

Viktor Trkal

Bemerkungen zur Diracschen Theorie

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 239--241

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123565>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1935

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

restreint d'axiomes simples, qui semblent évidents à priori. Il se pose alors la question du rapport entre ces „solides parfaits“ et les „solides naturels“ qui existent réellement dans le monde. D'après la Relativité, ce rapport est une coïncidence; celle-ci serait donc le sens exacte des expériences qui sont à la base de la Relativité restreinte.

Dans mon travail „Grundlegendes zum axiomatischen Aufbau der spez. Relativitätsth.“ I et II (Publ. math. de l'Univ. de Belgrade, t. II et III) dont la seconde partie paraîtra prochainement, j'ai déduit les transformations de Lorentz dans le cas le plus simple, de deux „droites matérielles“ se mouvant l'une le long de l'autre, animées de vitesses constantes. La déduction est basée sur cinq „notions primitives“ (point matériel, événement instantané, avoir lieu, apparaître, et avant) et sur treize axiomes. Quant à la coïncidence des „solides parfaits“ avec les „solides naturels“, elle peut être décomposée en cinq éléments qui, dans le cas considéré, assurent théoriquement la validité des transformations de Lorentz pour les „solides naturels“.

### Bemerkungen zur Diracschen Theorie.

V. Trkal, Praha.

Die Quantentheorie des relativistischen Einkörperproblems, die von Dirac herrührt, führt bekanntlich zur Existenz von Zuständen negativer kinetischer Energie (negativer Masse) der Elektronen. Da die Erfahrung niemals Teilchen mit negativer Masse zeigt, muß diese Konsequenz als ein Versagen der Theorie angesehen werden. Die bisher vorgeschlagenen Versuche zu einer Modifikation der Theorie können kaum als befriedigend angesehen werden. Zunächst hat Dirac selbst einen solchen Versuch unternommen; Pauli glaubt nicht, daß dieser Ausweg ernstlich in Betracht gezogen werden kann. Eine andere Modifikation der Theorie wurde von Schrödinger versucht. Da jedoch die relativistische und die Eichinvarianz der Theorie bei diesem Eingriff verlorengehen, hat Schrödinger selbst diesen Weg wieder verlassen. Wir müssen uns daher nach einer neuen Modifikation der Theorie umsehen.

Es möge hier kurz die Möglichkeit erwähnt werden, solche Gleichungen für das Elektron aufzustellen, welche bei jeder Drehung im gewöhnlichen Raum invariant bleiben und nur positive Werte der Energie zulassen, wobei die Eichinvarianz nicht verlorengeht.

Betrachten wir zunächst die klassische Theorie im kräftefreien Fall, so sehen wir, daß die positive kinetische Energie des Teilchens, oder genauer gesagt, ihre Hamiltonfunktion  $H = c_0 p_0$ , die durch  $p_0 = (m_0^2 c_0^2 + \sum_1^3 p_k^2)^{1/2}$  gegeben ist, bei den speziellen Lorentztransformationen selbst nicht invariant ist. Das geht nämlich aus den bekannten Transformationsformeln  $p'_1 = p_1 \operatorname{ch} \gamma - p_0 \operatorname{sh} \gamma$ ,

$p'_0 = -p_1 \operatorname{sh} \gamma + p_0 \operatorname{ch} \gamma$ ,  $\operatorname{tgh} \gamma = v/c_0$ ,  $\operatorname{ch} \gamma = (1 - v^2/c_0^2)^{-1/2}$ ,  
 $\operatorname{sh} \gamma = (1 - v^2/c_0^2)^{-1/2} v/c_0$ , hervor. Multiplizieren wir aber die vorige  
 Gleichung  $p_0 - \sqrt{m_0^2 c_0^2 + \Sigma p^2} = 0$  mit dem Ausdruck  $p_0 +$   
 $+\sqrt{m_0^2 c_0^2 + \Sigma p^2}$ , so erhalten wir die Gleichung  $p_0^2 - m_0^2 c_0^2 -$   
 $-\Sigma p^2 = 0$ , die eine relativistisch invariante Form hat, die also  
 nicht nur gegenüber jeder Drehung im gewöhnlichen Raum (wie  
 die Gleichung  $p_0 - \sqrt{m_0^2 c_0^2 + \Sigma p^2} = 0$ ), sondern auch im Falle  
 der allgemeinen Lorentztransformation invariant bleibt und sich  
 daher bequemer als Grundlage einer relativistischen Theorie  
 benutzen läßt, wie es auch Dirac selbst tatsächlich unternom-  
 men hat.

Halten wir aber an der Gleichung  $p_0 = +\sqrt{m_0^2 c_0^2 + \Sigma p^2}$  fest,  
 so können wir (außer der Eichinvarianz) nur die Invarianz der ge-  
 suchten Gleichungen (für das Elektron) gegenüber jeder Drehung  
 im gewöhnlichen Raum fordern. Die gesuchten Gleichungen bilden  
 dann, nicht ganz korrekt ausgedrückt, einen „Teil“ derjenigen  
 Gleichungen, die der Beziehung  $p_0^2 - m_0^2 c_0^2 + \Sigma p^2 = 0$  entsprechen.  
 Als Endresultat dieses soeben geschilderten Weges erhalten  
 wir folgende symbolische Operatorrelation

$$A\psi = 0,$$

wo  $A$  eine gewisse (unendliche) schiefsymmetrische Operatormatrix  
 bedeutet; wir treffen unter mehreren Möglichkeiten folgende Auswahl:

$$A = \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
 0 & 0 & 0 & a & 0 & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -a & 0 & -b & 0 & d & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a & 0 & 0 & -c & -d & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -a & 0 & 0 & 0 & -d & c & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & b & c & d & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & -b & -c & -d & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -b & 0 & d & -c & 0 & 0 & \alpha & 0 & b & 0 & -d & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -c & -d & 0 & b & 0 & -\alpha & 0 & 0 & c & d & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -d & c & -b & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & d & -c & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & -c & -d & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & b & c & d \\
 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & -d & c & 0 & 0 & -\alpha & 0 & -b & 0 & d & -c \\
 0 & 0 & 0 & 0 & c & d & 0 & -b & 0 & \alpha & 0 & 0 & -c & -d & 0 & b \\
 0 & 0 & 0 & 0 & d & -c & b & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & -d & c & -b & 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

in infin.

mit diesen Werten für die  $a, a^*, \alpha, b, c, d$ :

$$a = p_0 - m_0 c_0, \quad a^* = -(p_0 + m_0 c_0), \quad \alpha = a + a^*, \quad b = p_3, \quad c = p_2, \\
 d = p_1.$$

Auch können wir jetzt erkennen, in welcher Weise diese Gleichungen mit den Diracschen  $B\psi = 0$  zusammenhängen. Es ist nämlich

$$B = \begin{array}{c|cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & a & 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & -a & 0 & -b & 0 & d & -c \\ 0 & a & 0 & 0 & -c & -d & 0 & b \\ -a & 0 & 0 & 0 & -d & c & -b & 0 \\ \hline 0 & b & c & d & 0 & 0 & 0 & -a^* \\ -b & 0 & d & -c & 0 & 0 & a^* & 0 \\ -c & -d & 0 & b & 0 & -a^* & 0 & 0 \\ -d & c & -b & 0 & a^* & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

## Zur relativistischen Mechanik.

V. Varićak, Zagreb.

In der klassischen Mechanik werden die Impulskomponenten dargestellt als Ableitungen der kinetischen Energie nach den entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten. Das geht in der Relativitätstheorie, wie sie gewöhnlich ausgelegt wird, nicht an. Bei der Darstellung der Relativitätstheorie im Lobačevskij-schen Raume aber bleibt auch in diesem Punkte vollständige Analogie mit der klassischen Mechanik bewahrt.

## Elektromagnetické vlny na dielektrických trubicih.

Ladislav Zachoval, Praha.

Trubice má stěny o dielektrické konstantě  $\varepsilon_2$  (permeabilita =  $= \mu_2$ ), vně i uvnitř trubice je prostředí o dielektrické konstantě  $\varepsilon_1$  ( $\mu_1$ ). Vnější poloměr trubice je  $\varrho_2$ , vnitřní  $\varrho_3$ . Složky elektrické i magnetické síly jsou vyjádřeny (v cylindrických souřadnicích) cylindrickými funkcemi a vypočítají se z Maxwellových rovnic na základě předpokladů: 1. v poli není elektrostatických nábojů; 2. děj je časově ryze periodický; 3. závislost elektrické i magnetické síly na souřadnici  $z$  (osa  $Z$  v ose trubice) je dána exponentielou; 4. vyšetřují se jen ty vlny, které vyhovují Sommerfeldově definici vln na drátech.

Z podmínek na rozhraní vyplývá rovnice pro délku  $L$  vlny na trubici příslušnou k frekvenci  $\omega$ . Kdyby trubice nebylo, šířila by se prostředím při frekvenci  $\omega$  vlna o délce  $l = \frac{2\pi c}{\omega}$ . Rovnice pro  $L$  jest

$$\begin{aligned} & \frac{I_0(\xi) K_0(x)}{K_0(\xi) I_0(x)} \cdot \frac{\nu I'_0(\xi)/\xi I_0(\xi) - I'_0(\eta)/\eta I_0(\eta)}{I'_0(\eta)/\eta I_0(\eta) - \nu K'_0(\xi)/\xi K_0(\xi)} = \\ & = \frac{\nu I'_0(x)/x I_0(x) - H'_{10}(y)/y H_{10}(y)}{H'_{10}(y)/y H_{10}(y) - \nu K'_0(x)/x K_0(x)} \\ \eta & = \sqrt{p_1 - \lambda^2} \cdot \varrho_3; \quad y = \sqrt{p_1 - \lambda^2} \cdot \varrho_2; \quad p = \varepsilon\mu \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2; \quad \nu = \varepsilon_2 : \varepsilon_1; \end{aligned}$$