů geometrických.

I. Axiomy spojování.

1. Dva různé body určují vždy přímku.

2. Přímka jest určena kterýmikoliv dvěma různými body svými.

3. Na každé přímce leží nejméně dva body a v každé rovině existují nejméně tři body, jež neleží na přímce.

II. Axiomy přiřaďování.

1. Leží-li ze tří bodů A, B, C nějaké přímky bod B mezi A a C, leží též mezi C a A.

2. Jsou-li A a B dva různé body přímky, leží na ní aspoň jediný bod C mezi A a B a aspoň jediný bod D tak, že jest C mezi A a D.

3. Ze tří libovolných bodů nějaké přímky leží vždy jen jediný mezi oběma ostatními.

4. Buďtež A, B, C tři body, neležící na přímce, a v rovině ABC přímka a, jež neprochází žádným z bodů A, B, C; prochází-li pak přímka a některým bodem, ležícím uvnitř úsečky AB, jde dojista též buď bodem úsečky BC neb úsečky AC.

III. Axiomy shodnosti.

1. Leží-li body A, B na přímce a a na ní neb na jiné přímce a' bod A', pak lze na jedné z obou stran té přímky (a neb a') nalézti vždy jen jediný bod B' tak, že úsečka AB (neb BA) jest shodna s úsečkou $A'B'$ (označení: $AB \equiv A'B'$ neb $BA \equiv A'B'$).

2. Je-li úsečka AB shodna s úsečkou $A'B'$ i s úsečkou $A''B''$, jest též $A'B'$ shodna s úsečkou $A''B''$.

3. Jsou-li AB a BC dvě úsečky přímky a, jež nemají společných bodů kromě B, $A'B'$ a $B'C'$ úsečky téže neb jiné přímky a', jež rovněž nemají společných bodů kromě B', a je-li $AB \equiv A'B'$ a $BC \equiv B'C'$, jest též $AC \equiv A'C'$.

4. Buďtež dány: úhel (h, k), přímka a' a určitá strana její, a značiž h' polopaprsek přímky a', jenž vychází z bodu

O'; pak existuje jen jediný polopaprsek k', vycházející z O', toho druhu, že úhel (h, k) jest shodný s úhlem (h', k') neb s úhlem (k', h') a že zároveň všechny vnitřní body úhlu (h', k') leží na oné určité dané straně přímky a'.

5. Je-li úhel (h, k) shodný s úhlem (h', k') i s úhlem (h'', k''), jest též úhel (h', k') shodný s úhlem (h'', k'').

6. Jsou-li pro dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ v platnosti shodnosti $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$, tu jest též $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$ a $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$.

IV. Axiom o rovnoběžkách.

Bodem A, položeným mimo přímku a, vésti lze jen jedinou přímku takovou, že neseče přímky a (*axiom Euklidův*).

V. Axiomy spojitosti.

1. Budiž A_1 libovolný bod přímky, položený mezi dvěma body A a B téže přímky; sestrojí-li se body A_2, A_3, A_4, ... tak, že A_1 jest mezi A a A_2, A_2 mezi A_1 a A_3, A_3 mezi A_2 a A_4, atd. a že úsečky AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... jsou si rovny, existuje v řadě bodů A_2, A_3, A_4, ... vždy bod A_n takový, že jest B mezi A a A_n (*axiom Archimedův*).

2. Dána-li libovolná úsečka AB, existuje vždy trojúhelník (neb čtyřúhelník atd.), do něhož nelze vpraviti úsečku stejné délky (*axiom sousednosti*).

3. Prvky geometrie tvoří soustavu předmětů, jež při zachování platnosti všech axiomů I—V není schopna žádného rozšíření, čili: Není možno k soustavě bodů a přímek připojiti jiné prvky takové, aby byly i v této obecnější geometrii splněny všechny axiomy I—V (*axiom úplnosti*).

Čtenář, obeznámený s Cantorovou teorií množství, všimne si, že axiom V 3 determinuje mohutnost systému prvků geometrických. Axiom tento neplatí pro geometrii nearchimedickou, axiomy I—IV a axiom sousedství (V 2) budují geometrii nepythagorejskou. Zásady I—IV a V 1 platí pro geometrii Euklidovu; *na nich jest celá geometrie tato zúplna zbudována.*

Na základě axiomů I—IV a axiomu Archimedova — tedy *v geometrii Euklidově* — lze ukázati, že každou úsečku měřiti lze nějakým reálným číslem; nelze však dokázati, a na to *G. Cantor* r. 1872*) prvý poukázal, že by i každému číslu odpovídati musela určitá délka. Obapolně jednoznačná korrespondence mezi čísly a body přímky přijímala se mathematiky i geometry po dlouhou dobu jako něco samozřejmého (hlavně v analytické geometrii). Teprve hluboké úvahy o nekonečných množstvích různých druhů přiměly Cantora, uvědomiti si jasně tuto „samozřejmost“, jež při podrobnějším zkoumání přestala býti samozřejmostí a probrati kriticky „důkazy“, o něž tu i tam obecně za správnou přijímaná věta ta byla opřena. Důkazy ukázaly se logicky nepřípustné, a to mělo ovšem za následek, že od let sedmdesátých mathematikové — až na nějakou tu výjimku — místo „důkazu“ větu onu vyslovovali a vyslovují jako axiom [*Centrales Axiom* u *F. Kleina***)], poukazujíce na její *nedokazatelnost*; tak to činíval i *Weierstrass* ve svých přednáškách. Teprve v nejnovější době ukázal prof. *Hilbert****), že jest možno takovou soustavu axiomů geometrických stanoviti, že z ní obecně platná geometrie Euklidova vybudována býti může, a to v celém svém rozsahu, a že lze krom toho, vedle jiných nových věcí, na základě této soustavy problém znázornění čísel délkami a měření délek čísly řešiti uspokojivě a v duchu tradičního požadavku, totiž požadavku oboustranně jednoznačné korrespondence mezi čísly a délkami.

Prof. Hilbert naznačil řešení problému toho ve svých přednáškách o *„Základech geometrie“* v r. 1902. Na základě těchto budiž v následujících řádcích podán výklad a řešení zmíněného problému.

1. *Uvedení čísel do geometrie.*

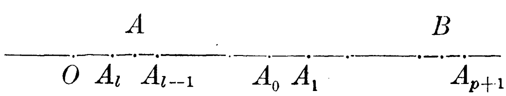
Dána buď libovolná přímka, a na ní buďtež dva body označeny čísly 0 a 1. Půlí-li se tato konečná úsečka 01 a rovněž každá následující, půlením oním vzniklá, a nanesou-li

*) Cantor, *G.* [1].
**) Klein, *F.* [5].
***) Hilbert, *D.* [4].

se všechny tyto úsečky za sebou od bodu 0 jakožto počátku na danou přímku, vzniknou body, jež nutno označiti čísly $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots 2, 3, \ldots \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \ldots,$ t. j. obecně body s čísly tvaru $\frac{\alpha}{2^n}$, kdež α i n značí libovolná celistvá reálná čísla kladná.

1. Věta. *Pro dostatečně veliké n obdrží se uvnitř každé sebe menší úsečky body, jichž vzdálenosti od počátku 0 měřeny jsou čísly $\frac{\alpha}{2^n}$.*

Důkaz. Buď A_0A_1 úsečka, o níž se tvrdí, že neobsahuje žádné body, jimž by odpovídala čísla tvaru $\frac{\alpha}{2^n}$. Nanesme na obě strany úsečky té na přímku a délku A_0A_1 tolikrát, až překročí se body přímky, jichž vzdálenost od počátku 0 měří čísla tvaru $\frac{\alpha}{2^n}$. Dle axiomu V 1 lze toho dosíci *konečným* počtem operací. Body ony vyznačeny buďtež literami A a B, a počet na levo nanesených dílců



A_0A_1 budiž l, na pravo nanesených p. Mezi body A a B leží tedy zúplna neb částečně nejméně tři dílce, vždy však jest počet jich — jak již uvedeno — *konečný*. Půlíme-li nyní úsečku AB, tu nemůže půlící bod zapadnouti do prvého dílce A_lA_{l-1}, neboť by pak pravá polovina musela býti větší nežli nejméně jedna délka, levá polovina však menší nežli tatáž délka. Půlící bod (C) může tudíž zapadnouti jedině do takové z nanesených délek, v nichž body A a B (neboť tatáž úvaha platí i pro druhý kraj) neleží. Půlíme-li nyní úsečky AC a CB a tento proces opětujeme posloupně na každou nově vzniklou délku, prostou čísel $\frac{\alpha}{2}$, vpravíme pokaždé jeden bod, očíslovaný číslem tvaru $\frac{\alpha}{2^n}$, do nanesených dílců $A_{l-1}A_{l-2}$, $A_{l-2}A_{l-3}$, ..., v nichž z počátku ještě žádný bod toho druhu neležel. Počet těchto jest konečný a každým půlením dle vytčeného postupu zmenšuje se, jak bylo ukázáno, o jedničku. Opětujeme-li proces půlení vícekráte, nežli jest dílců v úsečce AB, vytkneme dojista v každém dílci A_kA_{k+1} aspoň jediný bod s číslem tvaru $\frac{\alpha}{2^n}$, a tudíž i v úsečce A_0A_1, q. e. d. Neexistuje tedy žádná, sebe menší konečná úsečka, jež by neobsahovala body $\frac{\alpha}{2^n}$, čili na přímce není mezery, v níž by nebylo bodů očíslovaných konečnými duálnými zlomky. Body $\frac{\alpha}{2^n}$ leží na přímce a „všude hustě", *pantachicky*.

2. *Každou délku měřiti lze číslem reálným.*

Na přímku nanesena budiž od jistého bodu 0 co počátku délka, jejíž míra má býti vyjádřena číslem. Konečný bod této délky dělí přímku, na níž leží všude hustě body s čísly $\frac{\alpha}{2^n}$, na dvě části a dělí tudíž všecky duálné zlomky (konečné) na dvě kategorie takové, že každé číslo prvé z nich menší jest nežli každé číslo druhé a že každé číslo druhé z nich jest větší nežli každé číslo prvé kategorie, čili na čísla menší, nežli *by bylo* číslo, odpovídající onomu konečnému bodu, nebo jemu nejvýše rovné a na čísla větší.

Tím vytčen jest mezi čísly $\frac{\alpha}{2^n}$ řez — ležíť $\frac{\alpha}{2^n}$ na přímce pantachicky — t. j. zde skutečně definováno jest reálné číslo (po způsobu Dedekindově*), obecně známém). Je-li v prvé kategorii jedno z čísel největší resp. v druhé nejmenší, jest řezem tím vytčeno číslo racionálné, vyjádřené konečným duálným zlomkem. Nelze-li v prvé třídě vytknouti žádné číslo tvaru $\frac{\alpha}{2^n}$ jako největší a v druhé žádné jako nejmenší, definuje řez ten číslo buď racionálné neb irracionálné, vyjádřené *nekonečným* zlomkem duálným.

*) Dedekind [1].

Nechť tedy nastane případ prvý nebo druhý, konečný bod délky pokaždé definuje určité číslo, t. j. —

2. Věta. *Každou délku změřiti lze reálným číslem.*

(Pokračování.)

O hmotě.

Glossy k středoškolské fysice.

Napsal

Josef Krkoška,

gymn. professor v Pelhřimově.

1. Uveřejňuje tyto úvahy vzpomínám vděčně slovutného pisatele „Gloss k učební látce fysiky na středních školách“ ve XX. ročníku tohoto časopisu, zemřelého prof. dra A. Seydlera. Měl jsem příležitost býti členem seminárního konversatoria, z něhož ony Glossy vzešly, a vážím si jich z té příčiny v míře tím větší. Ovšem tehdy chápali jsme vývody prof. Seydlera pouze jako vědeckou kritiku, kteréž on dodával obzvláštní poutavosti svým rozhledem odborným, jakož i svým hluboce založeným stanoviskem noetickým; jejich celý význam a hodnota mohly nám vysvitnouti teprv v povolání učitelském, jemuž vlastně byly určeny. Bohužel neúprosná smrt zasáhla prof. Seydlera, sotva že počal svoje Glossy uveřejňovati, a zmařila tak práci, jež by byla u nás velmi přispěla k prohloubení a protříbení fysikální látky středoškolské.

Není pochybnosti, že středoškolská fysika takových prací potřebuje a bude vždy potřebovati. Neběží pouze o to, aby nové výzkumy a pokroky vědy byly středoškolskému vyučování vhodným způsobem přivtěleny, ale jest vůbec i málo objevů starších, jejichž jistá úprava, jak o sobě, tak u vztahu k ostatním mohla by býti považována za definitivní, takže by nepřipouštěla již spracování dokonalejšího a pro školu vhodnějšího. Ostatně ani fysika středoškolská nemůže se vyhnouti pojmům, jež postrádají žádoucné ustálenosti a potřebují, aby dále byly tříbeny. Sem náleží na předním místě pojem hmoty.