Zdeněk Horák

Sur une forme des équations d'Euler

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 191--192

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123627

Sur une transformation de la connexion W_n de M. Weyl.

V. Hlavatý, Praha.

La connexion W_n dans un espace à n dimensions est définie moyennant un tenseur quadratique $g_{\lambda\mu}$ et un vecteur Q_μ. Elle est invariante par rapport aux transformations

$$'g_{\lambda\mu} = \sigma g_{\lambda\mu}, \ 'Q_\mu = Q_\mu - \frac{\partial \log \sigma}{\partial x^\mu}, \tag{1}$$

σ étant n'importe quelle fonction de position. Or, si C_μ est un vecteur arbitraire, invariant par rapport à (1), le tenseur $g_{\lambda\mu}$ et le vecteur

$$\bar{Q}_\mu = Q_\mu + C_\mu \tag{2}$$

définissent une nouvelle connexion W_n. Je considère, dans cette communication, deux problèmes suivants: (A) La recherche du vecteur C_μ tel que la connexion correspondante soit sans courbure. (B) La recherche d'une connexion, invariante par rapport aux transformations (1) et (2).

Quant au problème (A), on peut démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que le fait mentionné ait lieu est que C_μ soit un vesteur nul par rapport au tenseur $g_{\lambda\mu}$ et que la grandeur de courbure ait une forme spéciale.

Pour résoudre le problème (B), on se sert d'un certain affineur, analogue à celui de la courbure conforme. On parvient ainsi, en ne partant que des dates données de la question, à construire une telle connexion, invariante par rapport aux transformations (1) et (2).

Remarquons que le même procédé nous donne aussi une connexion invariante par rapport aux transformations conformes de la géométrie différentielle conforme, ce résultat étant d'une portée assez grande non seulement du point de vue de la géométrie différentielle conforme, mais en même temps aussi du point de vue de la géométrie différentielle projective.

Sur une forme des équations d'Euler.

Z. Horák, Praha.

Les x^λ $(\lambda, \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$ étant des fonctions inconnues de la variable t et F étant une fonction donnée des x^λ, x'^λ, t, où les x'^λ désignent les dérivées des x^λ par rapport à t, on sait que les équations d'Euler

$$\frac{\partial F}{\partial x^\lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'^\lambda} = 0 \tag{1}$$

sont covariantes vis-à-vis des transformations holonomes de fonctions x^λ. Il n'en est plus de même pour les transformations *non holonomes* de la forme des équations différentielles, supposées non intégrables (je supprime les chiffres de sommation):

$$\mathrm{d}x^\lambda = A_k{}^\lambda \mathrm{d}q^k, \quad \mathrm{d}q^k = A_\lambda{}^k\, \mathrm{d}x^\lambda \tag{2}$$

puisque, par une telle transformation, les équations (1) deviennent

$$\frac{\partial F}{\partial q^k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q'^k} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'^\lambda}\left(\frac{\partial A_k{}^\lambda}{\partial q^l} - \frac{\partial A_l{}^\lambda}{\partial q^k}\right) q'^l = 0, \tag{3}$$

où les dérivées symboliques par rapport aux variables non holonomes q^k sont définies moyennant les relations:

$$\frac{\partial}{\partial q^k} = A_k{}^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda}.$$

Or, lorsque la fonction F est homogène en x'^λ du degré $h \geq 0$, les équations (1) peuvent s'écrire sous la forme

$$\nabla_\lambda \mathrm{F} - \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial x'^\lambda} = 0 \tag{4}$$

où ∇_λ et D désignent la dérivée et la différentielle covariantes (absolues) correspondant à n'importe quelle connexion riemannienne définie dans la variété des fonctions x^λ. Les équations (4) sont évidemment covariantes vis-à-vis des transformations holonomes- mais elles conservent leur forme encore si l'on introduit les paramètres non holonomes q^k. En effet, si l'on multiplie (4) par $A_k{}^\lambda$, en faisant la somme, on arrive aux équations

$$\nabla_k \mathrm{F} - \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial q'^k} = 0 \tag{5}$$

dont la forme explicite se confond avec (3).

Comme application de nos équations, cherchons les extrémales relatives à l'intégrale

$$\int\sqrt{g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}s$$

c'est-à-dire les géodésiques de l'espace riemannien au tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$. On aura

$$\nabla_\lambda \mathrm{F} = \frac{x'^\mu x'^\nu \nabla_\lambda g_{\mu\nu}}{2\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'^\lambda} = \frac{g_{\lambda\mu}x'^\mu}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t}$$

et les équations (4) donneront

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\left(g_{\lambda\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\right) = 0 \text{ ou bien } \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\right) = 0.$$

De la même manière, on tire de (5) les équations correctes des géodésiques encore pour les paramètres non holonomes:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}q^l}{\mathrm{d}s}\right) = 0.$$