Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Jeřábek

O geometrickém místu středů kuželoseček, v nichž protíná svazek rovin plochu kuželovou stupně druhého

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 8 (1879), No. 4, 180--182

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123549`

konečnou hodnotu pro ξ touto cestou. Budiž pro $\gamma = m\alpha$, $\zeta = \xi_m$; pak máme na základě poslední rovnice patrně, je-li m celé číslo,
$$\xi_m = m\xi - 2n\pi.$$
Následkem věty 3. nemohou hodnoty veličin ξ, ξ_m od ostrého úhlu se lišiti o jiný než-li *celý* počet oběhů; musí tudíž býti $m\xi$ pro libovolné celé m buď ostrý úhel, aneb týž úhel zvětšený neb zmenšený o celý počet oběhů. Tomu vyhovuje však jen hodnota $\xi = 0$, kteráž zaručuje platnost věty o rovnoběžníku sil. — Výkresy k lepšímu pozorumění předloženého důkazu potřebné si laskavý čtenář snadno sám sestrojí.

O geometrickém místu středů kuželoseček, v nichž protíná svazek rovin plochu kuželovou stupně druhého.

Napsal

V. Jeřábek.

Budiž přímka P, která vrcholem kužele neprochází, osou svazku rovin, jehož roviny α, β, γ, δ ... plochu kuželovou protínají v kuželosečkách K, K_1, K_2, K_3 ... Dále buďtež τ, τ_1 dvě roviny, které jsou rovnoběžny s přímkou P a kužele podél přímek O, O_1 se dotýkají. Jest patrno, že rovina přímkami O, O_1 určená protne svazek rovin α, β, γ, δ ... ve svazku paprskovém A, B, C, D ... jehož vrcholem jest průsečný bod p osy P s rovinou (OO_1). Přímky povrchové O, O_1 určují na paprscích A, B, C, D ..., svazku p páry bodů aa_1, bb_1, cc_1, dd_1 ..., které též kuželosečkám K, K_1, K_2, K_3 ... náleží. Avšak úsečky $\overline{aa_1}$, $\overline{bb_1}$, $\overline{cc_1}$, $\overline{dd_1}$ ... paprsků A, B, C, D ... jsou průměry kuželoseček K, K_1, K_2, K_3 ..., neboť páry tečen $T_aT_{a_1}$, $T_bT_{b_1}$, $T_cT_{c_1}$, $T_dT_{d_1}$ ..., které patří dvojinám bodovým aa_1, bb_1, cc_1, dd_1 ... kuželoseček K, K_1, K_2, K_3 ... jsou s přímkou P a tedy i vespolek stejnosměrnými průsečnicemi rovin tečných τ, τ_1 kužele s příslušnými rovinami α, β, γ, δ ... svazku P. Body a'', b'', c'', d'' ..., v nichž se průměry $\overline{aa_1}$,

$\overline{bb_1}$, $\overline{cc_1}$, $\overline{dd_1}$ ... rozpolují, jsou středy kuželoseček K, K_1, K_2, K_3, ..., a nalezají se, jak snadno dokážeme, na hyperbole.

Seznali jsme již dříve, že paprsky A, B, C, D ... procházejí určitým bodem p roviny, $(OO)_1$ a že a'', b'', c'', d'' ... jsou body v nichž rozpolují se úsečky $\overline{aa_1}$, $\overline{bb_1}$, $\overline{cc_1}$, $\overline{dd_1}$, ..., jež určují přímky O, O_1 na paprscích A, B, C, D ... Promítneme-li (obr. 5, 6.) řadu a, b, c, d .... z nekonečně vzdáleného bodu u_1 přímky O_1 osnovou $u_1 (a\ b\ c\ d \ldots)$, a řadu a_1, b_1, c_1, d_1 ... z nekonečně vzdáleného bodu v přímky O osnovou $v (a_1\ b_1\ c_1\ d_1 \ldots)$, doděláme se dvou osnov paprskových, které promítajíce dvě řady perspektivní a, b, c, d ..., a_1, b_1, c_1, d_1 ..., samy vzájemně jsou prométnými. Sdružené paprsky $\overline{u_1 a}$ $\overline{va_1}$, $\overline{u_1 b}$ $\overline{vb_1}$, $\overline{u_1 c}$ $\overline{vc_1}$, $\overline{u_1 d}$ $\overline{vd_1}$ ... osnov $u_1 (a\ b\ c\ d \ldots)$ $v (a_1\ b_1\ c_1\ d_1 \ldots)$ určují vzájemným protínáním body a', b', c', d' ... kuželosečky H', jíž také společný bod O přímek O, O_1 náleží, Kuželosečka H', procházejíc dvěma nekonečně vzdálenými body (totiž $u_1\ v$ přímek O_1, O), jest hyperbolou.

Promítneme-li dále řadu $a'\ b'\ c'\ d'$ ... z bodu O hyperboly H' svazkem paprskovým $O (a', b', c', d' \ldots)$, obdržíme $O (a'\ b'\ c'\ d') \equiv v (a'\ b'\ c'\ d') \equiv (a_1\ b_1\ c_1\ d_1) \equiv p (a_1\ b_1\ c_1\ d_1)$. Z první a poslední rovnice vysvítá, že svazky $O (a'\ b'\ c'\ d' \ldots)$, $p (a_1\ b_1\ c_1\ d_1 \ldots)$ jsou prométnými, pročež protínají se příslušné paprsky $\overline{oa'}$ $\overline{pa_1}$, $\overline{ob'}$ $\overline{pb_1}$ $\overline{oc'}$ $\overline{pc_1}$ $\overline{od'}$ $\overline{pd_1}$ ... v bodech a'', b'', c'', d'' ... jisté kuželosečky H'', která vrcholem svazku O i svazku p prochází. Avšak kuželosečka H'' probíhá mimo nekonečně vzdálenými body u_1, v přímek O_1, O, a jest tedy také hyperbolou. Že přímky O, O_1 určují směry asymptot obou hyperbol, netřeba podotýkati. Nyní snadno poznáme, že body a'', b'', c'', d'' ... hyperboly H'' rozpolují úsečky $\overline{aa_1}$, $\overline{bb_1}$, $\overline{cc_1}$, $\overline{dd_1}$ ..., neboť v rovnoběžnících $oaa'a_1$, $obb'b_1$, $occ'c_1$, $odd'd_1$ .... jsou $\overline{oa'}$ $\overline{aa_1}$, $\overline{ob'}$ $\overline{bb_1}$, $\overline{oc'}$ $\overline{cc_1}$, $\overline{od'}$ $\overline{dd_1}$ ... úhlopříčnami, jež se na vzájem rozpolují.

Určíme-li rozpolovací bod c'' na paprsku $\overline{cc_1}$, a vedeme-li bodem O přímku $\overline{ob''} \parallel \overline{cc_1}$, jest patrno, že úsečka $\overline{bb_1}$, která náleží paprsku vedenému bodem p rovnoběžně k $\overline{oc''}$, jest ob'' v bodu b'' rozpůlena čili že bod b'' jest bodem hyperboly H''.

Z toho pak, že body $o b'' p c''$ hyperboly H'' tvoří rovnoběžník hyperbole vepsaný a že úhlopříčny jeho $\overline{op}$, $b''c''$ na vzájem se rozpolují, soudíme, že střed s hyperboly H'' rozpoluje délku $\overline{op}$. Rovnoběžky středem s k O, O_1 vedené jsou asymptoty hyperboly.

Z uvedeného plyne věta:

Středy všech kuželoseček, ve kterých svazek rovin P plochu kuželovou seče, nalézají se na hyperbole H'', která procházejíc vrcholem této plochy a neurčitým bodem p osy P, má za střed bod rozpolovací délku $\overline{op}$ a jejíž asymptoty jsou stejnosměrné s přímkami O, O_1).*

Úloha:

Kterak lze sestrojiti bod p hyperboly, která určena jest třemi body o, a'', b'' a směry asymptot O, O_1, a kterak lze pak pomocí bodu p sestrojiti další body kuželosečky, její střed s asymptoty.

O vzorci vyjadřujícím plochu čtyřúhelníka pomocí stran jeho.

Podává

Augustin Pánek.

Značí-li a, b, c, d strany — obr. 7. — $AC = m$, $BD = n$ úhlopříčky a $\triangle$ ploský obsah čtyrúhelníka $ABCD$ a vedeme-li vrcholy jeho rovnoběžky k úhlopříčkám, povstane rovnoběžník $A_1B_1C_1D_1$, jehož ploský obsah, jak povědomo

$$= A_1D_1 \,.\, A_1B_1 \sin\alpha = mn \sin\alpha,$$

a poněvadž

$$ABCD = \frac{1}{2} A_1\,B_1\,C_1\,D_1\,,$$

$$2\triangle = m\,n \sin\alpha. \qquad (1)$$

---

*) Provedení důkazu analytického, který jest velmi jednoduchý odporučujeme žákům středních škol. Dále nechť se dokáže, že bod p jest středem, hyperboly H'.