Constantin P. Popovici

Nouvelles intégrales de l'équation de Fredholm

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 163--164

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123614

Fonctions: 1^0) bornées en chaque point d'un intervale et pourtant 2^0) non bornées dans l'intervale.

C. Popovici, Jassi.

I. On dirait un paradoxe, car il paraît que ces deux propriétés, d'une même fonction sont en contradiction; mais la contradiction n'est qu'apparente. Ainsi $f(x) = 1 : x$ satisfait à la condition 2 dans tout intervale qui contient $x = 0$ et n'y satisfait pas à la condition 1. Nous pouvons pourtant construire des fonctions dotées d'une expression analytique telles que les conditions 1 et 2 soient remplies à la fois. Ainsi p. ex. on peut employer la technique de construction suivante: Prenons une fonction $\varphi(x, c)$ qui a un point singulier essentiel $x = c$ sur ab sans y avoir des pôles, alors on pourra en général choisir convenablement λ tel que

$$f(x, c) = \varphi(x, c) - \varphi\,[\lambda(x),\ \lambda(c)] + \psi(x)$$

(ψ holomorphe sur ab) satisfasse sur ab aux conditions énoncées en titre.[1]) On peut donner d'autres combinaisons.[2])

II. Dès maintenant nous pouvons construire des fonctions $F(x)$ qui jouissent de ces deux propriétés:

1. $F(x)$ est bornée en chaque point sur ab.
2. $F(x)$ est non-bornée en chaque intervale, si petit soit'il, sur ab.

La technique pour construire de telles fonctions consiste à prendre un ensemble partout dense de points $c_{p,q}$ sur ab et de prendre ensuite:

$$F(x) = \sum_p \sum_q a_{p,q}\, f(x; c_{p,q})$$

$f(x, c)$ étant des fonctions du § I et $a_{p,q}$ fonctions, ou constantes, choisies pour la convergence. Bien entende l'arc ab doit ôtre choisi tel que aucun pôle des $f(x; c_{p,q})$ ne s'y trouve pas; ensuite il faut que cet arc traverse les régions où les f dépassent toute valeur donnée. P. ex: Voir.

Nouvelles Intégrales de l'Equation de Fredholm.

C. Popovici, Jassi.

Nous allons montrer par des exemples évidents, qu'il existent des équations de Fredholm qui admettent une infinité de solutions

[1]) P. ex. on peut choisir λ telle qu'elle admette $x = c$ comme point double de la transformation $x_1 = \lambda(x)$.

[2]) Voir ma note dans les C. Rendus Ac. Paris t. 196 p. 234, Janvier 1933. De plus: à la classe des fonctions dotées d'une expression analytique, on peut ajouter une autre classe, p. ex. celle des fonctions auxquelles on assigne une valeur forcée au point singulier essentiel.

dépendant même de fonctions arbitraires, comme nous l'avons montré[1]) pour l'équation de Volterra.

Considérons l'équation integrale

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 G(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0 \tag{1}$$

où, comme cela arrive dans des problèmes de physique mathématique, $G(x, s)$ n'est pas la même fonction depuis 0 jusqu'à 1. Ainsi soit

$$\begin{aligned} G(x, s) &= g(x, s) \text{ pour } 0 < s < a(x) \\ G(x, s) &= g_1(x, s) \text{ pour } a(x) < s < 1 \end{aligned} \tag{2}$$

alors (1) peut s'écrire

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{a(x)} g(x, s)\, \varphi(s)\, ds - \lambda \int_{a(x)}^1 g_1(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0 \tag{1'}$$

qui est une équation de ce genre que nous avons nommé intégro-fonctionnelles et dont nous avons démontré que la solution dépend de fonctions arbitraires.[1]) On pourra faire coïncider l'intégrale φ avec une fonction (ou un arc) arbitraire dans un intervale $x_0 \ldots a(x_0)$ où x_0 est arbitraire, pourvu que cet intervale ne contienne pas l'intervale $0 \ldots 1$ entier (y compris les limites). Cette fonction arbitraire étant choisie, l'intégrale φ sera en général unique; mais il y a des cas où l'intégrale dépend en plus d'un certain nombre (quelque fois même dénombrable) de constantes arbitraires.

Formule sommatoire générale.

Rodolphe Raclis, Bucarest.

On donne la suite $\{a_n\}$, où $a_0 = 1$ et on en déduit la suite $\{b_n\}$, définie par $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$; on désigne par D le symbole de la dérivation et par q un entier positif ou nul, on pose

$$\overset{q}{\Lambda} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} D^{q+\nu}, \quad \overset{q}{V} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_\nu}{\nu!} D^{q+\nu}.$$

Soient $A_n(x)$ et $B_n(x)$ les polynomes d'Appell, inverses l'un

[1]) Voir C. Rendus Ac. Paris 1914 p. 1866—69. T. 158. J'y ai annoncé des nouvelles solutions de l'équation de Fredholm; voir aussi: Nouvelles solutions de l'équation de Volterra, Circolo Palermo 1915 p. 341—44 T. 39; Id Mathematique Cluj T. 30. 2. 1927; Congrès de Bologne 3. 1928 p. 121—32; C. R. Ac. Paris Mars 1929; Bulletin des Sc. Math. Paris 1929; Rendiconti Lincei 1929; 1930 fasc. 1, 12; Math. Cluj 1930 p. 49—63; C. R. Ac. Paris 16 Janvier et 3 Juillet 1933.