Vilém Jung

Příspěvek k theorii kuželoseček

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 9 (1880), No. 2, 71--76

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123535`

$$\xi = x - \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha''} M \,.\, D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right),$$
$$\eta = y + \frac{\gamma'}{\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha''} M \,.\, D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right), \qquad (24)$$
$$\zeta = z - \frac{\alpha'}{\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha''} M \,.\, D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right),$$

souřadnice středu kroucenosti vyjádřeny jsou zde opět co funkce proměnné t; vyloučíme-li t vždy ze dvou těchto rovnic, obdržíme průměty křivky středů kroucenosti na rovinách souřadných.

(Pokračování.)

Příspěvek k theorii kuželoseček.

Napsal

Vilém Jung v Pardubicích.

Znamená-li

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0$$

rovnici křivky druhého stupně, vztažené na provoúhlé souřadnice, degeneruje se takováto křivka ve dvě přímky, v konečnu se pronikající, platí-li

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

platí-li však k tomu ještě

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{11}, & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

znamená rovnice zmíněná dvě rovnoběžné přímky!

Tyto vztahy mezi součiniteli pro ony zvláštní případy kuželoseček se různým způsobem odvádějí*); chci v těchto řádcích naznačiti odvození, s kterým jsem se posud nikde nesetkal.

1. Křivka druhého stupně $\overline{\breve{\Gamma}}$ jest výtvarem dvou projektivných svazků paprskových $\bar{s} \equiv (A, B, C, \ldots Z)$ a $\bar{s}' \equiv (A', B', C', \ldots Z', \ldots)$ v téže rovině, což lze symbolicky vyznačiti $\overline{\breve{\Gamma}} \lessgtr \bar{s} : \bar{s}'$, $(\bar{s} \,\pi\, \bar{s}')$.

---

*) Viz ku př. *Studnička* „Poznámka k analytické geometrii". Časop. math. a fys. R. VI. pag. 35—40.

Svazek $\bar{s}$ jest úplně určen třemi paprsky A, B, C a svazek $\bar{s}'$ sdruženými paprsky A', B', C'; t. j. kuželosečka $\bar{\Gamma}$ jest úplně určena pěti body a sice

$$s,\ s',\ a \equiv (A,\ A'),\ b \equiv (B,\ B'),\ c \equiv (C,\ C').$$

Libovolný bod $z\bar{\Gamma}$ povstane průnikem združených paprsků Z a Z', takže $z\bar{\Gamma} \lessgtr Z : Z'$.

Aby $\bar{s} \barwedge \bar{s}'$, musí býti dvojpoměry združených čtveřin paprskových sobě rovny, takže

$$(A\,B\,C\,Z) = (A'\,B'\,C'\,Z'),$$

při čemž

$$(A\,B\,C) = \frac{\sin \widehat{AC}}{\sin \widehat{BC}} = \lambda,\quad (A\,B\,Z) = \frac{\sin \widehat{AZ}}{\sin \widehat{BZ}} = \xi$$

$$(A\,B\,C\,Z) = \frac{(A\,B\,C)}{(A\,B\,Z)} = \frac{\lambda}{\xi},$$

obdobně

$$(A'B'C'Z') = \frac{(A'B'C')}{(A'B'Z')} = \frac{\lambda'}{\xi'}.$$

Tu jest λ parametrem paprsku C ohledně základních paprsků A i B čili poměrem trojiny paprskové A, B, C; ξ pak poměrem trojiny paprskové A, B, Z; $\frac{\lambda}{\xi}$ pak dvojpoměrem čtveřiny paprskové A, B, C, Z. Totéž platí o λ' a ξ' jakož i o $\frac{\lambda'}{\xi'}$ vzhledem ku A', B', C', Z'.

Platí tedy všeobecně $\frac{\lambda}{\xi} = \frac{\lambda'}{\xi'}$ t. j. $\lambda\xi' = \lambda'\xi$ (1)

Předpokládejme soustavu pravoúhlých souřadnic (obr. 11.) a znamenejž:

$A \equiv x \cos\alpha + y \sin\alpha - p_a = 0$ rovnici v norm. tvaru přímky A
$B \equiv x \cos\beta + y \sin\beta - p_b = 0$ „ „ „ „ B
$A' \equiv x \cos\alpha' + y \sin\alpha' - p_a' = 0$ „ „ „ „ A'
$B' \equiv x \cos\beta' + y \sin\beta' - p_b' = 0$ „ „ „ „ B'

Z předeslaných podmínek patrno dle známého principu, že

$C \equiv A - \lambda B = 0$ znamená rovnici o norm. tvaru přímky C
$C' \equiv A' - \lambda' B' = 0$ „ „ „ „ „ C'
$Z \equiv A - \xi B = 0$ (2) „ „ „ „ „ Z
$Z' \equiv A' - \xi' B' = 0$ (3) „ „ „ „ „ Z'

Parametry ζ a ζ' jsou proměnné.

Abychom obdrželi rovnici křivky $\overline{\Gamma}$, geometrického to místa bodu $z\overline{\Gamma}$, nutno z rovnic (1), (2), (3) vyloučiti proměnné parametry ζ a ζ'.

Dosazením do (3) $\xi' = \frac{\lambda'}{\lambda}\xi$ plyne

$$A - \xi B = 0$$
$$\lambda A' - \xi\lambda' B' = 0,$$

z čehož eliminací veličiny ζ se podává:

$$\begin{vmatrix} A, & -B \\ \lambda A', & -B' \end{vmatrix} = 0$$

t. j. $\lambda A'B - \lambda AB' = 0$ (4) což jest rovnice křivky $\overline{\Gamma}$, která udává vztah mezi pravoúhlými souřadnicemi x a y bodů této křivky.

Seřadíme-li levou stranu rovnice (4) dle mocností proměnných x a y, provedše především úkony tam naznačené, dospějeme k rovnici druhého stupně mezi x a y tvaru

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (5)$$

při čemž

$$a_{11} = \lambda \cos\alpha' \cos\beta - \lambda' \cos\alpha \cos\beta'$$
$$2a_{12} = \lambda (\sin\alpha' \cos\beta + \cos\alpha' \sin\beta) - \lambda' (\sin\alpha \cos\beta' + \cos\alpha \sin\beta')$$
$$a_{22} = \lambda (\sin\alpha' \sin\beta - \lambda' \sin\alpha \sin\beta'$$
$$2a_{13} = -\lambda (p'_a \cos\beta + p_b \cos\alpha') + \lambda' (p_a \cos\beta' + p'_b \cos\alpha)$$
$$2a_{23} = -\lambda (p'_a \sin\beta + p_b \sin\alpha') + \lambda' (p_a \sin\beta' + p'_b \sin\alpha)$$
$$a_{32} = \lambda p'_a p_b - \lambda_a p'_b.$$

Tím jest analyticky dokázáno, že křivka druhého stupně jest výtvorem dvou projektivných svazků paprskových.*)

2. Z tvaru (4) rovnice křivky $\overline{\Gamma}$ lze poznati, kdy rovnice (5) znamená dvě přímky. Patrně tenkráte, když kvadratická rovnice (4) rozpadne ve dvě linearné. Tu mohou nastati dva podstatně rozdílné případy.

a) Levá strana rovnice (4) rozpadne se ve dva linearné činitele, jest-li $A' = \mu A$, tak že

$$A(\mu\lambda B - \lambda' B') = 0$$

t. j. $A = 0 \ldots$ (6) $\mu\lambda B - \lambda' B' = 0$ (7)
(obr. 2), což znamená dvě přímky.

---

*) Obdobně by si dokázalo, že jest křivka druhého řádu výtvorem dvou projektivných řad bodových nalézajících se na dvou přímkách v téže rovině, pomocí souřadnic přímkových.

V tom případě se tedy sjednotí združené paprsky A i A' v přímce, jež obsahuje vrcholy s a s' svazku $\bar{s}$ a $\bar{s}'$

$\bar{\Gamma}$ se rozpadne ve dvě přímky $\bar{P}$ a $\bar{P}'$, z nichž $\bar{P}$ jest $A \equiv A'$, tedy přímka obsahující vrcholy s a s'; $\bar{P}$ jest pak dána rovnicí $\mu \lambda B - \lambda' B' = 0$, což znamená, že prochází bodem $b \equiv (B, B')$, a poněvadž

$$C = A - \lambda B, \; C' = A' - \lambda' B'$$

tedy

$$C' = \mu C \text{ t. j. } C' - \mu C = 0,$$

což znamená, že $\bar{P}'$ prochází ještě bodem $c \equiv (C, C')$.

Levá strana rovnice (5) jeví se tedy jako součin dvou linearných polynomů proměnných x a y, z nichž jeden uveden na nulu značí rovnici přímky $A \equiv A' \equiv (s, s')$ a druhý taktéž uveden na nulu podává rovnici přímky (b, c).

Zavedeme-li krátce

$$\begin{aligned} &\cos\alpha = a, \; \sin\alpha = b, \; p_a = c, \\ &\lambda \mu \cos\beta - \lambda' \cos\beta' = d, \; \lambda\mu \sin\beta - \lambda' \sin\beta' = e, \\ &\lambda \mu p_b - \lambda' p'_b \quad = f, \end{aligned}$$

pak snadno se odvodí, že

$$\begin{aligned} a_{11} &= ad \\ 2a_{12} &= bd + ae \\ a_{22} &= be \\ 2a_{13} &= -cd - af \\ 2a_{23} &= -ce - bf \\ a_{33} &= cf \end{aligned}$$

Dle toho

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} ad + ad, & ae + bd, & -af - cd \\ bd + ae, & be + be, & -bf - ce \\ -cd - af, & -ce - bf, & cf + cf \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{vmatrix} a, & d, & 0 \\ b, & e, & 0 \\ -c, & -f, & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d, & a, & 0 \\ e, & b, & 0 \\ -f, & -c, & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8} \left[\begin{vmatrix} a, & d, & 0 \\ b, & e, & 0 \\ c, & f, & 0 \end{vmatrix} \right]^2 = 0$$

Má-li tedy rovnice (5) znamenati dvě přímky, musí symmetrický diskriminant

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix}$$

zmizeti.

Máli býti $\overline{P} \parallel \overline{P'}$ (obr. 13), musí dle známé zásady, poněvadž $P \equiv A = 0$, $P' \equiv \mu\lambda B - \lambda' B' = 0$, platiti následující relace:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\mu\lambda\cos\beta - \lambda'\cos\beta'}{\mu\lambda\sin\beta - \lambda'\sin\beta'},$$

tedy dle našeho zkrácení

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{e} \text{ t. j. } \begin{vmatrix} a, & d, \\ b, & e, \end{vmatrix} = 0$$

zároveň

$$\begin{vmatrix} d, & a \\ b, & e \end{vmatrix} = 0$$

tedy i

$$0 = \begin{vmatrix} a, & d \\ b, & e \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d, & a \\ e, & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ad + ad, & ae + bd \\ ae + bd, & be + be \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{12}, & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Zmizí-li tedy ještě kromě zmíněného diskriminantu karakteristický binom

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{12}, & a_{22} \end{vmatrix},$$

znamená rovnice (5) dvě rovnoběžné přímky.

b) Levá strana rovnice (4) se může ještě rozpadnouti ve dva linearné činitele, platí-li $B = \mu A$, pak $A(\lambda\mu A' - \lambda' B') = 0$, t. j. $A = 0$ (8) a $\lambda\mu A' - \lambda' B' = 0$, (9) což značí dvě přímky (obr. 14).

V tom případě se sjednotí A i B a celý svazek $\bar{s}$ se redukuje na jedinou přímku

$$A \equiv B \equiv C \equiv Z,$$

$$\text{neboť } C = A - \lambda\mu A = B(1 - \lambda\mu) = 0$$

$$\text{a } Z = A - \xi\mu A = A(1 - \mu\xi) = 0.$$

Křivka $\overline{\Gamma}$ se rozpadne na dvě přímky Q a Q'. Přímka Q jest totožná s $A \equiv B \equiv C \equiv Z$; přímka Q jest pak identická s přímkou C', jelikož $\lambda\mu = 1$*), neboť $\lambda = \frac{A}{B}$ a $\mu = \frac{B}{A}$ a proto rovnice (9) má tvar

*) Tato rovnice zdá se býti nemožnou, jelikož jest μ neurčitá konstanta. Toto se dá však vysvětliti takto:

$$A' - \lambda' B' \equiv C' = 0.$$

Zkrátka kvadratický polynom rovnic (5) jest součinem dvou linearných polynomů, z nichž prvý uveden na nullu znamená rovnici přímky C'.

Píšeme-li krátce

$\mu\lambda \cos\alpha' - \lambda' \cos\beta' = g,\ \mu\lambda \sin\alpha' - \lambda' \sin\beta' = h,\ \lambda\mu p'_a - \lambda' p'_k = i,$

platí

$$a_{11} = ag,\ 2a_{12} = ah + bg,\ a_{22} = bh,\ 2a_{13} = -ai - cg,$$
$$2a_{23} = -bi - ch,\ a_{33} = ci, \text{ tak že}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} ag + ag, & ah + bg, & -ai - cg \\ bg + ah, & bh + bh, & -bi - ch \\ -cg - ai, & -ch - bi, & ci + ci \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{vmatrix} a, & g, & 0 \\ b, & h, & 0 \\ -c, & -i, & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} g, & a, & 0 \\ h, & b, & 0 \\ -i, & -c, & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8} \left[\begin{vmatrix} a, & g, & 0 \\ b, & h, & 0 \\ c, & i, & 0 \end{vmatrix} \right]^2 = 0.$$

Má-li znamenati (5) dvě rovnoběžky, musí mimo předešlé podmínky ještě platiti (obr. 15.)

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\lambda\mu \cos\alpha' - \lambda' \cos\beta'}{\lambda\mu \sin\alpha' - \lambda' \sin\beta'}$$

t. j. $\begin{vmatrix} a, & g \\ b, & h \end{vmatrix} = 0$, tedy i $\begin{vmatrix} g, & a \\ h, & b \end{vmatrix} = 0$, z toho

$$\begin{vmatrix} a, & g \\ b, & h \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} g, & a \\ h, & b \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} ag + ag, & ah + bg \\ ah + bg, & bh + bh \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Patrno, že i tu zmíněné podmínky v platnosti zůstávají.

Odvození toto jest poněkud zdlouhavé a umělé, jest ale za to dobrým příkladem na upotřebení determinantů, jakož i na upotřebení principu Dupin-ova, který se v analytické geometrii objevil býti tak plodným!

Jelikož $A \equiv B \equiv C \equiv Z$, musí $\sin \widehat{AC} = 0$, $\sin \widehat{BC} = 0$, $\sin \widehat{AZ} = 0$, $\sin \widehat{BZ} = 0$, proto $(ABC) = \frac{0}{0} = \lambda$, $(ABZ) = \frac{0}{0} = \xi$ $(ABCZ) = \frac{0}{0} : \frac{0}{0}$.
Jest tedy λ neurčité, proto může ona rovnice existovati. Jelikož jest dvojpoměr $(ABCZ)$ taktéž neurčitý, odpovídá paprsku Z nekonečně mnoho združených paprsků Z' svazku s', což jest tomuto případu úplně přiměřeno.