Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Alexander Fischer

Nomogram pro poloměr křivosti Archimédovy spirály

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, D103--D107

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123639

v šestém odvozuje jinou cestou rovnici zvláštního komplexu, vyšetřovaného už v práci předešlé, a jeho četné vlastnosti metrické. Důkladné vyšetření otázky oskulační plochy kvadratické u zborcené plochy dané třemi čarami, z nichž dvě nebo tři jsou nekonečně blízké, podává Klobouček v pracích: „O zborcených plochách, které mají danou asymptotickou plochu" (Časopis m. a f. 49, 1920), „Oskulační kvadrika zborcené plochy, dané dvěma soumeznými řídicími křivkami a další třetí křivkou řídicí" (Časopis m. a f. 54, 1925) a „Oskulační kvadrika zborcené plochy, dané třemi nekonečně blízkými čarami. Lieova kvadrika. Plošný element 3. a 4. řádu" (Rozpravy Č. akad. 35, 1926). V synthetickém prvním pojednání sestrojuje autor oskulační hyperboloid u zborcené plochy podél její přímky v případě, kdy plocha je určena prostorovou čarou (nebo útvarem duálním) a dvěma soumeznými čarami v nekonečnu, a v případech speciálních. V analytickém druhém určuje oskulační kvadriku u přímkové plochy, jdoucí danou čarou a dotýkající se dané čáry na ploše dané; upozorňuje (vzhledem ke starším nedokonalým pokusům o řešení tohoto úkolu) na určenost hledané kvadriky teprve elementem 3. řádu dané plochy. V delším pojednání třetím studuje konečně cestou diferenciální oskulační kvadriku u zborcené plochy, určené třemi soumeznými čarami, a odvozuje některé vlastnosti plošných elementů 3. i 4. řádu s příslušnými konstrukcemi.

Nomogram pro poloměr křivosti Archimedovy spirály.

Alexander Fischer, Praha.

Ve svém díle „Die Anwendung der Nomographie in der Mathematik" pojednává H. Schwerdt **3**[1]) mezi jiným o vyjádření a zobrazení různých geometrických útvarů nomografickými prostředky. Jak sám v předmluvě zdůrazňuje, „wurde bei der Wahl der Darstellungsform eine gewisse Beschränkung geübt und nach Möglichkeit der einheitliche Typus gewahrt." V souhlase s tím omezuje se hlavně na funkční vztahy, jež se dají uvésti na tvar Massauova determinantu a tedy mohou býti zobrazeny „spojnicovým nomogramem" s přímkou jako odečítací pomůckou. — V tomto článku pak ukáži, jak se — s použitím mého obecného postupu (srovnej **1**, 1) — dají zobraziti také takové funkční vztahy z tohoto oboru problémů, které nemohou bezprostředně býti zařa-

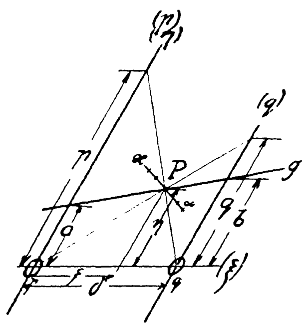
[1]) Půltučné číslice se vztahují k seznamu literatury na konci práce.

zeny do zmíněné speciální třídy; při tom jest ovšem nutno použíti kombinování spojnicových nomogramů. Aby práce byla pokud možno každému srozumitelná, vyložím v ní vše potřebné.

1. *Matematické základy návrhu.* Tyto základy jsou obsaženy v následujících několika řádcích:

a) Rovnice přímky g, jdoucí bodem P o souřadnicích p, q, jež na osách nomografické bodové soustavy V. Lásky-V. Hrušky (viz 2) vytíná úseky a, b, jest (viz obr. 1):

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} = 1. \tag{1}$$



Obr. 1.

b) Pojímáme-li p a q jako funkce parametru α, t. j.

$$p = p(\alpha), \quad q = q(\alpha), \tag{2), (3}$$

pak jest tím vyjádřena jistá křivka x (v parametrickém tvaru), jež podle (1) jest přímkou g proťata v bodě P.

c) K tomu přistupuje konečně obecná myšlenka zmíněného postupu:

Předložený funkční vztah jest rozložiti **především ryze formálně** v trojici rovnic:

Rovnice „odečítací křivky": (1).
Rovnice „řešící křivky" a rovnice jejího „očíslování": (2), (3)

a tento koordinující vztah jest **teprve potom geometricky** interpretovati — a to v našem případě v nomografické bodové soustavě (p) (q). (Implicitní definice všeobecného „spojnicového nomogramu"!) —

Budiž výslovně zdůrazněno, že to, co bylo řečeno, úplně postačí, vše ostatní by bylo nepodstatné.

2. *Návrh nomogramu.* Pro poloměr křivosti ϱ Archimedovy spirály

$$r = a\varphi$$

platí, jak známo, rovnice

$$\varrho = \frac{(a^2 + r^2)^{3/2}}{2a^2 + r^2}. \tag{4}$$

Převedeme-li ji na tvar

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{a^2 + r^2}{(a^2 + r^2)^{3/2}} + \frac{a^2}{(a^2 + r^2)^{3/2}}, \tag{5}$$

může býti rozložena v následující systém:

$$\frac{r^2}{z^2} + \frac{a^2}{z^2} = 1, \tag{6}$$

$$\frac{z}{\varrho} - \frac{a^2}{z^2} = 1. \tag{7}$$

Použijeme-li toho, co bylo řečeno sub 1, obdržíme:

α) Sestrojení nomogramu pro vztah (6): Rovnice odečítací přímky:

$$\frac{r^2}{p} + \frac{a^2}{q} = 1, \tag{1}$$

rovnice řešící křivky a rovnice jejího očíslování

$$p = q = z^2. \qquad (2), (3)$$

β) Sestrojení nomogramu pro vztah (7): Rovnice odečítací přímky:

$$\frac{\varrho^{-1}}{p} - \frac{a^2}{q} = 1, \tag{1}$$

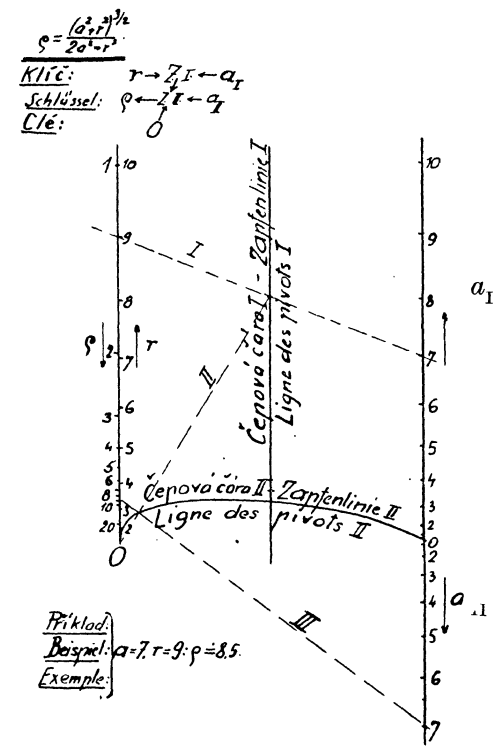
rovnice řešící křivky a rovnice jejího očíslování:

$$p = z^{-1}, \quad q = z^2. \qquad (2), (3)$$

Položíme-li oba nomogramy na sebe rovnoběžnými stupnicemi: ϱ na r a a_{I} na a_{II}, vznikne nomogram zobrazený v obr. 2. Pro proměnnou a má dvě stupnice, jež jsou rozlišeny římskými číslicemi I a II. Nomogram obsahuje tedy jeden „přespočetný systém" pro tuto proměnnou, která proto nesmí býti neznámá, což můžeme zajisté předpokládati. — „Řešící křivky", jež mohou býti konstruovány obecně bod za bodem v systému (p) (q) nebo též v cartézském systému (ξ) (η), při čemž ξ, η jsou dány vztahy

$$\xi = \delta \frac{p}{p + q}, \qquad \eta = \frac{pq}{p + q},$$

— viz 2 — obsahují pouze pomocnou proměnnou z, slouží tedy pouze jako „čepové čáry“ (lignes des pivots, Zapfenlinien) a proto jen k uvedení obou nomogramů ve vzájemnou souvislost. Mohou tedy zůstati nekotované. Při tom svazek paprskový $q = z^2$, jenž je společný oběma nomogramům, zprostředkuje souvislost mezi nimi.



Obr. 2.

3. *Užití nomogramu.* Nomogramu se užije ve třech krocích podle „klíče“ v něm udaného. Není proto nutno touto věcí se dále zabývati.

Poznámky. a) Samozřejmě mohla by se naše úloha řešiti dvěma „*Z*-nomogramy“ zavedením vztahu $r = a\varphi$ do rovnice (4); tím se však též nebudeme blíže zabývati.

b) Budiž jen krátce poznamenáno, že nomogramy s křivými čepovými čarami vyskytují se dosud v literatuře velmi zřídka. Jako příklad lze uvésti Wolffův nomogram, otištěný v známých dílech M. d'Ocagneově a R. Soreauově (srovnej též **1**, 1).

c) Obecné myšlenky, uvésti předložený funkční vztah na trojčlenný tvar, po příp. ve dva „kanonické tvary", jež se dají snáze zobraziti, použil jsem již ve své práci **1**, 2. Jak snadno zjistíme, naskytují se takovéto případy častěji; jako další funkční vztah, jejž by bylo řešiti analogickým způsobem, uveďme na př. vzorec pro vzdálenost těžiště kulové úseče od středu koule:

$$x_s = \tfrac{3}{4}\,\frac{(2r - h)^2}{3r - h}. \tag{8}$$

Literatura.

1. A. Fischer. 1. Über ein neues allgemeines Verfahren zum Entwerfen von graphischen Rechentafeln (Nomogrammen), insbesondere von Fluchtlinientafeln. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.: 1927, H. 3, S. 211, H. 5, S. 383; 1928, H. 4, S. 309; 1929, H. 5, S. 402.

2. Über zwei Rechenbilder (Nomogramme) zur Berechnung des Profilradius von gleichschenkeligen Trapezquerschnitten mit unter 45^0 geneigten Schenkeln. HDI-Mitteilungen des Hauptvereines deutscher Ingenieure in der Tschechoslowak. Republik (Brünn): 1934, H. $^3/_4$, S. 46.

2. V. Láska - V. Hruška. Počet grafický a graficko-mechanický. Praha 1923.

3. H. Schwerdt. Die Anwendung der Nomographie in der Mathematik. Für Mathematiker und Ingenieure dargestellt. Berlin 1931.