Zdeněk Horák
Sur les équations absolues du mouvement

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 229--230

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123555

Les éléments ainsi définis sont beaucoup plus simples et avantageux que les coordonnées normales bien connues de Poincaré qui ne sauraient être accessibles qu'au prix des calculs presque inextricables.

Sur les équations absolues du mouvement.

Z. Horák, Praha.

Dans le travail „Sur la dynamique absolue des systèmes rhéonomes"[1]) j'ai donné les équations dynamiques absolues, valables pour les paramètres espace-temporels. Dans cette communication, je vais déduire leur forme explicite, sans tenant compte du calcul différentiel absolu.

Le mouvement d'un système à n paramètres x^λ ($\lambda, \mu = 1, \ldots n$) de l'énergie cinétique T, soumis à l'action de forces généralisées X_λ et aux liaisons non holonomes et rhéonomes[2])

$$\Phi_\lambda{}^K \,\mathrm{d}x^\lambda + \Phi_t{}^K \,\mathrm{d}t = 0 \;\; (K = 1, \ldots n - m) \qquad (1)$$

est déterminé moyennant les équations

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda} - \partial_\lambda T = X_\lambda + \Lambda^K \Phi_\lambda{}^K. \qquad (2)$$

Introduisons les $m + 1$ paramètres espace-temporels q^a — en général non holonomes — en posant

$$\mathrm{d}x^\lambda = B_a{}^\lambda \mathrm{d}q^a, \;\; \mathrm{d}t = B_a{}^t \mathrm{d}q^a \;\; (a, b = 0, 1, \ldots m) \qquad (3)$$

sous réserve que les q^a sont indépendants de sorte que

$$\Phi_\lambda{}^K B_a{}^\lambda + \Phi_t{}^K B_a{}^t = 0. \qquad (4)$$

En raison de (3), on obtient

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda}\frac{\partial \dot{x}^\lambda}{\partial \dot{q}^a} = B_a{}^\lambda \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda},$$

$$\partial_a T = B_a{}^\lambda \partial_\lambda T + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\mu}\partial_a \dot{x}^\mu = B_a{}^\lambda \partial_\lambda T + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\mu}\partial_a B_b{}^\mu \dot{q}^b.$$

Donc, en multipliant (2) par $B_a{}^\lambda$ et faisant la somme, nous aurons en vertu de (4)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} - \partial_a T + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\mu}(\partial_a B_b{}^\mu - \partial_b B_a{}^\mu)\,\dot{q}^b = B_a{}^\lambda X_\lambda - \Lambda_K \Phi_t{}^K B_a{}^t.$$

---

[1]) Prace Mat.-Fiz., Warszawa, XLI (1933) p. 25—37.

[2]) Je me sers des notations $\partial_\lambda = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_a = \frac{\partial}{\partial q^a} = B_a{}^\lambda \partial_\lambda + B_a{}^t \partial_t$ et je supprime les chiffres de sommation.

De (1) et (2), on tire

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = X_\lambda \dot{x}^\lambda - \Lambda_K \Phi_t{}^K$$

de sorte qu'en écrivant

$$\partial'_a T = \partial_a T + B_a{}^t \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = B_a{}^\lambda \partial_\lambda T + B_a{}^t \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t},$$

$$Q'_a = B_a{}^\lambda X_\lambda + B_a{}^t X_t \qquad (X_t = - X_\lambda \dot{x}^\lambda),$$

on obtient les équations absolues sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} - \partial'_a T + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\mu} (\partial_a B_b{}^\mu - \partial_b B_a{}^\mu)\, \dot{q}^b = Q'_a \tag{5}$$

complètement analogue à celle des équations du mouvement ordinaires.

Si, pour un système holonome, on choisit les q^a aussi holonomes, (5) devient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} - \partial'_a T = Q'_a$$

et pour un système scléronome $\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = X_\lambda \dot{x}^\lambda\right)$ nos équations se réduisent à celles de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} - \partial_a T = Q_a \qquad (Q_a = B_a{}^\lambda X_\lambda).$$

Principe d'Huyghens.

Bohuslav Hostinský, Brno.

Une formule connue due à Poisson permet de calculer la fonction $\mathrm{u}(x, y, z, t)$ qui satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial z^2}\right) \tag{1}$$

et aux conditions

$$\mathrm{u} = \mathrm{f}(x, y, z), \quad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t} = \varphi(x, y, z) \qquad \text{pour } t = 0;$$

a est une constante, f et φ deux fonctions données. Écrivons simplement $\mathrm{u}(t)$ au lieu de $\mathrm{u}(x, y, z, t)$. Cette fonction, pour une valeur positive de t, s'obtient ainsi en appliquant à f et à φ une transformation fonctionnelle linéaire. Cette transformation que nous représentons par les formules abrégées