Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Řehořovský

O plochách rozvinutelných. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 9 (1880), No. 2, 60--71

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123534`

známo, nepovšimnuté okolnosti poukázati, že každým bodem onoho geom. místa jest možno *nekonečně mnoho* trojin tečen vzájemně kolmých.

Ku každé ploše stupně 2. (vyjímaje plochy válcové a kuželové) náleží jiná téhož stupně jakožto geom. místo bodů, z nichž každým lze stanoviti nekonečně mnoho trojin vzájemně kolmých tečen plochy prvé.

O plochách rozvinutelných.

Napsal

V. Řehořovský v Praze.

(Pokračování).

Konečně jsou přímky obrysové pro rovinu YZ dány rovnici

$$3t^2 - 1 = 0,$$

t. j.

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}},\ t = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

kterýmž hodnotám přísluší přímky

$$4y + (3\sqrt{3} - 1)z - (3a\sqrt{3} - b) = 0,$$
$$4y + (3\sqrt{3} + 1)z + (3a\sqrt{3} + b) = 0.$$

Určením hodnot α, β, γ, δ pro tyto zvláštní hodnoty t obdrželi bychom též ostatní průměty těchto přímek na rovinách XY a XZ.

Abychom určili asymptoty křivky vratu, přihlížejme k tomu, zda-li a mnoho-li má křivka (12) bodů v nekonečnu: shledáváme, že pouze pro

$$t = 1$$

stávají se souřadnice křivky vratu a sice všechny tři nekonečně velkými; křivka má tedy jediný bod v nekonečnu. Pro hodnotu tu jest

$$\alpha = 1,\ \beta = a - b,\ \gamma = -1,\ \delta = b$$

a tedy rovnice asymptoty

$$y = x + a - b,$$
$$z = -x + b;$$

rovnice asymptotické roviny pak

$$x - y + a - b = 0.$$

Jak patrno, jest asymptota zároveň obrysovou přímkou vzhledem k rovině XY.

10. *Normalná rovina křivky vratu.* Jest to rovina kolmá ku tečně křivky vratu t. j. ku přímce povrchové plochy rozvinutelné, v bodu x, y, z křivky vratu.

Rovnice přímky povrchové jsou

$$y = \alpha x + \beta,$$
$$z = \gamma x + \delta,$$

rovnice roviny procházející bodem x, y, z a kolmé ku přímce povrchové dle známých relac*)

$$X - x + \alpha (Y - y) + \gamma (Z - z) = 0;$$

vložíme-li sem za x, y z, hodnoty z rovnic (10), obdržíme

$$X + \alpha Y + \gamma Z + \frac{\beta'}{\alpha'} (1 + \alpha^2 + \gamma^2) - (\alpha\beta + \gamma\delta) = 0 \quad (14)$$

co rovnici roviny normalné v bodu t křivky vratu. Rovnici té lze dáti na základě podmínky (2) též tvar

$$X + \alpha Y + \gamma Z + \frac{\delta'}{\gamma'} (1 + \alpha^2 + \gamma^2) - (\alpha\beta + \gamma\delta) = 0.$$

Rovina ta jest geometrické místo všech normal křivky vratu t. j. přímek kolmých ku tečně v bodu t křivky vratu.

Každému bodu křivky vratu náleží jediná rovina normalná; vždy dvě soumezné tyto roviny protínají se v přímce, kteráž slove *přímka polarná* neb *osa křivosti*, z příčin, jež poznáme později (čl. 13). Veškeré přímky polarné, z nichž vždy dvě soumezné jsouce v jedné rovině normalné se protínají, vytvořují novou plochu rozvinutelnou, *plochu polarnou*, kteráž jest obalující plochou veškerých rovin normalných křivky vratu. Rovnice plochy té obdrží se podobně jako každé plochy obalující vyloučením proměnného parametru t z rovnice (14) a derivace této rovnice podle t, totiž z

$$\alpha' Y + \gamma' Z + \frac{\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''}{\alpha'^2} (1 + \alpha^2 + \gamma^2) + 2 \frac{\beta'}{\alpha'} (\alpha\alpha' + \gamma\gamma')$$
$$- (\alpha\beta' + \beta\alpha' + \gamma\delta' + \delta\gamma') = 0.$$

*) Dr. F. J. Studnička: Anal. geometrie v prostoru str. 44.

Označíme-li zkrátka

$$\frac{\beta'}{\alpha'}(1+\alpha^2+\gamma^2)-(\alpha\beta+\gamma\delta)=\varphi,$$

a derivaci této funkce podle t tedy φ', obdrží rovnice (14) a její derivace tvary

$$X+\alpha Y+\gamma Z+\varphi=0,$$
$$\alpha' Y+\gamma' Z+\varphi'=0;$$

řešíme-li rovnice tyto dle Y a Z, obdržíme

$$Y=\frac{-\gamma' X+\gamma\varphi'-\gamma'\varphi}{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'},$$

$$Z=\frac{\alpha' X-\alpha\varphi'+\alpha'\varphi}{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'},$$

aneb jinak upraveno značí-li D derivace,

$$\left.\begin{aligned}
Y&=-\frac{\gamma'}{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}X-\frac{D\left(\frac{\varphi}{\gamma}\right)}{D\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)},\\
Z&=\frac{\gamma'}{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}X-\frac{D\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)}{D\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)},
\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

Rovnice tyto podávají rozvinutelnou plochu polarnou v tvaru (1), jakým původní plocha jest dána; lze tedy tuto odvozenou plochu vyšetřovati zcela tímtéž spůsobem jako plochu původní a užíti veškerých již odvozených neb dále následujících vzorců, jen když všude

za α píšeme $-\dfrac{\gamma'}{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}$,

„ β „ $-\dfrac{D\left(\frac{\varphi}{\gamma}\right)}{D\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)}$,

„ γ „ $\dfrac{\alpha'}{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}$,

„ δ „ $-\dfrac{D\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)}{D\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}$.

Zejmena důležita jest *křivka vratu plochy polarné*; zavedeme-li za α, β, γ, δ právě uvedené hodnoty do vzorců (10), obdržíme pro souřadnice bodů této křivky výrazy:

$$x = -\frac{D\left(\frac{\varphi}{\gamma}\right) D^2\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) - D\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) D^2\left(\frac{\varphi}{\gamma}\right)}{D\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) D\left(\frac{\gamma'}{\gamma^2}\right) - \frac{\gamma'}{\gamma^2} D^2\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)}, \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{D\left(\frac{\varphi}{\gamma}\right) D\left(\frac{\gamma'}{\gamma^2}\right) - \frac{\gamma'}{\gamma^2} D^2\left(\frac{\varphi}{\gamma}\right)}{D\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) D\left(\frac{\gamma'}{\gamma^2}\right) - \frac{\gamma'}{\gamma^2} D^2\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)}, \\ z &= -\frac{D\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right) D\left(\frac{\alpha'}{\alpha^2}\right) - \frac{\alpha'}{\alpha^2} D^2\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)}{D\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) D\left(\frac{\alpha'}{\alpha^2}\right) - \frac{\alpha'}{\alpha^2} D^2\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Ku geometrickému významu této křivky pro plochu původní vrátíme se později (čl. 14.), prozatím tuto podotýkáme, že každým bodem této křivky procházejí dvě přímky polarné a tedy tři po sobě jdoucí roviny normalné křivky vratu dané plochy rozvinutelné aneb jinak, *geometrické místo průsečných bodů vždy tří soumezných rovin normalných jest křivka vratu plochy polarné.* Na základě toho obdržely by se souřadnice (16) též tím spůsobem, že rovnici (14) roviny normalné derivujeme dvakráte podle t a z tří těchto rovnic určíme x, y, z. Značí-li φ opět tutéž funkci co dříve, obdržíme tu rovnice

$$\begin{aligned} x + \alpha\, y + \gamma\, z + \varphi &= 0 \\ \alpha' y + \gamma' z + \varphi' &= 0, \\ \alpha'' y + \gamma'' z + \varphi'' &= 0, \end{aligned}$$

z nichž řešením plyne

$$x = \alpha \frac{D\left(\frac{\varphi'}{\gamma'}\right)}{D\left(\frac{\alpha'}{\gamma'}\right)} + \gamma \frac{D\left(\frac{\alpha'}{\gamma'}\right)}{D\left(\frac{\alpha'}{\varphi'}\right)} - \varphi, \quad y = -\frac{D\left(\frac{\varphi'}{\gamma'}\right)}{D\left(\frac{\alpha'}{\gamma'}\right)}, \quad z = -\frac{D\left(\frac{\varphi'}{\alpha'}\right)}{D\left(\frac{\gamma'}{\alpha'}\right)}, \tag{17}$$

kteréž rovnice jsou totožné s rovnicemi (16) majíce při tom jednodušší tvar.

11. *Hlavní normala.* Jest to ona z normal, která zapadá do roviny oskulační, a rovnice její co rovnice průseku roviny oskulační a roviny normalné jsou tedy

$$(\alpha\gamma' - \gamma\alpha')\, x - \gamma' y + \alpha' z + \beta\gamma' - \delta\alpha' = 0,$$
$$x + \alpha y + \gamma z + \frac{\beta'}{\alpha'}(1 + \alpha^2 + \gamma^2) - (\alpha\beta + \gamma\delta) = 0,$$

aneb v rozvinutém tvaru

$$\left.\begin{aligned} y &= \left[\alpha - \frac{\alpha'(1+\alpha^2+\gamma^2)}{\alpha\alpha' + \gamma\gamma'}\right] x + \beta - \frac{\beta'(1+\alpha^2+\gamma^2)}{\alpha\alpha' - \gamma\gamma'}, \\ z &= \left[\gamma - \frac{\gamma'(1+\alpha^2+\gamma^2)}{\alpha\alpha' + \gamma\gamma'}\right] x + \delta - \frac{\delta'(1+\alpha^2+\gamma^2)}{\alpha\alpha' + \gamma\gamma'}. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Žádné dvě soumezné z těchto normal, nalezajíce se v různých rovinách, se neprotínají, vytvořují tudíž veškeré hlavní normály *plochu zborcenou*; roviny tečné této plochy v bodech křivky vratu, určeny jsouce vždy hlavní normalou a tečnou křivky vratu, jsou zároveň rovinami oskulačními této křivky a platí tedy: *Křivka vratu jest asymptotickou křivkou plochy zborcené hlavních normal.* Znajíce jednu asymptotickou křivku této plochy jsme v stavu všechny ostatní určiti.*)

12. *Binormala.* Tak slove ona normala, která jest kolmá k rovině oskulační a tedy ku hlavní normale. Rovnice její buďtež

$$\frac{\xi - x}{a} = \frac{\eta - y}{b} = \frac{\zeta - z}{c};$$

z podmínky, že binormala jest kolmá k rovině oskulační, jde

$$a : b : c = (\alpha\gamma' - \gamma\alpha') : -\gamma' : \alpha',$$

takže rovnice binormaly jsou

$$\frac{\xi - x}{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'} = \frac{\eta - y}{-\gamma'} = \frac{\zeta - z}{\alpha'};$$

vložíme-li za x, y, z souřadnice bodu křivky vratu z rovnic (10) a upravíme-li rovnice v rozvinutém tvaru, obdržíme

$$\left.\begin{aligned} \eta &= -\frac{\gamma'}{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}\,\xi + \frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\alpha'} - \frac{\delta'}{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}, \\ \zeta &= \frac{\alpha'}{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}\,\xi + \frac{\gamma\delta' - \delta\gamma'}{\gamma'} + \frac{\beta'}{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}, \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

co rovnice binormaly křivky vratu v bodu t. Veškeré tyto binormaly, z nichž žádné dvě soumezné se neprotínají, stanoví opět plochu zborcenou té vlastnosti, že její roviny tečné v bodech křivky vratu jsou kolmy k rovinám oskulačním této křivky; z toho jde:

*) Srovnej: Archiv mathematiky a fysiky, svaz. II. str. 216.

Křivka vratu jest geodætickou křivkou zborcené plochy binormal.

Avšak křivka vratu má pro plochu tuto ještě jiný význam. Oskulační roviny ve dvou soumezných bodech této křivky protínají se v tečně obsahující body tyto, jsou tedy obě soumezné binormaly kolmy k tečně a naopak; jest tudíž tečna přímkou nejkratší vzdálenosti obou mimosměrných binormal (osa mimosměrek) a stanoví dle známých vlastností ploch zborcených na binormale bod centralný, kterýž se zde ztotožňuje s bodem křivky vratu. Geometrické místo všech bodů centralných na přímkách povrchových ploch zborcených jest křivka, která obdržela jméno křivky strikční; platí tedy:

Křivka vratu jest křivkou strikční zborcené plochy binormal.

13. *Poloměr a střed křivosti křivky vratu.* Křivost prostorových křivek určuje se podobným spůsobem jako křivek rovinných; vytkneme-li sobě na křivce prvek nekonečně malý ds a označíme-li nekonečně malý úhel — úhel kontingenční —, který tečny v koncových bodech prvku toho spolu uzavírají, $d\omega$, (srov. čl. 7.) jest poloměr křivosti prvku toho definován vzorcem

$$R = \frac{ds}{d\omega};$$

myslíme-li sobě totiž v některém bodu prvku ds rovinu oskulační, obsahuje tato tři soumezné body a dvě soumezné tečny křivky prostorové, takže promítneme-li tuto křivku v jakémkoli směru do roviny oskulační, stotožňují se průměty oněch bodů a tečen s body a s tečnami samými, zůstává tedy ds i $d\omega$ pro jistý bod křivky prostorové, jakož i pro průmět její do roviny oskulační bodu toho konstantní; obě křivky mají tudíž v bodu tom stejnou křivost a z té příčiny možno užíti vzorce pro křivost křivek rovinných též pro křivky prostorové.

Obě veličiny $d\omega$ i ds můžeme sobě však funkcemi α, β, γ, δ vyjádřiti; především jest dle vzorce (11)

$$d\omega = \frac{\sqrt{\alpha'^2 + \gamma'^2 + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')^2}}{1 + \alpha^2 + \gamma^2}\, dt.$$

Dále jest

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

hodnoty za dx, dy, dz zjednáme sobě ze vzorců (10), totiž

$$dx = -D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)dt = -D\left(\frac{\delta'}{\gamma'}\right)dt,$$
$$dy = \alpha\, dx + (\alpha' x + \beta')\, dt,$$
$$dz = \gamma\, dx + (\gamma' x + \delta')\, dt,$$

aneb, poněvadž dle prvního ze vzorců (10)

$$\alpha' x + \beta' = 0,\ \gamma' x + \delta' = 0,$$

též

$$dy = \alpha\, dx,$$
$$dz = \gamma\, dx;$$

vloživše hodnoty tyto do vzorce pro ds, obdržíme

$$ds^2 = (1 + \alpha^2 + \gamma^2)\, dx^2$$

a tedy dále $ds = -\sqrt{1+\alpha^2+\gamma^2}\, D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)dt$

$$= -\sqrt{1+\alpha^2+\gamma^2}\, D\left(\frac{\delta'}{\gamma'}\right)dt,$$

takže konečně se obdrží

$$\begin{aligned} R &= -\frac{(1+\alpha^2+\gamma^2)^{3/2}}{\sqrt{\alpha'^2+\gamma'^2+(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2}}\, D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right) \\ &= -\frac{(1+\alpha^2+\gamma^2)^{3/2}}{\sqrt{\alpha'^2+\gamma'^2+(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2}}\, D\left(\frac{\delta'}{\gamma'}\right) \end{aligned}, \tag{20}$$

co výraz pro poloměr křivosti křivky vratu v bodu t. Při tom možno zanedbati znamení a hleděti jen k absolutní délce poloměru. K stejnému výsledku přijdeme, užijeme-li známého vzorce pro poloměr křivosti.*)

$$R = \frac{ds^3}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

kdež

$$X = \begin{vmatrix} dy, & dz \\ d^2y, & d^2z \end{vmatrix},\ Y = \begin{vmatrix} dz, & dx \\ d^2z, & d^2x \end{vmatrix},\ Z = \begin{vmatrix} dx, & dy \\ d^2x, & d^2y \end{vmatrix}.$$

Differencujeme-li rovnice

$$dy = \alpha\, dx,\quad dz = \gamma\, dx$$

ještě jednou majíce na zřeteli, že pro body křivky vratu jest pouze t neodvisle proměnnou, obdržíme

$$d^2y = \alpha'\, dx\, dt + \alpha\, d^2x,$$
$$d^2z = \gamma'\, dx\, dt = \gamma\, d^2x,$$

a pomocí těchto hodnot dále

*) Dr. F. J. Studnička: O počtu differencialním str. 216., vyd. 2.

$$X = (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')\, dt\, dx^2,$$
$$Y = \gamma'\, dt\, dx^2,$$
$$Z = \alpha'\, dt\, dx^2,$$

takže

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = dt\, dx^2 \sqrt{\alpha'^2 + \gamma'^2 + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')^2};$$

mimo to jest

$$ds = \sqrt{1 + \alpha^2 + \gamma^2}\, dx.$$

Hodnoty tyto vloženy do vzorce pro R podávají

$$R = \frac{(1 + \alpha^2 + \gamma^2)^{3/2}}{\sqrt{\alpha'^2 + \gamma'^2 + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')^2}} \frac{dx}{dt},$$

a ponévadž

$$\frac{dx}{dt} = -D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right) = -D\left(\frac{\delta'}{\gamma'}\right),$$

konečně

$$R = -\frac{(1 + \alpha^2 + \gamma^2)^{3/2}}{\sqrt{\alpha'^2 + \gamma'^2 + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')^2}} D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)$$
$$= -\frac{(1 + \alpha^2 + \gamma^2)^{3/2}}{\sqrt{\alpha'^2 + \gamma'^2 + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')^2}} D\left(\frac{\delta'}{\gamma'}\right),$$

což jest vzorec totožný s (20).

Střed kruhu křivosti nalezá se v hlavní normale onoho bodu křivky vratu, v kterém právě křivost se vyšetřuje; souřadnice jeho určeny jsou vzorci*):

$$\xi - x = \frac{Y\,dz - Z\,dy}{X^2 + Y^2 + Z^2} ds^2,$$
$$\eta - y = \frac{Z\,dx - X\,dz}{X^2 + Y^2 + Z^2} ds^2,$$
$$\zeta - z = \frac{X\,dy - Y\,dx}{X^2 + Y^2 + Z^2} ds^2,$$

jest však na základě vypočtěných hodnot

$$Y\,dz - Z\,dy = -(\alpha\alpha' + \gamma\gamma')\, dt\, dx^3$$
$$Z\,dx - X\,dz = [\alpha' - \gamma(\alpha\gamma' - \gamma\alpha')]\, dt\, dx^3$$
$$X\,dy - Y\,dx = [\gamma' + \alpha(\alpha\gamma' - \gamma\alpha')]\, dt\, dx^3$$

vložíme-li hodnoty tyto jakož i dříve určené hodnoty pro $X^2 + Y^2 + Z^2$ a ds do hořejších vzorců, obdržíme

*) ibid. pag. 197. vyd. první.

$$
\begin{aligned}
\xi &= x + \frac{(\alpha\alpha' + \gamma\gamma')(1+\alpha^2+\gamma^2)}{\alpha'^2+\gamma'^2+(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2} D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right),\\
\eta &= y + \frac{[\alpha'-\gamma(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')](1+\alpha^2+\gamma^2)}{\alpha'^2+\gamma'^2+(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2} D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right),\\
\zeta &= z - \frac{[\gamma'+\alpha(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')](1+\alpha^2+\gamma^2)}{\alpha'^2+\gamma'^2+(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2} D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right).
\end{aligned} \tag{21}
$$

Nahradíme-li ve vzorcích těchto ještě x, y, z hodnotami z rovnic (10), obdržíme souřadnice středu křivosti co funkce proměnné t; vyloučením t vždy ze dvou těchto rovnic obdržíme průměty křivky středů křivosti na rovinách souřadných.

V článku 10. uvedli jsme, že průsečná přímka dvou soumezných rovin normalných křivky vratu nazývá se též osou křivosti; na tomto místě můžeme sobě vysvětliti původ názvu toho. Stopy obou soumezných rovin normalných na rovině oskulační jsou totiž dvě soumezné normaly oné rovinné křivky v rovině oskulační, která v uvažovaném bodu má stejnou křivost s křivkou vratu; obě soumezné normaly protínají se však ve středu kruhu křivosti, jest tedy průsečná přímka obou rovin normalných totožna s přímkou, která ve středu křivosti jest normalná ku rovině oskulační. Přímka tato jest společnou osou všech přímých kruhových kuželů, jichž řídící křivkou jest kruh křivosti; odtud pak název *osa křivosti.* Každá osa křivosti neb přímka polarná jest rovnoběžna s příslušnou binormalou; na základě toho možno rovnice její psáti ve tvaru

$$
\begin{aligned}
Y - \eta &= -\frac{\gamma'}{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}(X-\xi),\\
Z - \zeta &= \frac{\alpha'}{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}(X-\xi),
\end{aligned} \tag{22}
$$

kdež ξ, η, ζ jsou souřadnice středu křivosti určené rovnicemi (21). Ostatně jest též osa křivosti určena v jiném tvaru rovnicemi (15).

Srovnáme-li rovnice (22) s oněmi (15), shledáváme, že jest

$$
\eta + \frac{\gamma'}{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}\xi = -\frac{D\left(\frac{\varphi}{\gamma}\right)}{D\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)},
$$

$$\xi - \frac{\alpha'}{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}\,\xi = -\frac{D\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)}{D\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)},$$

kterýchž jednodušších rovnic užíti lze k určení η a ζ místo (21), jakmile ξ již bylo stanoveno.

14. V článku 10. ukazovali jsme dále, že křivka vratu plochy os křivosti jest geometrické místo průsečných bodů vždy tří soumezných rovin normalných původní křivky vratu t. j každý takový bod jest stejně vzdálen od čtyř soumezných bodů dané křivky vratu a jest tedy středem koule, která těmito čtyřmi body soumeznými určena jest; koule tato nazývá se *koule oskulační* dané křivky vratu. Souřadnice středu této koule určeny jsou vzorci (16) neb (17); poloměr její udáváme později

Shrneme-li výsledky článků 10. a 13., přicházíme k následujícím větám:

Zborcená plocha hlavních normal a rozvinutelná plocha os křivosti protínají se orthogonalně v křivce, která jest geometrickým místem všech středů křivosti křivky vratu a dále:

Křivka vratu rozvinutelné plochy os křivosti jest geometrické místo všech středů koulí oskulačních křivky vratu dané plochy rozvinutelné.

15. *Poloměr a střed kroucenosti křivky vratu.* K určení poloměru tohoto užijeme známého vzorce*) platného pro jakou koliv křivku prostorovou:

$$R' = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{\vartheta},$$

kdež X, Y, Z značí veličiny tytéž jako v čl. 13.

$$\vartheta = \begin{vmatrix} d\,x, & d\,y, & d\,z \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \\ d^3x, & d^3y, & d^3z \end{vmatrix}.$$

Hodnoty pro X, Y, Z již známe, zbývá ještě vyjádřiti ϑ funkcemi α, β, γ, δ. Differencujeme-li výrazy pro d^2y a d^2z z člán. 13. ještě jednou majíce na zřeteli, že tu pouze t jest neodvislou proměnnou, obdržíme

$$d^3y = \alpha''\,dt^2\,dx + 2\,\alpha'\,dt\,d^2x + \alpha\,d^3x,$$
$$dz^3 = \gamma''\,dt^2\,dx + 2\,\gamma'\,dt\,d^2x + \gamma\,d^3x;$$

---

*) ibid. pag. 223., vyd. druhé.

vložíme-li veškeré známé hodnoty do vzorce pro ϑ, obdržíme po přiměřeném vyčíslení determinantu

$$\vartheta = (\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha'')\, dx^3\, dt^3$$

a dosadíme-li tuto hodnotu jakož i onu pro $X^2 + Y^2 + Z^2$ z čl. 13. do vzorce pro R', zjednáme si konečně

$$R' = -\frac{\alpha'^2 + \gamma'^2 + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')^2}{\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha''} D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right) \tag{23}$$

co výraz pro poloměr kroucenosti křivky vratu v bodu t. Jedná-li se o poloměr kroucenosti pouze v jednom bodu a ne o poměr a polohu jeho v různých bodech křivky vratu, možno opět znamení zanedbati a hleděti jen k absolutní délce jeho, jako u poloměru křivosti.

Střed kroucenosti nalezá se v binormale příslušného bodu křivky vratu. Označíme-li λ, μ, ν úhly, které binormala uzavírá s osami souřadnými, jsou souřadnice středu toho určeny vzorci

$$\xi = x + R' \cos\lambda,$$
$$\eta = y + R' \cos\mu,$$
$$\zeta = z + R' \cos\nu;$$

dle známých relac analytické geometrie prostorové platí však pro úhly λ, μ, ν binormaly určené rovnicemi (19)

$$\frac{\cos\mu}{\cos\lambda} = -\frac{\gamma'}{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'},$$
$$\frac{\cos\nu}{\cos\lambda} = \frac{\alpha'}{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'},$$

a mimo to

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

z kterýchž rovnic možno ustanoviti $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$. Zavedeme-li kratší označení

$$\alpha'^2 + \gamma'^2 + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')^2 = M^2,$$

zjednáme si řešením těchto rovnic

$$\cos\lambda = \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{M},$$
$$\cos\mu = \frac{-\gamma'}{M},$$
$$\cos\nu = \frac{\alpha'}{M},$$

kteréž hodnoty vloženy byvše zároveň s onou pro R' do vzorců pro ξ, η, ζ, podávají

$$\xi = x - \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha''} M.D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right),$$
$$\eta = y + \frac{\gamma'}{\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha''} M.D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right), \qquad (24)$$
$$\zeta = z - \frac{\alpha'}{\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha''} M.D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right),$$

souřadnice středu kroucenosti vyjádřeny jsou zde opět co funkce proměnné t; vyloučíme-li t vždy ze dvou těchto rovnic, obdržíme průměty křivky středů kroucenosti na rovinách souřadných.

(Pokračování.)

Příspěvek k theorii kuželoseček.

Napsal

Vilém Jung v Pardubicích.

Znamená-li

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

rovnici křivky druhého stupně, vztažené na provoúhlé souřadnice, degeneruje se takováto křivka ve dvě přímky, v konečnu se pronikající, platí-li

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

platí-li však k tomu ještě

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{11}, & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

znamená rovnice zmíněná dvě rovnoběžné přímky!

Tyto vztahy mezi součiniteli pro ony zvláštní případy kuželoseček se různým způsobem odvádějí*); chci v těchto řádcích naznačiti odvození, s kterým jsem se posud nikde nesetkal.

1. Křivka druhého stupně $\overline{\Gamma}$ jest výtvarem dvou projektivných svazků paprskových $\overline{s} \equiv (A, B, C, \ldots Z)$ a $\overline{s}' \equiv (A', B', C', \ldots Z', \ldots)$ v téže rovině, což lze symbolicky vyznačiti $\overline{\Gamma} \lessgtr \overline{s} : \overline{s}'$, $(\overline{s}\, \pi\, \overline{s}')$.

---

*) Viz ku př. *Studnička* „Poznámka k analytické geometrii". Časop. math. a fys. R. VI. pag. 35—40.