N. Saltykow

Intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 168--169

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123642

Le résultat obtenu peut être envisagé comme évident a priori, si l'on prend en considération que la méthode de Legendre offre les conclusions identiques à celle de Monge-Ampère pour les équations de la forme étudiée (1).

Intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre.

N. Saltykow, Belgrade.

Considérons l'équation à désignations usuelles:

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{si}p_{si} + 2\sum_{s=1}^{n} D_s p_s + Fz + G = 0,\ A_{is} \equiv A_{si}, \tag{1}$$

que l'on va écrire de la manière suivante:

$$\sum_{s=1}^{n} K_s \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\sum_{i=1}^{n} L_i p_i + Mz\right) + N\left(\sum_{i=1}^{n} L_i p_i + Mz\right) + G = \mu z, \tag{2}$$

$$K_1 \equiv 1,\ L_1 \equiv A_{11} \gtrless 0.$$

Le groupement des termes de l'équation (1) est possible sous la forme (2), les coefficients de l'équation (1) étant constants, si l'on a

$$\Delta_{is} \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{i1} & A_{s1} \\ A_{i1} & A_{ii} & A_{si} \\ A_{s1} & A_{is} & A_{ss} \end{vmatrix} \equiv 0, \quad (i, s = 2, 3, \ldots, r), \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta_2}{R_2^2} = \dfrac{\Delta_r}{R_r^2}, \\ (r = 3, 4, \ldots, n) \end{cases} \qquad \Delta_s \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{s1} & D_1 \\ A_{1s} & A_{ss} & D_s \\ D_1 & D_s & F \end{vmatrix}, \quad (s = 2, 3, \ldots, n). \tag{4}$$

Les coefficients de l'équation (2) deviennent, alors:

$$\begin{cases} L_s = A_{s1} \pm R_s,\ A_{11}K_s = A_{s1} \mp R_s,\ R_s \equiv \sqrt{A_{s1}^2 - A_{11}A_{ss}} \lesseqgtr 0, \\ (s = 2, 3, \ldots, n), \end{cases} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} M = \frac{A_{21}D_1 - A_{11}D_2}{\pm R_2} + D_1,\ A_{11}N = \frac{A_{11}D_2 - A_{21}D_1}{\pm R_2} + D_1, \\ \mu = \frac{\Delta_2}{R_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Or, si les coefficients de l'équation donnée (1) représentaient les fonctions des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le groupement des termes (2) serait encore possible, à condition que les égalités (3) aient lieu identiquement, les formules (5) conservant leur validité; quant aux conditions (4) et aux formules (6), on y devrait remplacer les coefficients D_s et F par les valeurs D'_s et F', où l'on a posé:

$$2D'_s \equiv 2D_s - \psi(L_s), \quad F' \equiv F - \psi(M), \quad \psi(\ldots) \equiv \sum_{i=1}^{n} K_i \frac{\partial(\ldots)}{\partial x_i}.$$

Cela étant, l'équation (1) sera remplacée par deux équations:

$$\sum_{i=1}^{n} L_i p_i + Mz = z_1, \quad \sum_{s=1}^{n} K_s p'_s + N z_1 + G = \mu z, \tag{7}$$

z_1 désignant la fonction auxiliaire introduite et p'_s la dérivée de cette dernière du premier ordre prise par rapport à x_s.

Si le coefficient μ est identiquement nul, l'intégration de l'équation (1) s'achève immédiatement, grâce aux équations correspondantes (7).

Les conditions établies d'intégrabilité, généralisant ceux d'Euler, démontrent que la forme quadratique associée à l'équation (1) se décompose en deux facteurs linéaires.

Or, si $\mu \gtrless 0$, l'ensemble des équations (7) donne, par l'élimination de z une nouvelle équation linéaire par rapport à z_1 qui ne diffère de la forme de l'équation (1) que par les coefficients D_s, F et G.

Si le coefficient μ_1, relatif à l'équation transformée était nul, l'intégration de cette dernière serait immédiatement effectuée. On obtiendrait alors la valeur cherchée de z rien que par différentiation, grâce à la seconde formule (7).

La valeur de μ_1, étant distincte de zéro, on pourrait recommencer la transformation jusqu'à ce que l'on réussissait d'obtenir une équation d'un ordre quelconque de transformation qui serait intégrable.

Pour étudier les conditions d'intégrabilité, il serait le plus avantageux, d'établir le nombre de transformations à faire dans le cas, où l'intégration était possible, en généralisant le théorème que je viens de composer pour le cas de deux variables indépendantes (Editions de l'Académie Royale Serbe).

Les considérations exposées sont faites sous l'hypothèse (5). Or, si l'équation (1) était parabolique, elle pourrait être intégrée par réduction à un système de Charpit (v. N. Saltykow. Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade, t. II, 1933, p. 66).

Über Poissonsche Summationsformeln.

G. N. Watson, Birmingham.

In dieser Arbeit stelle ich eine leichte Verallgemeinerung der wohlbekannten Poissonschen Summationsformel auf. Die Funktion $\mathfrak{f}(x)$ sei für alle x definiert. Wir bilden die Fouriersche Transformierte