Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

August Seydler

# Přesný důkaz rovnoběžníku sil

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 8 (1879), No. 4, 175--180

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123548

bod druhý v trochoidě, mající s minim. vrcholem stejnou úsečku, jest bodem dvojnásobným.

Sestrojíme-li poloměrem rovným pořadnici dvojnásobného bodu $A$ z ohniska $f$ hyperboly $\bar{K}$ kruh, a přeneseme-li vzdálenost bodů dotyčných $n$ a $h$ tečny, společné jemu a hyperbole, od $v$ na obě strany v $\bar{X}$, obdržíme body $x$ a $'\alpha$, které s bodem $d$ určují normály k tečnám v tomto bodu dvojnásobném.

Důkaz pozůstaven buď laskavému čtenáři.

---

# Přesný důkaz rovnoběžníku sil.

Napsal

dr. **A. Seydler.**

Následující důkaz opírá se, vedle běžných výměrů, pouze o tyto tři axiomy:

*A.* Nemění-li se velkost a relativní poloha jednotlivých sil v bodu působících, nemění se i relativní poloha výslednice v soustavě.

*B.* Je-li soustava sil v rovnováze, neruší se tato rovnováha připojením neb odloučením jiné soustavy, jež jest o sobě v rovnováze.

*C.* Síly působící na bod v stejném směru (se stejným neb různým označením) mají výslednici měřenou algebraickým součtem sil.

Z poslední věty plyne: je-li soustava sil na bod působících v rovnováze, lze veškeré síly až na jednu libovolnou nahraditi silou jedinou, jež má se zbývající silou stejnou velkost a stejný směr, ale opáčné označení, aniž by se tím rovnováha porušila; a naopak: není-li soustava sil na bod působících v rovnováze, lze vždy nalézti sílu, kteráž by k soustavě připojena tuto v rovnováhu uvedla. Následkem toho lze pak větu $B$ rozšířiti takto:

*B'.* Působení *libovolné* soustavy sil nemění se připojením neb odloučením soustavy, jež o sobě jest v rovnováze.

Nyní můžeme postupně dokázati o dvou silách $P$ a $Q$, působících v jednom bodu, tyto věty:

1. *Síly k sobě nakloněné nemohou býti v rovnováze.* Jinak bylo by lze sílu $Q$ nahraditi sílou $-P$, což jest nemožné.

2. *Výslednice dvou na bod působících sil leží v jejich rovině.* Připojme k silám $P$ a $Q$ výslednici opačně vzatou $-R$, a připojme k této soustavě soustavu stejnou však otočenou o $180^0$ kolem osy sestrojené v působišti kolmo k rovině $(P, Q)$, tož budou obě soustavy v rovnováze $(P, Q, -R$, a $-P, -Q, S)$ Odejmeme-li nyní soustavy $P, -P, Q, -Q$ dle věty $B$, musí zbývající síly $-R, S$ býti v rovnováze, a tudíž dle věty 1 $S = + R$ co do velkosti i co do směru, což jest možné jen tehdy, když $R$ leží v rovině $(P, Q)$.

3. *Výslednice leží uvnitř úhlu vytvořeného směry sil $P, Q$.* Je-li $P = 0$, má výslednice směr $Q$; vzrůstáním síly $P$ od $0^0$ do konečné hodnoty $P$ musí výslednice *nepřetržitým otáčením* přejíti do své konečné polohy $R$. Podobně mění výslednice směr svůj nepřetržitě od polohy $P$ do polohy $R$, vzrůstá-li $Q$ od 0 do $Q$. Buď při jednom z těchto pohybů nebo při obou musela by výslednice, kdyby neležela uvnitř úhlu vytvořeného směry $P_1$ $Q$, přijíti při určité hodnotě síly proměnlivé do směru jedné z obou složek (s označením stejným neb opačným), a pak by tři síly $P_1$ $Q, -R$, aneb dvě síly: buď $(P-R)$ a $Q$ buď $(Q-R)$ a $P$ byly v rovnováze, což dle první věty nemožno. Tím dokázána jest naše věta per absurdum.

4. *Mají-li síly $P, Q$ výslednici $R$, tož mají síly $mP, mQ$, tvořící stejné úhly jako síly $P, Q$, výslednici $mR$ stejné relativní polohy.*

Připojme (dle věty $B'$) k silám $mP_1$ $mQ$ soustavu $-P_1$ $-Q_1$ $R$, tak aby síly $-P_1$ $-Q$, měly stejný směr jako $mP_1$ $mQ$, avšak opačné označení. V nově utvořené soustavě ruší se síly $Pa - P$, $Qa - Q$, a zbývají síly $(m-1]P_1$ $(m-1)Q$ o výslednici $S_1$ a síla $R$, která se musí se sílou $S$ skládati a výslednici $T$ totožnou s výslednicí sil $mP_1$ $mQ$. Jeli tedy $S = (m-1)R$, a stejného směru jako $R$, musí též býti $T = mR$ a téhož směru. Patrně platí věta naše pro $m = 2$; pak jest $S = R$, $T = 2R$; i musí tudíž věta ta platiti pro $m = 3, 4, 5, \ldots \infty$. Je-li $m$

zlomek racionalný $= \frac{k}{n}$, položíme $P = np$, $Q = nq$, i bude $mP = kp$, $m = kq$; čímž tento případ uveden na předcházející. Je-li konečně $m$ zlomek irracionalný, můžeme se hodnotě jeho racionalným zlomkem $\frac{k}{n}$, v němž $k$ a $n$ jsou nekonečně rostoucí celá čísla, nekonečně přiblížiti.

5. *Výslednice sil $P$, $Q$ tvořících úhel $\gamma$ jest určena co do velkosti rovnicí*

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos(\gamma + \xi)$$

*v kteréž jest $\xi$ jakýsi úkon úhlu $\gamma$.*

Budiž $P = OA$, $Q = OB$, $R = OC$, $\sphericalangle AOC = \alpha$, $\sphericalangle BOC = \beta$, $\sphericalangle AOB = \gamma = \alpha + \beta$. Sílu $P$ rozložíme ve dvě jiné: $P_1 = OA_1$ ve směru výslednice $R$ a $P_2 = OA_2$ ve směru, jenž tvoří s $OA$ úhel $\beta$; rovněž rozložíme $Q$ v síly $Q_1 = OB_1$ a $Q_2 = OB_2$, z nichž první má směr výslednice, druhá pak s $OB$ úhel $\alpha$ tvoří. Pak budou soustavy: $P, Q, R$; $P_1, P_2, P$; $Q_2, Q_1, Q$ soustavy podobné a platí o nich (dle věty předcházející, kterou smíme patrně obrátiti) následující relace:

Je-li

$$P = aR,\quad Q = bR$$

bude

$$\begin{aligned} P_1 &= aP = a^2 R \\ P_2 &= bP = ab\, R \\ Q_1 &= bQ = b^2 R \\ Q_2 &= aQ = ab\, R. \end{aligned}$$

Z toho následuje:

*a*) Jelikož síly $P_1$, $Q_1$ leží ve směru výslednice $R$, musí v témž směru ležeti výslednice sil $P_2$ a $Q_2$, které jsou stejné a tvoří s $R$ stejné úhly $\alpha + \beta = \gamma$. *Výslednice stejných sil půlí tudíž úhel, jejž tvoří spolu.*

*b*) Položíme-li $\gamma = 90^0$, ruší se na vzájem síly $P_2$ a $Q_2$, i bude $R = P_1 + Q_1$, čili $R^2 = P^2 + Q^2$.

*Tvoří-li tedy síly $P$, $Q$ pravý úhel, jest výslednice, posud však jen co do velkosti, určena úhlopříčnou obdélníku stranami $P$, $Q$ utvořeného.* Stojí tudíž tento případ jaksi dualně proti případu prvému, v němž *směr* výslednice jest určen, nikoli však *velkost.*

*c)* Tvoří-li jakási síla s určitým směrem úhel $\gamma$, tož ji lze dle věty *b* rozložiti ve složku se směrem tím rovnoběžnou a složku kolmou tak, že ji otočíme o úhel $\zeta$, jenž jest patrně (dle věty 4) pouze úkonem úhlu $\gamma$ ne však úkonem velkosti síly, a takto otočenou promítneme na onen směr a na kolmici k němu položenou. Složka první bude se rovnati síle násobné $\cos (\gamma + \zeta)$. To platí též o silách $P_2$, $Q_2$, z nichž každá dá ve všeobecném případu prve uvedeném (t. j. pro jakýkoliv úhel $\gamma$) složku $ab\, R \cos (\gamma + \zeta)$; tyto dvě složky spojené se silami $P_1$, $Q_1$ vedou k rovnici

$$R = P_1 + Q_1 + 2ab\, R \cos (\gamma + \zeta),$$

a násobíme-li veličinou $R$

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos (\gamma + \zeta).$$

6. *Úhel $\zeta$ musí býti roven nulle, výslednice dvou jakkoli položených v jednom bodu působících sil jest tedy určena* ***co do velikosti i co do směru*** *úhlopříčnou rovnoběžníku ze sil $P$, $Q$ vytvořeného.*

Proložme působištěm $O$ dva kolmé k sobě směry $OX$, $OY$; součet složek sil $P = OA$, $Q = OB$, vzatých ve směru $OX$ neb $OY$, musí rovnati se složce výslednice $R = OC$, vzaté ve směru stejném. Volme za směr $OX$ nejprv směr $OA$; složka síly $P$ bude $OA$; složku síly $Q$ obdržíme, otočíme-li $OB$ do polohy $OB'$, tak aby $AOB' = \gamma + \zeta$, a promítneme-li $OB'$ na směr $OA$; místo toho můžeme též vésti $AC' \parallel OB'$ a spustiti kolmici $C'D$ na $OA$; součet obou složek, $OD$, musí býti průmětem výslednice $R$ o jakýsi úhel $\xi$ (úkon úhlu $\alpha$ výslednice $R$ a síly $P$) otočené; avšak přímka $OC'$ rovná se dle předešlé věty výslednici $R$, a jest tudíž patrně $OC'$ poloha této výslednice otočené o úhel $\xi$. Podobný rozklad provedeme vzhledem ke směru $OB$, a obdržíme tak dva trojúhelníky, $OAC'$, $OBC''$, jež jsou shodné, majíce všechny strany na vzájem stejné; jich úhly jsou tudíž $180 - \gamma - \zeta$, $\alpha + \xi$, $\beta + \eta$, kde znamená $\beta$ úhel výslednice $R$ a síly $Q$ a $\eta$ úhel, o nějž nutno výslednici $OC$ otočiti, by dospěla do polohy $OC''$. Sečteme-li ony úhly, shledáme (poněvadž $\gamma = \alpha + \beta$), že jsou veličiny $\xi$, $\eta$, $\zeta$ podrobeny podmínce

$$\zeta = \xi + \eta$$

t. j. když přísluší úhlu $\alpha$ úhel $\xi$, úhlu $\beta$ úhel $\eta$, přísluší úhlu $\alpha + \beta$ úhel $\xi + \eta$. Z toho následuje, že jest úhel $\xi$ úměrný úhlu $\alpha$, čili

$$\xi = k\alpha,$$

kde $k$ jest konstanta. Pro $90^0$ jest patrně $\xi = 0$, tudíž $k = 0$ pro všechny případy, a tedy též všeobecně $\xi = 0$. Tím jest věta o rovnoběžníku sil dokázána.

Za příčinou větší názornosti jsem se zúmyslna vystříhal vzorků trigonometrických; pomocí nich dal by se důkaz vésti jednodušeji tímto spůsobem:

Promítneme-li $P$, $Q$, $R$ po sobě na směry $OA$, $OB$, $OC$, obdržíme soustavy rovnic

$$P + Q\cos(\gamma + \zeta) - R\cos(\alpha + \xi) = 0$$
$$P\cos(\gamma + \zeta) + Q - R\cos(\beta + \eta) = 0$$
$$P\cos(\alpha + \xi) + Q\cos(\beta + \eta) - R = 0$$

Těmto rovnicím bude vyhověno, rovná-li se determinant ze součinitelů veličin $P$, $Q$, $R$ nulle, kteroužto rovnici podmiňující snadno můžeme převésti na tvar následující:

$$\sin\frac{1}{2}(2\alpha + \xi - \eta + \zeta) \times \sin\frac{1}{2}(2\beta - \xi + \eta + \zeta) \times$$
$$\sin\frac{1}{2}(2\gamma + \xi + \eta + \zeta) \times \sin\frac{1}{2}(\xi + \eta - \zeta) = 0.$$

Tato rovnice má čtyry kořeny:

$$2\alpha + \xi - \eta + \zeta + 2n\pi = 0$$
$$2\beta + \xi - \eta + \zeta + 2n\pi = 0$$
$$2\gamma + \xi + \eta + \zeta + 2n\pi = 0$$
$$\xi + \eta - \zeta + 2n\pi = 0$$

Zde znamená $n$ kladné neb záporné celé číslo.

První tři kořeny jsou však nemožné, obsahujíce odpor; položíme-li v nich totiž ve všech místo $\gamma$, $\gamma + 90^0$, v první pak místo $\alpha$ též $\alpha + 90^0$, v druhé místo $\beta$, $\beta + 90^0$, a v třetí buď jedno neb druhé, nemění se tím, jak snadným přemýšlením poznáme, ani $\xi$ ani $\eta$ ani $\zeta$; $n$ pak musí zůstati i kdyby se změnilo na $n'$, celým číslem; obdržíme tudíž ve všech třech rovnicích nemožnou relaci $\left(n' - n + \frac{1}{2}\right)\pi = 0$. Zbývá tudíž

$$\zeta = \xi + \eta + 2n\pi$$

a ta liší se od rovnice předešlé nalezené pouze celým oběhu počtem kolem působiště. Jelikož by mohla při vyvození rovnice $\xi = k\alpha$ vzniknouti zdánlivá obtíž následkem členu $2n\pi$, zjednáme si konečnou hodnotu pro $\xi$ touto cestou. Budiž pro $\gamma = m\alpha$, $\zeta = \xi_m$; pak máme na základě poslední rovnice patrně, je-li $m$ celé číslo, $\xi_m = m\xi - 2n\pi$.

Následkem věty 3. nemohou hodnoty veličin $\xi$, $\xi_m$ od ostrého úhlu se lišiti o jiný než-li *celý* počet oběhů; musí tudíž býti $m\xi$ pro libovolné celé $m$ buď ostrý úhel, aneb týž úhel zvětšený neb zmenšený o celý počet oběhů. Tomu vyhovuje však jen hodnota $\xi = 0$, kteráž zaručuje platnost věty o rovnoběžníku sil. — Výkresy k lepšímu pozorumění předloženého důkazu potřebné si laskavý čtenář snadno sám sestrojí.

---

# O geometrickém místu středů kuželoseček, v nichž protíná svazek rovin plochu kuželovou stupně druhého.

Napsal

**V. Jeřábek.**

Budiž přímka $P$, která vrcholem kužele neprochází, osou svazku rovin, jehož roviny $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ ... plochu kuželovou protínají v kuželosečkách $K$, $K_1$, $K_2$, $K_3$ ... Dále buďtež $\tau$, $\tau_1$ dvě roviny, které jsou rovnoběžny s přímkou $P$ a kužele podél přímek $O$, $O_1$ se dotýkají. Jest patrno, že rovina přímkami $O$, $O_1$ určená protne svazek rovin $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ ... ve svazku paprskovém $A$, $B$, $C$, $D$ ... jehož vrcholem jest průsečný bod $p$ osy $P$ s rovinou $(OO_1)$. Přímky povrchové $O$, $O_1$ určují na paprscích $A$, $B$, $C$, $D$ ..., svazku $p$ páry bodů $aa_1$, $bb_1$, $cc_1$, $dd_1$ ..., které též kuželosečkám $K$, $K_1$, $K_2$, $K_3$ ... náleží. Avšak úsečky $\overline{aa_1}$, $\overline{bb_1}$, $\overline{cc_1}$, $\overline{dd_1}$ ... paprsků $A$, $B$, $C$, $D$ ... jsou průměry kuželoseček $K$, $K_1$, $K_2$, $K_3$ ..., neboť páry tečen $T_a T_{a_1}$, $T_b T_{b_1}$, $T_c T_{c_1}$, $T_d T_{d_1}$ ..., které patří dvojinám bodovým $aa_1$, $bb_1$, $cc_1$, $dd_1$ ... kuželoseček $K$, $K_1$, $K_2$, $K_3$ ... jsou s přímkou $P$ a tedy i vespolek stejnosměrnými průsečnicemi rovin tečných $\tau$, $\tau_1$ kužele s příslušnými rovinami $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ ... svazku $P$. Body $a''$, $b''$, $c''$, $d''$ ..., v nichž se průměry $\overline{aa_1}$,