Dodatek.

Parametr řezu parabolického určíme z rovnice

$$2p = \frac{\overline{b_1 n}^2}{\overline{an}}$$

a ježto

$$\overline{an} = \frac{\overline{a_1 n}}{\cos \alpha},$$

jest

$$2p = \frac{4\,m\,(r - m\cos\alpha)\cos^2\alpha}{r - m\cos\alpha} = 4m\cos^2\alpha,$$

čili

$$p = 2m\cos^2\alpha$$

a pro kužel rovnostranný

$$p = \frac{m}{2}.$$

Prochází-li rovina středem základny, jest při kuželi rovnostranném

$$p = \frac{r}{2}.$$

Je-li

$$\alpha = \begin{Bmatrix} 45^0 \\ 30^0 \end{Bmatrix},$$

jest

$$p = \begin{Bmatrix} m \\ \dfrac{3m}{2} \end{Bmatrix}.$$

Příspěvek ku rotačním plochám 2ho stupně.

Napsal

Václav Havlíček,

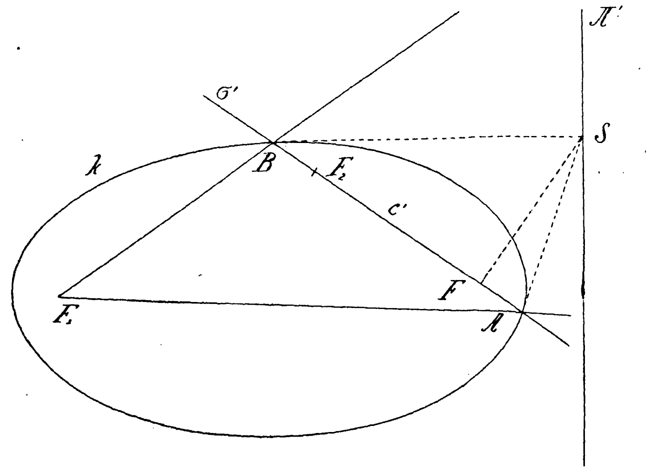
professor české státní průmyslové školy v Plzni.

I. Otáčí-li se kuželosečka k o ohniskách F a F_1 kol své hlavní osy, vytvoří rotační plochu stupně druhého. Libovolná rovina seče ji v kuželosečce, jež se promítá z některého ohniska rotační plochou kuželovou.

Nechť rovina průsečná prochází ohniskem F; mimo to možno předpokládati, že rovina σ jest kolmá ku rovině meridianu k. Značí-li c průsečnou křivku, vyšetřme její ohniska (obr. 1.).

Je-li rovina meridianu k průmětnou, jest průmětem roviny σ přímka σ', protínající kuželosečku k v bodech A, B a procházející ohniskem F; $\overline{AB}$ jest pak průmětem křivky c.

Promítneme-li křivku c z ohniska F_1, jest tato plocha rotačním kuželem a koule vepsané jí a rovině σ, dotýkají se této v ohniskách.



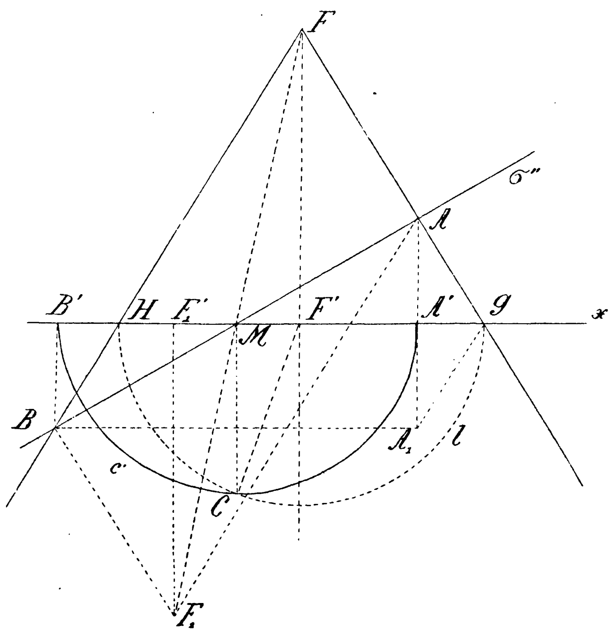
Obr. 1.

Vedeme-li tudíž v bodech A, B tečny, protínají se tyto v bodě S, jenž jest středem jedné koule vepsané. Poněvadž přímka σ' prochází ohniskem, jest její pol S na přímce řídící π' a tudíž $SF \perp AB$. Z toho patrno, že bod F jest též ohniskem křivky c.

Druhé její ohnisko F_2 obdržíme, učiníme-li $\overline{AF} = \overline{F_2B}$. Z toho vysvítá, že každá rovina procházející ohniskem seče plochu v křivce, jejíž jedno ohnisko jest tamtéž. Geometrickým místem ohniska druhého jest opět rotační plocha 2ho stupně, podobná a podobně položená dle středu s danou a procházející oběma ohnisky.

Jest patrno, je-li plocha rotačním paraboloidem, že i ona plocha geometrického místa bude opět rotační paraboloid s ním shodný, avšak ve směru osy pošinutý. Z toho patrno, že rovina rovnoběžná s osou seče jej v parabole shodné s meridianem.

II. Stanoviti ohniska kuželosečky vzniklé průsečí roviny s rotačním kuželem jest známá věc; neméně zajímavé jest sta-



Obr. 2.

noviti ohniska průmětu této křivky na rovině kolmé k ose kužele při promítání orthogonalném.

a) Budiž průsečná křivka ellipsou (obr. 2.); rovina σ seče rotační kužel o středu F v ellipse c, jež promítá se na průmětnu kolmou ku σ a procházející vrcholem F co úsečka $\overline{AB} \equiv c''$. Středem M úsečky $\overline{AB}$ položme průmětnu půdorysnou kolmou ku ose kužele; průsečnice obou průměten buď x, jež seče obě povrchové přímky FA, FB v bodech G, H.

Patrno, že $\overline{AB}$ jest hlavní osa, M střed ellipsy c; vedlejší osu $\overline{CD}$ obdržíme jakožto tetivu jdoucí středem M kolmo ku ose x v kružnici l, v níž seče půdorysna kužel. Půdorysné průměty A', B' bodů A, B jsou patrně hlavní vrcholy ellipsy c', a C, D její vedlejší. Značí-li A_1 souměrně položený bod bodu A dle přímky x, jest

$$\sphericalangle A_1GA' = \sphericalangle AGA' = BHB',$$

a proto $A_1G \parallel BH$. Avšak

$$\overline{BB'} = \overline{A'A} = \overline{A_1A'},$$

a tedy také

$$\overline{A_1G} = \overline{BH}.$$

Z rovnoběžníka $BHGA_1$ vyplývá, že

$$\overline{HG} = \overline{BA_1} = \overline{B'A'}$$

a tedy také

$$\overline{F'G} = \overline{F'C} = \overline{MA'},$$

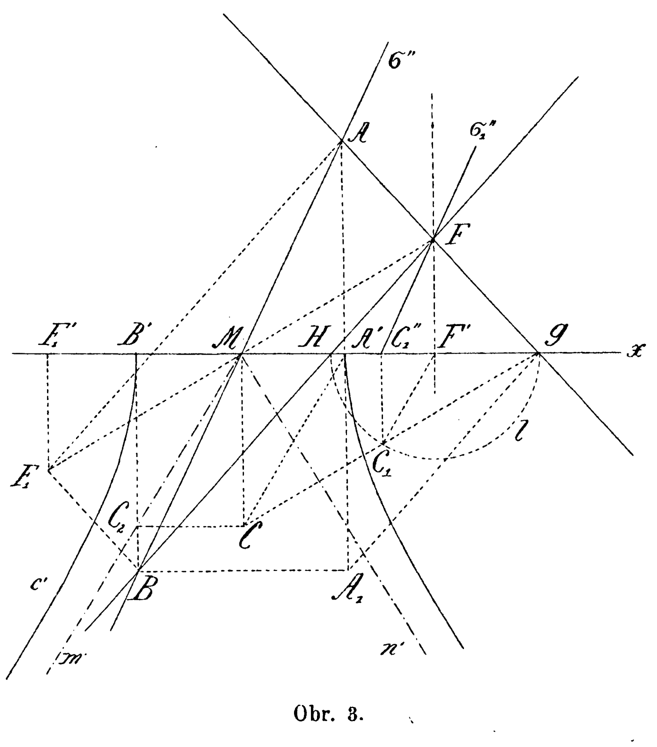
kdež F' značí půdorysný průmět vrcholu F a zároveň střed kružnice l.

Poněvadž $\overline{MA'} = \overline{CF'}$, jest bod F' ohniskem ellipsy c'; druhé její ohnisko obdržíme, učiníme-li bod F_1 souměrný bodu F dle středu M a tento promítneme do osy x.

Výsledek z toho plynoucí jest tento: ohnisko průmětu ellipsy ležící na rotačním kuželi ve směru osy na rovinu k této kolmou jest na ose.

Poněvadž FAF_1B jest rovnoběžníkem, možno pokládati FF_1 za ohniska ellipsy k procházející body AB; tečny této ellipsy v bodech AB jsou přímky $AA' \parallel BB'$, poněvadž půlí vnější úhel průvodičů. Otočíme-li ellipsu k kol přímky FF_1, vznikne rotační ellipsoid, jejž seče rovina σ nutně v ellipse c, neboť, kdyby průseč ta byla jiná ellipsa c_1, pak by se promítala z ohniska F rotačním kuželem, který však má s daným společnou osu i dvě povrchové přímky FA, FB, tedy jest s ním totožný a tudíž $c_1 \equiv c$. Poněvadž rovina σ jde středem ellipsoidu, a přímky $AA' \parallel BB'$ jsou tečny ellipsy k, jest c skutečný obrys plochy a c' obrys na půdorysně. Tím dospěli jsme ku známé větě: Orthogonalné průměty ohnisek rotačního ellipsoidu jsou ohniska obrysu.

b) Rovina σ nechť protíná kužel v hyperbole (obr. 3.). Podržíme-li opět totéž označení jako dříve, budou AB vrcholy hlavní, M střed hyperboly c, půdorysné průměty $A'B'$ hlavní vrcholy, M střed hyperboly c'. Abychom stanovili asymptoty



Obr. 3.

hyperboly c, veďme bodem F rovinu $\sigma_1 \parallel \sigma$, jež seče kružnici l v bodech $C_1 D_1$, načež FC_1, FD_1 jsou směry asymptot hyperboly c, $F'C_1$, $F'D_1$ směry asymptot hyperboly c'. Jsou-li tedy m, n asymptoty hyperboly c, m', n' hyperboly c', budou přímky $m' \parallel F'C_1$; $n' \parallel F'D_1$ středem M vedené asymptoty hyperboly c'.

Přímka m' nechť seče spojnici BB' v bodě C_2; učiníme-li $MC \perp x$, $A'C \| m'$, bude $\triangle MBB' \sim \triangle A'CM$. Značí-li nyní C''_1 nárys bodu C_1, jsou patrně trojúhelníky MAA', C''_1FF' podobně položeny dle středu G, a tudíž i úsečky $\overline{CA'}$ a $\overline{C_1F'}$; poněvadž však $\overline{C_1F'} = \overline{F'G}$, jest též $\overline{CA'} = \overline{A'G}$. Je-li opět A_1 bod souměrný s bodem A dle osy x, jest z důvodů dřívějších

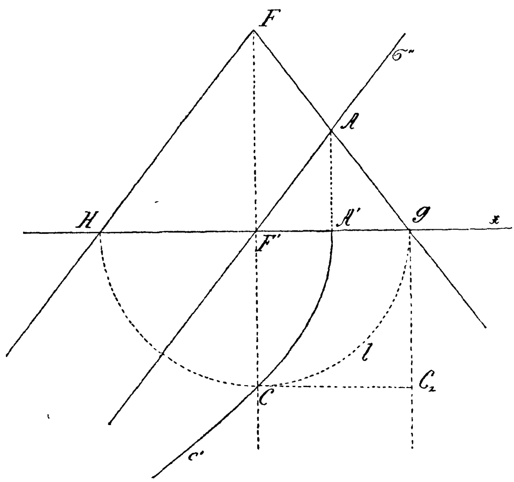
$$\overline{HG} = \overline{BA_1} = \overline{B'A'},$$

a tudíž i

$$\overline{F'G} = \overline{MA'},$$

a proto též

$$\overline{MF'} = \overline{A'G} = \overline{MC_2} = \overline{MF'_1}.$$



Obr. 4.

Z toho patrno, že průměty bodů F a F_1 jsou i zde ohnisky hyperboly a věta vyjádřená o ellipse platí též pro hyperbolu.

Poněvadž možno považovati body F a F_1 za ohniska hyperboly jdoucí body AB, obdržíme pro rotační hyperboloid dvojplochý tutéž větu jako pro ellipsoid.

c) Seče-li rovina σ kužel v parabole c (obr. 4.), položme průsečíkem osy kužele s rovinou σ půdorysnu a nárysnu opět osou kužele kolmo ku rovině σ, jež seče kužel v přímkách FH, FG; přímka $\sigma'' \| FH$ seče přímku FG v bodě A, jenž jest vrcholem paraboly c, a půdorysný průmět A' bude vrcholem paraboly c'. Půdorysna seče kužel v kružnici l, v níž koncové body C, D průměru středem F' kolmo ku průměru GH jdoucího, udávají dva body paraboly c. Vedeme-li bodem G přímku GC_1 kolmou ku nárysně, bude patrně vzdálenost CC_1 bodu C od přímky GC_1 rovna $\overline{CF'}$, a poněvadž $\overline{FA} = \overline{AG}$, jest bod F' ohniskem a přímka GC_1 přímkou řídící paraboly c'. Poněvadž přímka AA' půlí úhel $F'AG$, možno považovati přímku FH za osu paraboly k, jejíž ohnisko jest bod F a jež se dotýká v bodě A přímky AA'. Možno tudíž věty dříve dokázané všeobecně takto vysloviti: Sečeme-li rotační kužel v kuželosečce a promítneme-li tuto orthogonalně ve směru osy, jest jedno ohnisko tohoto průmětu v průmětu vrcholu. Ohniska obrysu plochy vzniklé rotací kuželosečky kol hlavní osy, jsou v orthogonalných průmětech ohnisek dané kuželosečky.

Věta druhá nalézá se odvozena p. prof. K. Pelzem v Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wiss. in Wien, v článku: „Ergänzungen zur allgemeinen Bestimmungsart der Brennpunkte von Contouren der Flächen zweiten Grades“ svazek 77, II. oddíl, r. 1878, pag. 259.

Položíme-li tedy průmětnu kolmo ku ose rotačního kužele, a promítáme do ní všecky kuželosečky na kuželi se nacházející orthogonalně, budou míti všecky průměty společné ohnisko; věc se dá snadně nyní tak zaříditi, že i druhá ohniska splývají čili že kuželosečky jsou konfokalné. A tu lehko nalezneme, že geometrické místo rovin, jež protínají kužel v křivkách, jichž průměty jsou konfokalné, jest parabolická plocha válcová, dotýkající se daného kužele ve dvou bodech a mající směr kolmý ku nárysně.