Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Dan Barbilian

Einordnung von Lobatschewsky's Maßbestimmung in gewisse allgemeine Metrik der Jordanschen Bereiche

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 182--183

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123599`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1935

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Einordnung von Lobatschewsky's Maßbestimmung in gewisse allgemeine Metrik der Jordanschen Bereiche.

Dr. *D. Barbilian*, Bukarest.

Unter Einführung der erzeugenden Funktion

$$\mathrm{f}(p) = \frac{PA}{PB},$$

— wobei der Punkt P, vom Parameter p, die Jordan's Kurve K durchläuft, A und B aber zwei feste Punkte des inneren Bereiches J der Kurve K bezeichnen, — baut man eine Jordansche Metrik auf, indem man den Ausdruck

$$(AB) = \log \frac{M}{m} \tag{1}$$

als die Entfernung des Punktepaares A, B erklärt; unter M und m ist das Maximum und das Minimum der kontinuierlichen, positiven, nicht Null oder unendlich werdenden Funktion $\mathrm{f}(p)$ zu verstehen.

Der Begriff (AB) erfüllt die grundlegenden fünf Axiome der elementaren Entfernung: 1. das Axiom der Positivität und der Endlichkeit, 2. das Axiom des Verschwindens, 3. das Axiom der Divergenz, 4. das Axiom der Symmetrie, 5. das Axiom des Dreiecks.

Es gilt der

I. Satz. Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der Gleichung

$$(AB) = (AC) + (CB) \tag{2}$$

ist, daß die erzeugenden Funktionen der beiden Entfernungen (AC), (CB) ein Paar Extremalstellen gemeinsam haben. Dann gehören diese Extremalstellen auch der erzeugenden Funktion von (AB) an.

Als geodaetische (Jordansche) Bogen AB einer J-Metrik werden nur solche extremalen Bogen angesehen, deren J-Länge mit der J-Entfernung (AB) zusammenfällt. Man kann eine topologische, notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz solcher geodaetischen Bogen formulieren, die hier aber nicht angeführt wird.

Nennen wir kontinuierliche J-geodaetische Linien entweder J-geodaetische Umrisse (geschlossene J-g. L.) oder

J-geodaetische Bogen, die sich in zwei Punkten auf die Grenze K tsützen (offene J-g. L.), so gilt der

II. Satz. In einer J-Metrik kommen nur offene geodaetische Linien vor. Die Endpunkte solcher Linien fallen mit den gemeinsamen Extremalstellen S und s aller zugehörigen erzeugenden Funktionen zusammen.

Fragt man nach der Existenz der geodaetischen Linien einer J-Metrik, so hat man ∞^1 solcher Linien zu erwarten. Ihr tatsächliches Vorhandensein ist eine Frage, die durch ihre topologische Seite erschwert wird.

Verschärft man jedoch die Hypothesen, indem man eine reguläre Jordan's Kurve annimmt (d. h. eine K, die überall Tangenten besitzt), so kann man der Reihe nach diese einfachen Sätze beweisen:

III. Satz. Eine reguläre J-Metrik hat immer eine ∞^1 Schar geodaetischer Linien, die übrigens aus zu der Grenze K orthogonalen Kreisbogen besteht.

IV. Satz. Hat eine reguläre J-Metrik eine ∞^1 Schar geodaetischer Linien, die durch einen Punkt O aus J laufen, so reduziert sich J notwendigerweise auf den Inhalt eines Kreises; übrigens kann der Punkt O auch auf der Grenze K liegen.

V. Satz. Die einzige reguläre J-Metrik, die auch das Axiom der ausnahmslosen Existenz der geodaetischen Linien erfüllt, ist die J-Metrik in Bezug auf einen Kreis.

VI. Satz. Diese letztere J-Metrik fällt mit derjenigen Lobatschewsky's zusammen, und zwar mit deren kreisverwandter Abbildung, die von Poincaré erdacht wurde.

Alle diese Schlüsse sind leicht auf mehrdimensionale Gebiete zu übertragen.

Übrigens ist es möglich für die J^*-Bereiche, die in einem J-Bereich enthalten sind, unter Beibehaltung desselben variativen Verfahrens und der ausschließlichen Handhabung der „Entfernung erster Stufe" (AB), eine zweistufige Jordansche Metrik abzuleiten. Die „zweistufige Entfernung" $((AB))$ erfüllt dieselben grundlegenden fünf Axiome.

Man kann sich für diese neue Metrik ebenfalls die obigen geodaetischen Fragen stellen, was aber den Rahmen dieses Vortrags überschreiten würde.

Geometrie der Gewebe.

Wilhelm Blaschke, Hamburg.

Seit 1927 sind etwa 60 Arbeiten erschienen unter dem gemeinsamen Obertitel „Topologische Fragen der Differentialgeometrie", und zwar zum größten Teil in den Abhandlungen